重庆建筑工程学院学报
第11卷第2期　JOURNAL OF CHONGQING INSTITUTE OF　Vol.11 No.2
1989年 6 月　ARCHITECTURE AND ENGINEERING　June 1989

不等端弯矩作用下双角钢截面压弯构件的承载能力研究

须宪明　李开禧　魏明钟

摘　要　本文综合指定杆长求极限承载力和确定轴向压力求构件极限承载长度这两种计算方法的优点，采用逆算单元长度法计算构件长度，通过轴力增量和端转角增量的交互控制，考虑初弯曲的影响，从而提出了一种在不等端弯矩作用下，计算速度和精度均较满意的压弯构件面内失稳极限承载力计算方法，并用之于计算双角钢截面压弯构件的极限承载力。根据所得的$\frac{N}{N_p}-\frac{M}{M_p}$相关曲线，验证了钢结构规范中有关规定，提出了相应的面内失稳验算式，供修订钢结构规范参考。

关键词　双角钢T形截面，压弯构件，极限强度，初弯曲，残余应力

前　言

双角钢截面压弯构件，在我国钢结构工程中应用很广。这类构件在不等端弯矩作用下，除了各种缺陷因素影响外，还因压力作用于翼缘一侧或腹板一侧的区别，承载能力也不相同。当端弯矩为各种比值时，构件所能承担的极限荷载比较复杂，必须进行详尽而全面的计算，才能在大量计算数据的基础上归纳出可靠的实用公式。

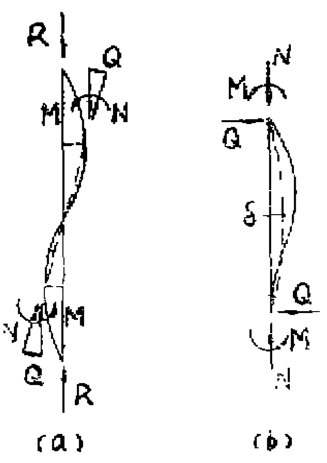


图 1

对于不等端弯矩作用下压弯构件的承载能力，文献[2]建议在GDC法的基础上，采用等效柱（Equivalent Column）的方法求解，即把压弯构件的挠曲线视为轴压柱中的对应段。例如，当两端弯矩等值同向时，按上述方法得出反对称的挠曲线如图1(*a*)所示。这种方法存在两个问题：首先判断截面的弹塑性条件时，上述方法认为压力为R，实际上，由图可知：压力应为N；其次，上述方法没有计入初弯曲的影响，如把该影响综合计入，所得到的挠曲线如图1（b）所示。可见，按等效柱的概念计算不等端弯矩作用下的压弯构件，存在明显的误差，尤其在双角钢截面偏心压杆中，由于变形较大，影响更为显著，特别当两端弯矩等

本文1988年5月6日收到。

值同向时，误差尤为突出。

为了能方便地绘出压弯构件极限承载能力的相关曲线，不少文献[3-4]中采用先取杆长为定值，在已知初弯曲挠度的条件下，用有限元法计算各级荷载作用下的挠度，从而逐渐追索出荷载的极限值。这种方法的计算结果准确，但需进行全过程分析，工作量较大。

本文在分析以上两类计算方法的基础上，仍先令杆长为定值以便输入初弯曲的数值，但用“逆算单元长度法”计算各杆端转角时的压弯构件挠曲线，利用所算出各杆杆长的增加或减少作为轴力增加或减少的信息。这样，既可利用“逆算单元长度法”计算挠曲线时几乎不需要迭代的优点，又可回避定杆长求压弯构件极限承载力所需的全过程分析，从而使计算速度大大加快。下面，简要说明计算方法的要点。

1 计算方法

1.1 逆算单元长度法

文献[1]提出计算弹塑性压弯构件极限承载力的逆算单元长度法，该法的要点为：

(1) 已知截面曲率为φ，压力为N时，如何确定压应变ε和相应的弯矩M

设已知压应变为ε_0，曲率为φ_0时，已算出截面的压力为N，弯矩为M_0（见图2(a)）以及弹性区的面积A_e，弹性区形心C_e到全截面形心C的距离y_e，弹性区对自身形心轴x_e的惯矩I_e（如图2(b)所示）。

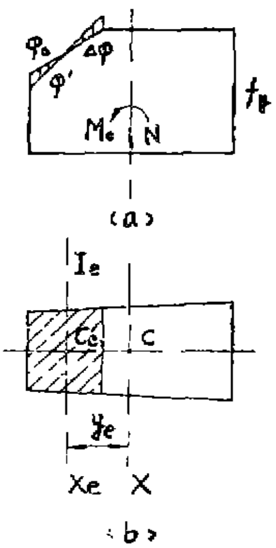


图 2

当曲率增量为Δ_φ，且截面绕x_e轴转动时，在理想弹塑性材料中，塑性区的应力仍为屈服极限f_y，仅弹性区应力发生增量（如图2(a)阴影部分所示），弹性区内拉力增量和压力增量几乎相互抵消，因而，由此引起的轴向压力的差值很小，大部在百分之一之内。用截面绕弹性区形心x_e转动的方法确定新的曲率φ，又可理解为在截面绕原形心轴转动的同时，增加压应变$\Delta\varepsilon=\Delta\varphi\cdot y_e$，即：随曲率$\varphi$的变化同步调整平均压应变$\varepsilon$值，从而使所计算出截面的压力几乎仍为$N$值。但为了保证计算压力的精度，压应变再按下式修正2～3次，相对误差即可小于10^{-4}。

$$\varepsilon'=\varepsilon+\frac{\Delta N}{E\cdot A_e}$$

基于以上思路，就可编写已知截面曲率φ压力N时，求取截面压应变ε和弯矩M的N-M-φ子程序。

(2) 曲率φ的取值等效地代换为单元长度的计算

在以往的计算方法中，常采用有限元法将柱子分割成若干长度为定值的柱段。因此，为了求得各单元截面的曲率必须根据内、外力的平衡进行反复迭代。在逆算单元长度法中，仍然采用有限元法的概念，但将柱子分割成若干长度为待定的柱段，即将柱的单元长度视为变量，而把该单元截面变形后的曲率视为某一定值，由内、外弯矩的平衡逆算出该单元的长度。

在实际计算中，所指定的曲率必须是合理的，否则，求出的单元长度难免过长或过短，甚至找不到实际解。为此，在文[1]中，对于内弯矩根据压力不变时，在理想弹塑性体的假

定下，内弯矩的微增量dM_i等于弹性区的刚度EI_e和曲率的微分$d\varphi$的乘积。即：

$$dM_i = EI_e \cdot d\varphi$$

令任一柱段的内弯矩增量

$$\Delta M_{ij} = dM_i,$$

对于外弯矩，若取单元形函数为三次函数，则任一柱段的外弯矩增量为：

$$\Delta M_{ej} = N \cdot [\theta_{j-1} \cdot \Delta x_j - \frac{1}{3}(\varphi_{j-1} + \frac{1}{2}\varphi_j) \cdot \Delta x_j^2] - Q \cdot \Delta x_j$$

由　　$\Delta M_{ej} = \Delta M_{ij}$

得　　$N \cdot [\theta_{j-1} \cdot \Delta x_j - \frac{1}{3}(\varphi_{j-1} + \frac{1}{2}\varphi_j) \cdot x_j^2] - Q \cdot \Delta x_j = E \cdot I_{ej-1} \cdot d\varphi_j$

由上式变形得：

$$\varphi_j = \frac{N(\theta_{j-1} \cdot \Delta x_i - \frac{1}{3}\varphi_{j-1} \cdot \Delta x_j^2) - Q \cdot \Delta x_j + EI_{ej-1} \cdot \varphi_{j-1}}{EI_{ej-1} + \frac{1}{6} \cdot N \cdot \Delta x_i^2} \qquad (2—1)$$

$$\Delta x_j = \frac{(N \cdot \theta_{j-1} - Q) \pm \sqrt{(N \cdot \theta_{j-1} - Q)^2 - 4N(\varphi_{j-1} + \frac{1}{2}\varphi_j) \cdot \Delta M_{ij}/3}}{2N(\varphi_{j-1} + \frac{1}{2}\varphi_j)/3} \qquad (2—2)$$

因此，假定单元长度为Δ_0，代入公式（1）求得单元截面的曲率φ_j，由N-M-φ子程序计算相应的内弯矩值M_{ij}，再由式(2)即可求得该单元的真实长度Δ_j。由于dM_{ij}很接近于ΔM_{ij}，最后算得的单元长度Δ_i必定非常接近于假定单元长度Δ_0。

正是由于以上把计算单元的曲率问题等效地用计算单元的长度来代换，从而消去了为求取单元曲率而需的一层循环，使得计算速度大大加快。所以，对于初弯曲除外各种因素影响下的压弯构件，按逆算单元长度法可以快速而又精确地求出指定压力，不同端转角下维持构件平衡的各柱子单元的长度和压杆总长l，从而求得构件的l-θ曲线（见图4），相应于曲线的顶点即是构件在指定压力N下的极限承载长度l_{max}。

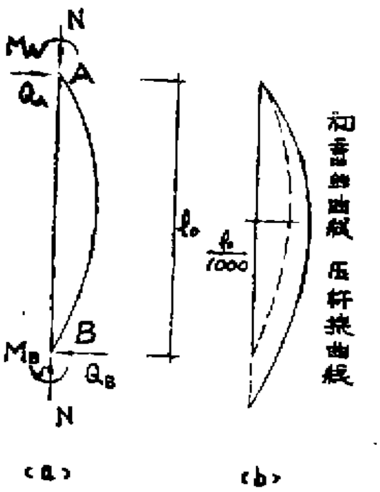


图　3

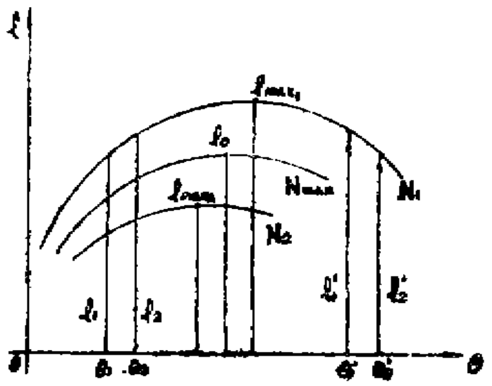


图　4

1.2 端转角增量与轴力增量的交互控制

通常取构件初弯曲曲线为跨中挠度为$l/1000$的正弦曲线。在CDC法中，构件长度l未定，因此初弯曲曲线方程无法确定。对于等端弯矩作用下的压弯构件，文献[1]基于压杆挠曲线与初弯曲曲线相似这一假定，采用等效放大外轴力的方法取得了令人满意的计算结果。但是，对于承受不等端弯矩作用的压弯构件，前述假定不再成立。为此，重新设计了如下计算程序以考虑初弯曲的影响，计算方法可参见图3(a)所示。

(1) 给定杆A端的弯矩值M_A；

(2) 给定杆长l_o。

(3) 给定杆B端的弯矩值M_B，由公式

$$Q=\frac{M_A-M_B}{l_o}$$

计算杆端剪力值；

(4) 假定轴力N值；

(5) 假定杆A端的转角θ_A；

(6) 调用逆算单元长度法子程序计算杆长l_i，初弯曲曲线取跨中挠度为$l/1000$的抛物线，即初曲率为定值。曲线方程为：

$$y_z=\begin{cases}-(x^2-lx)/250l & l_i\leqslant l_o\\ 0 & l_i>l_o\end{cases}$$

式中：y_z——初弯曲曲线侧向位移坐标。

由逆算单元长度法可知：在轴力N确定的情况下，根据不同端转角θ计算所得的l值可作出图4所示的l-θ曲线，相应于曲线的顶点即是构件的极限承载长度l_{max}，它的特征是在θ的某个区域内l值不变。改变轴压力N值，即可得到多条l-θ曲线和相应的l_{max}（见图4）。很显然，N值越小，l_{max}越大；反之，则l_{max}越小。

令
$$\Delta L_1=l_2-l_0$$
$$\Delta L_2=l_2-l_1$$

若ΔL_1大于0，即N值较小，则不论ΔL_2大于0（曲线处于上升段）还是小于0（曲线处于下降段），均需增大轴压力N值。

若ΔL_1小于0，ΔL_2大于0，则增大θ角；

· ΔL_1小于0，ΔL_2小于0，则减小θ角。

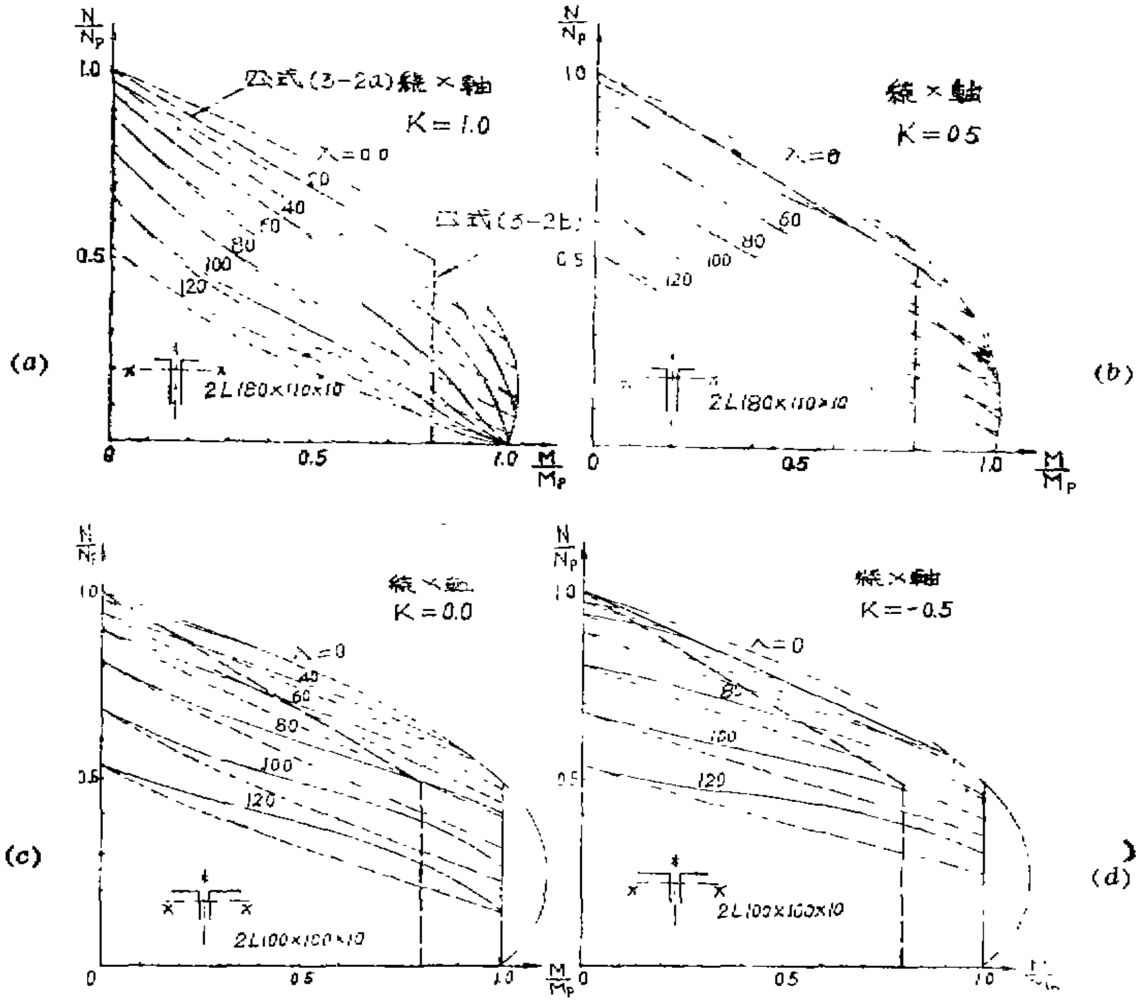
若$\Delta L_1=\Delta L_2=0$，即得相应于杆长l_0的极限承载力N_{max}，构件的初弯曲问题同时得到解决。

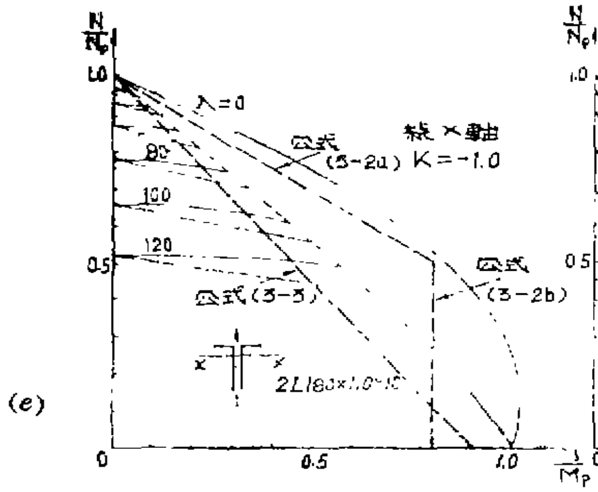
根据以上思路，本文编制了求解不等端弯矩作用下压弯构件面内失稳极限承载能力的电算程序。将计算轧制宽翼缘工字形截面压弯构件所得的结果与文献[3]的结论相比可知：该程序计算速度和精度均较理想。

2　计算结果及其分析

2.1 计算结果

采用上节所述电算程序，本文计算了角钢尺寸分别为∠180×110×10和∠100×100×10





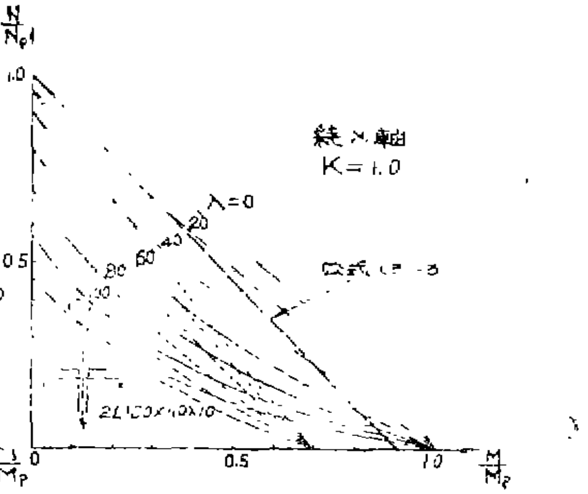
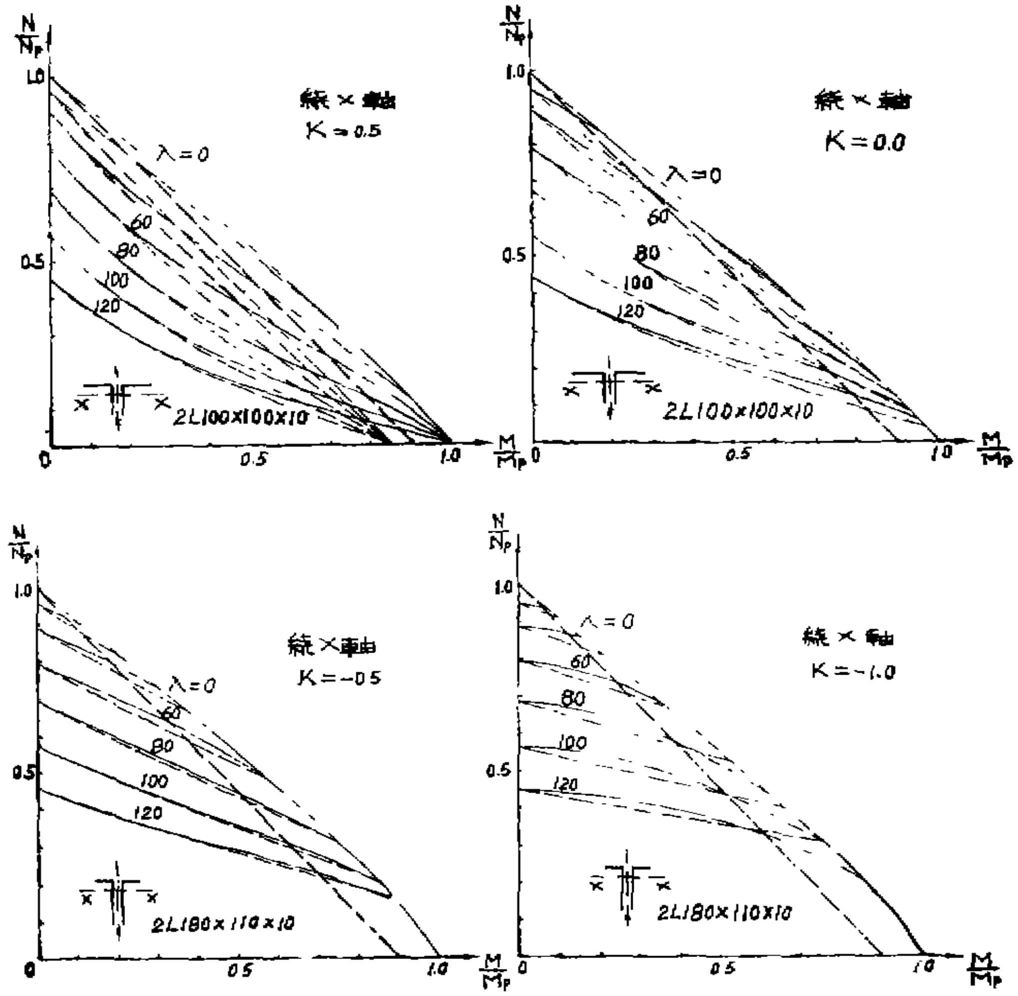


图 6　(a)

图 5　双角钢(2∠180×110×10)T形截面正向弯曲$N/N_p-M/M_p$曲线

(b)

(c)



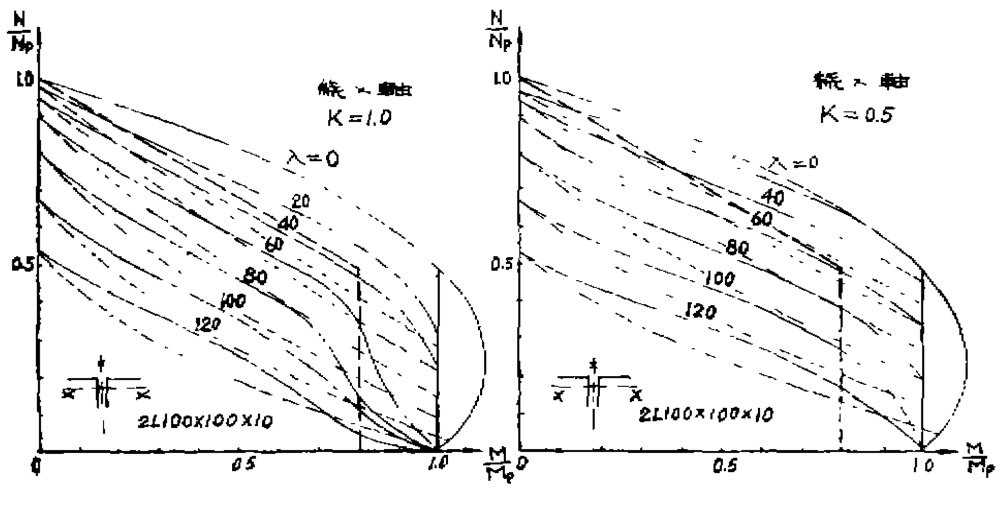
(d)

(e)

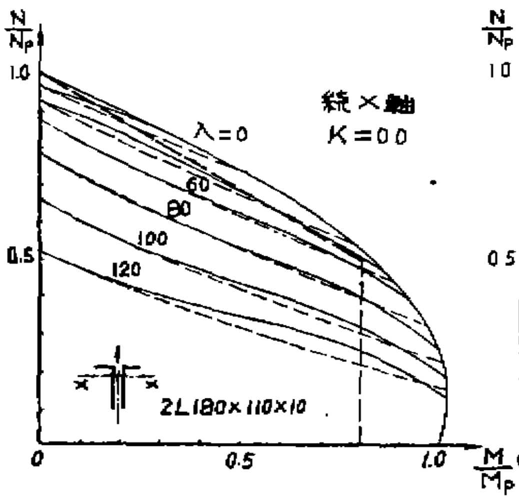
图 6 双角钢(2∠180×110×10)T形截面负向弯曲$\frac{N}{N_p}-\frac{M}{M_p}$曲线

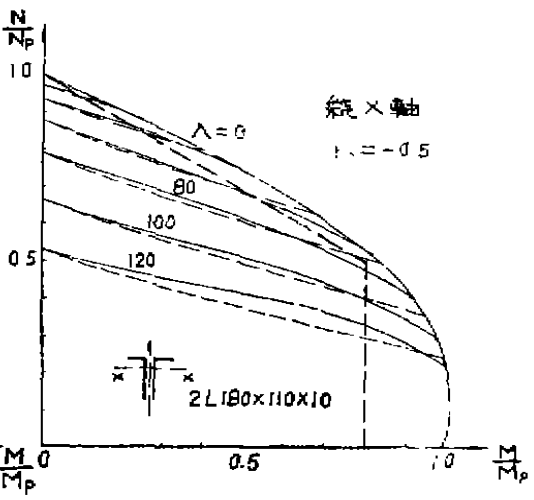
(a)

(b)



(b)





(c)

(c)

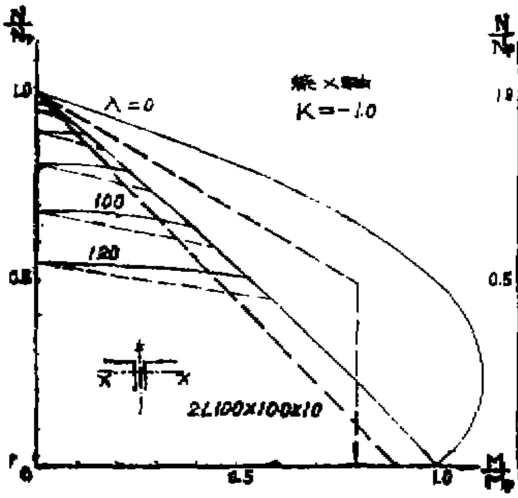


图7 双角钢(2∠100×100×10)T形截面正向弯曲 ($N/N_p-M/M_p$) 曲线

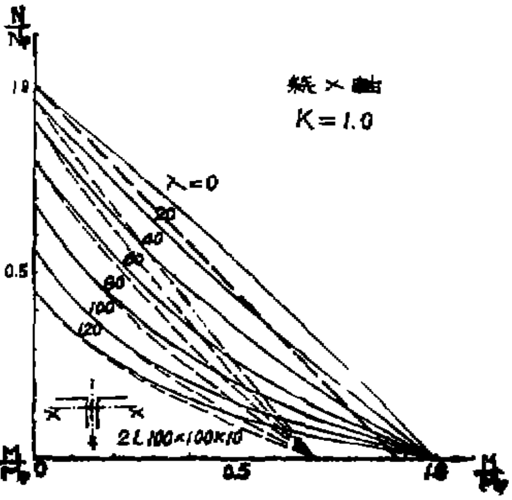
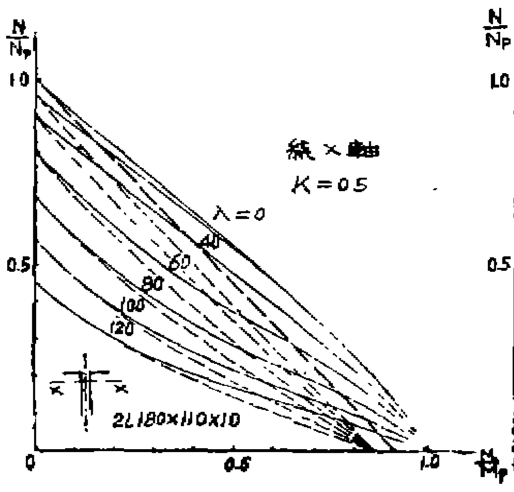
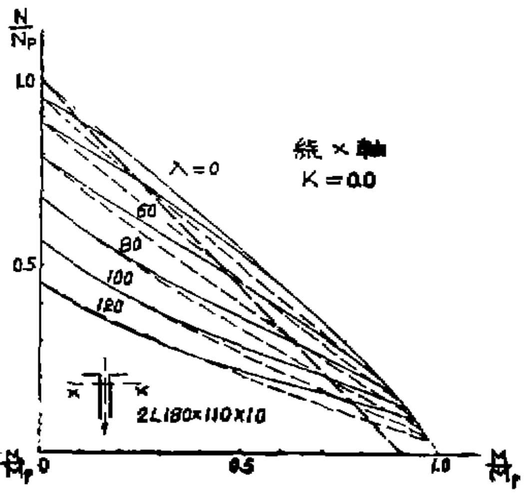


图8 (a)

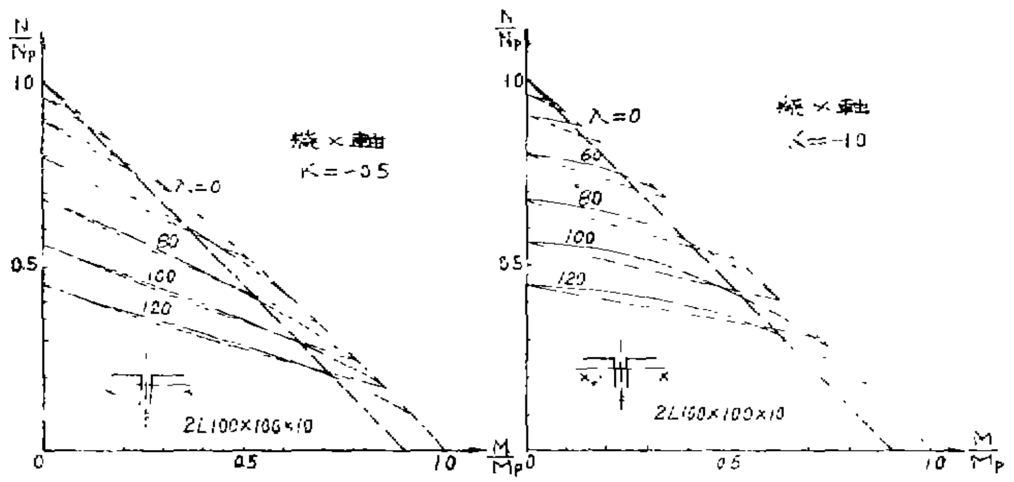
(b)





(c)

(d)



(e)

图 8　双角钢（2∠100×100×10）T形截面负向弯曲$\frac{N}{N_p}-\frac{M}{M_p}$曲线

角钢截面在压力作用于翼缘一侧（以下简称为正向弯曲）和腹板一侧（以下简称为负向弯曲）时考虑残余应力[6]和初弯曲的极限承载能力。图5至图8分别绘出了它们的$\frac{N}{N_p}-\frac{M}{M_p}$相关曲线，纵坐标为$\frac{N}{N_p}$，横坐标为$\frac{M}{M_p}$，$N_p$为无弯矩作用时的截面极限承载压力，$M_p$为无轴力作用时的截面极限弯矩值。即：

$$N_p = A\cdot f_y$$
$$M = W_p\cdot f_y$$

式中：A——截面面积；

W_p——截面受弯时的塑性抵抗矩。

在每种情况下，均给出了五种不同端弯矩比值，即$K=1.0$，0.5，0，-0.5和-1.0时的$\frac{N}{N_p}-\frac{M}{M_p}$相关曲线，上式中：

$$K=\frac{M_{min}}{M_{max}} \qquad (3-1)$$

式中：M_{min}、M_{max}——分别为绝对值较小和较大的那个弯矩，代入上式时，应带上正、负号，如图9所示。

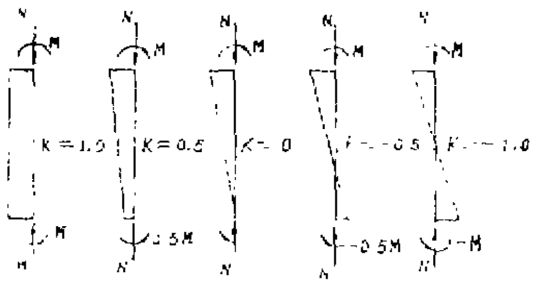


图 9　不同K时的一阶弯矩图

2.2　双角钢截面面内失稳实用验算式

根据以上计算所得的双角钢T形截面$\frac{N}{N_p}-\frac{M}{M_p}$相关曲线，考虑实用计算的简便，建议采用如下面内失稳验算式。

2.2.1　强度验算式

所谓强度验算式即是构件长细比$\lambda=0$的截面极限承载能力验算式。图10和图11绘出了

理想弹塑性材料常用轧制弯钢组成的T形截面在正向和负向弯矩作用下的$\frac{N}{N_p}-\frac{M}{M_p}$相关曲线。取其下包直线（图中虚线）即得：

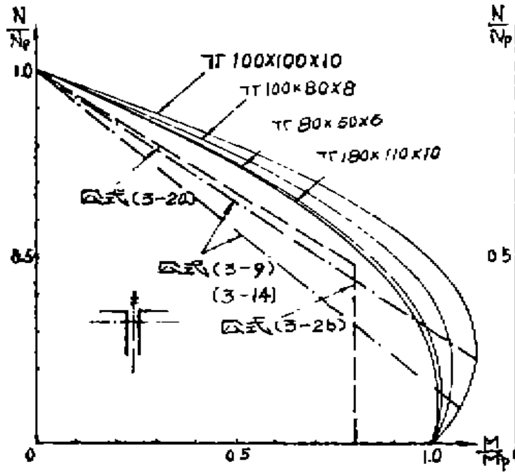


图10 正向弯曲强度曲线

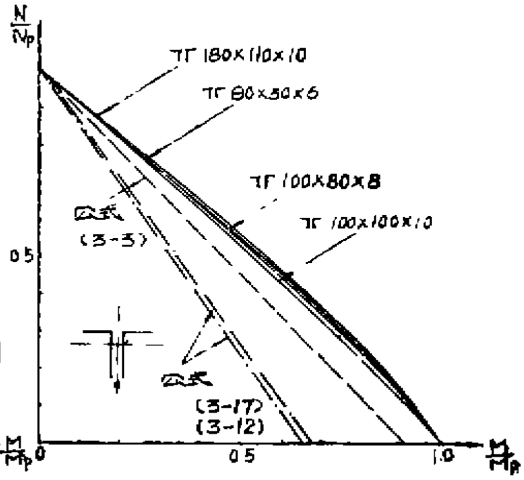


图11 负向弯曲强度曲线

1）正向弯矩作用

$$\frac{N}{N_p}+\frac{M}{1.6M_p}\leqslant 1.0 \qquad \frac{N}{N_p}\geqslant 0.5 \tag{3—2a}$$

$$\frac{M}{0.8M_p}\leqslant 1.0 \qquad \frac{N}{N_p}<0.5 \tag{3—2b}$$

2）负向弯矩作用

$$\frac{N}{N_p}+\frac{M}{0.9M_p}\leqslant 1.0 \tag{3—3}$$

2.2.2 稳定验算式

1）正向弯矩作用

$$\frac{N}{\varphi N_p}+\frac{\beta_m M}{(1.5-\lambda/240)M_p[1-0.4(1+K)N/N_E]}\leqslant 1.0 \tag{3—4}$$

2）负向弯矩作用

$$\frac{N}{\varphi N_p}+\frac{\beta_m M}{0.7M_p[1-0.4(1+K)N/N_E]}\leqslant 1.0 \tag{3—5}$$

式中：β_m——等效弯矩系数，在此取$\beta_m=0.65+0.35K$，K值的计算见式（3—1）。

从图5至图8可知：式（3—2）至式（3—5）所表曲线（图中虚线）与理论计算曲线（图中实线）非常接近。

2.3 与规范验算式的比较

规范GBJ17—88中规定的压弯构件面内弯曲强度和稳定验算式依次为：

1）强度验算式

$$\frac{N}{A_n}+\frac{M_x}{r_x W_{nx}}\leqslant f \qquad (3-6)$$

式中：r_x为截面塑性发展系数。

2）稳定验算式

$$\frac{N}{\varphi_x A}+\frac{\beta_{mx}M_x}{r_x W_{1x}(1-0.8N/N_{Ex})}\leqslant f \qquad (3-7)$$

式中：N——所计算构件段内的轴向压力；

φ_x——在弯矩作用平面内轴心受压稳定系数；

M_x——所计算杆段内的最大弯矩；

N_{Ex}——欧拉临界力，$N_{Ex}=\pi^2 EA/\lambda x^2$，

W_{1x}——弯矩作用平面内较大受压翼缘的毛截面抵抗矩；

β_{mx}——等效弯矩系数，对于无横向荷载作用的不等端弯矩作用下的压弯构件，$\beta_{mx}=0.65+0.35K$，$\beta_{mx}\geqslant 0.4$。使构件同向弯曲时，K为正；反之，为负。

对于单轴对称截面压弯构件，当弯矩作用在对称平面内且使较大翼缘受压时，还应按下式进行验算：

$$\left|\frac{N}{A}-\frac{\beta_{mx}M_x}{r_x W_{2x}[1-1.25N/N_{Ex}]}\right|\leqslant f \qquad (3-8)$$

式中：W_{2x}——对较小翼缘的毛截面抵抗矩。

为满足可比性的要求，令截面极限弯矩值$M_{px}=r_x'\cdot W_{nx}\cdot f_y$，$r_x'$为所用截面的实际塑性发展系数，将式（3—6）至（3—8）依次变换为如下各式：

$$\frac{N}{N_p}+\frac{M_x}{\eta M_{px}}\leqslant 1.0 \qquad (3-6)$$

$$\frac{N}{\varphi_x N_p}+\frac{\beta_{mx}M_x}{\eta M_{px}(1-0.8N/N_{Ex})}\leqslant 1.0 \qquad (3-7)$$

$$\left|\frac{N}{N_p}-\frac{\beta_{mx}M_x}{\eta M_{px}(1-1.25N/N_{Ex})}\right|\leqslant 1.0 \qquad (3-8)$$

式中：$\eta=r_x/r_x'$。

规范GBJ17—88规定：双角钢T形截面正向弯曲时$r_{x_1}=1.05$；负向弯曲时，$r_{x_2}=1.2$。由计算可得本文所用截面的r_x'和η_x为：

（1）⅃⌈100×100×10

$r_{x_1}'=0.73$ $\qquad\eta_{x_1}=r_{x1}/r_{x_1}'=1.05/0.73=1.44$；

$r_{x_2}'=1.81$ $\qquad\eta_{x_2}=r_{x_2}/r_{x_2}'=1.2/1.81=0.66$。

（2）⅃⌈180×110×10

$r_{x_1}'=0.88$ $\qquad\eta_{x1}=r_{x1}/r_{x1}'=1.05/0.88=1.19$

$$r_{x_2'}=1.79 \qquad \eta_{x2}=r_{x2}/r_{x_2'}=1.2/1.79=0.67。$$

因此，式（3—6）′至（3—8）′依次化为：

（1）ㄒ⌈100×100×10正向弯曲

$$\frac{N}{N_p}+\frac{M_{X1}}{1.44M_{px}}\leqslant 1.0 \qquad (3—9)$$

$$\frac{N}{\varphi_{x1}N_P}+\frac{\beta_{mx}M_{x1}}{1.44M_{Px}(1-0.8N/N_{Ex})} \qquad (3—10)$$

$$\left|\frac{N}{N_p}-\frac{\beta_{mx}M_{x1}}{0.66M_{Px}(1-1.25N/N_{Ex})}\right|\leqslant 1.0 \qquad (3—11)$$

（2）ㄒ⌈100×100×10负向弯曲

$$\frac{N}{N_P}+\frac{M_{x2}}{0.66M_{Px}}\leqslant 1.0 \qquad (3—12)$$

$$\frac{N}{\varphi_{x2}N_p}+\frac{\beta_{mx}M_{x2}}{0.66M_{Px}(1-0.8N/N_{Ex})}\leqslant 1.0 \qquad (3—13)$$

（3）ㄒ⌈180×110×10正向弯曲

$$\frac{N}{N_p}+\frac{M_{x1}}{1.19M_{Px}}\leqslant 1.0 \qquad (3—14)$$

$$\frac{N}{\varphi_{x1}N_p}+\frac{\beta_{mx}\cdot M_{x1}}{1.19M_{Px}(1-0.8N/N_{Ex})}\leqslant 1.0 \qquad (3—15)$$

$$\left|\frac{N}{N_P}-\frac{\beta_{mx}M_{x1}}{0.67M_{Px}(1-1.25N/N_{Ex})}\right|\leqslant 1.0 \qquad (3—16)$$

（4）ㄒ⌈180×110×10负向弯曲

$$\frac{N}{N_p}+\frac{M_{X2}}{0.67M_{Px}}\leqslant 1.0 \qquad (3—17)$$

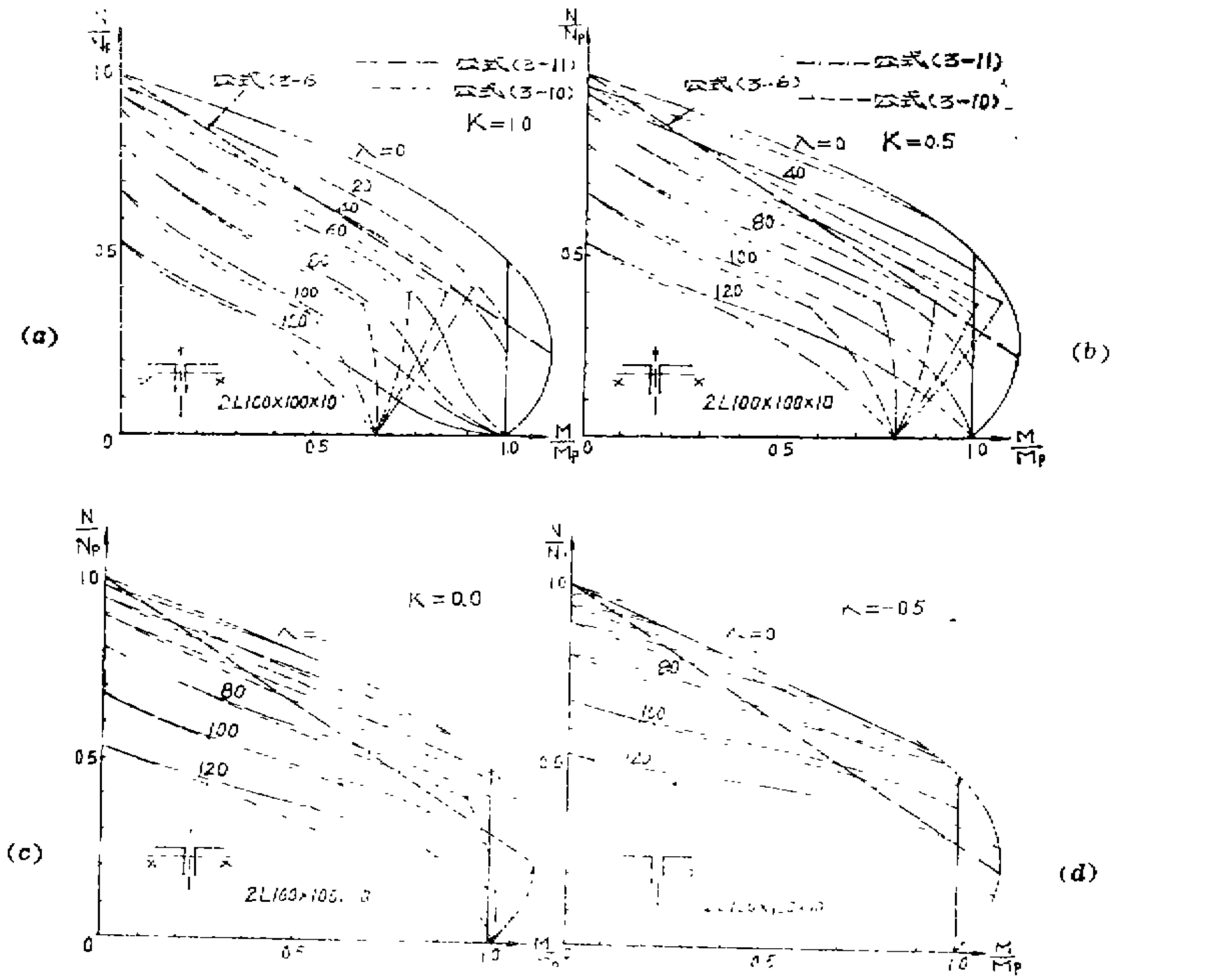
$$\frac{N}{\varphi x_2N_P}+\frac{\beta_{mx}M_{x2}}{0.67M_{Px}(1-0.8N/N_{Ex})}\leqslant 1.0 \qquad (3—18)$$

强度验算式（3—9）、（3—12）、（3—14）、（3—17）所表曲线（图中点划线）已被绘于图10和图11之中，将它们与理论计算曲线相比可知，规范强度验算式用于正向弯曲当M相对较大时是偏于不安全的；而用于验算负向弯曲又是偏保守的。

对于稳定验算式，以ㄒ⌈100×100×10截面（ㄒ⌈180×110×10截面同样成立）为例分析如下：

（1）正向弯曲

将式(3-9)和式（3-11)所表曲线依次绘于图12中，相应地作出计算所得的$\frac{N}{N_p}-\frac{M}{M_p}$相关曲线。两者相比可知：规范验算式用于验算双角钢截面是安全的。计算时，表达式（$1-0.8N/N_{Ex}$）已改为[$1-0.4(1+K)N/N_{Ex}$]。



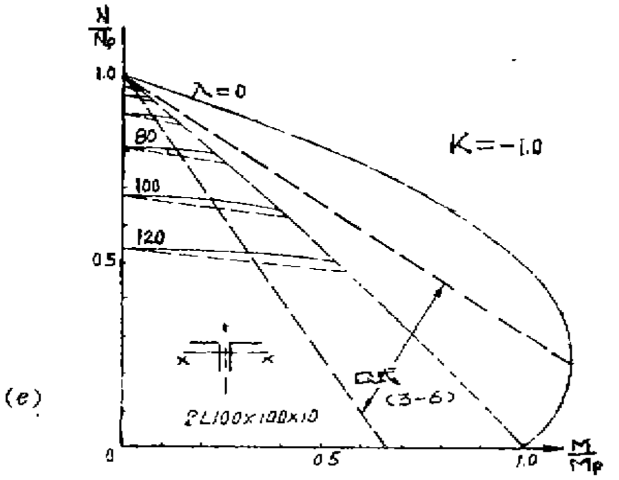


图 12

（2）负向弯曲

对于双角钢截面负向弯曲，由式（3-5）与式（3—13）直接相比，可知规范验算式也是安全的。

由上可知：规范验算式用于验算双角钢T形截面面内失稳是安全的，但公式曲线与理论曲线相差较大。

3 结 论

1. 本文提出的计算不等端弯矩作用下压弯构件面内失稳极限承载力的计算方法。在加快计算速度，节省机时方面效果十分明显，同时又合理地解决了初弯曲问题，计算结果精确。

2. 采用以上计算方法，本文计算了轧制和焊接工字形截面压弯构件分别绕强轴和弱轴弯曲（为省篇幅计未加列出计算结果），和双角钢T形截面压弯构件正向和负向弯曲时的极限承载力，得到了大量的$\frac{N}{N_p}-\frac{M}{M_p}$相关曲线，这些曲线可供设计使用。

3. 根据计算所得的$\frac{N}{N_p}-\frac{M}{M_p}$相关曲线，验证GBJ17—88中的有关规定得：

(1) 规范GBJ17—88规定的压弯构件面内失稳验算式，用于双角钢T形截面压弯构件是安全的。但规范曲线与理论曲线相差较大，建议将表达式$(1-0.8N/N_{Ex})$改为$[1-0.4\times(1+K)N/N_{Ex}]$，以使规范曲线与理论曲线更为相符。

(2) 规范规定的等效弯矩系数β_m，可用于双角钢T形截面压弯构件，但大于或等于0.4这一条件可以不用。

4. 本文采用以实际计算所得的$\frac{N}{N_p}-\frac{M}{M_p}$相关曲线为依据，用回归实用验算式的概念，建议采用相应的双角钢T形截面面内失稳验算式，它们与实际的$\frac{N}{N_p}-\frac{M}{M_p}$曲线较为相符。

5. 通过本文的研究可知：若取等效弯矩值为压弯构件中三分段内的的最大弯矩是一种较为满意的设计方法。以此为基础将本文计算方法加以改进，即可用于计算横向荷载作用压弯构件的极限承载能力，为修订钢结构规范提供参考数据。

参 考 文 献

[1] 李开禧、肖允徽：《逆算单元长度法计算单轴失稳时的临界力》，重庆建院科技资料83—028

[2] W.F. Chen and T.Atsuta, 《Theory of Beam-Column》, 1977

[3] 沈祖炎：《宽翼缘工字钢压杆的稳定计算公式》

[4] 陈惠发：《讲学资料汇编》，重庆建院建工系

[5] 吕烈武、沈世钊、沈祖炎、胡学仁著：《钢结构构件的稳定理论》，中国建筑工业出版社，1983年

[6] 钢结构规范管理组、《关于受压构件科研专题采用的残余应力统一模式的通知》，1983年11月

（编辑：刘家凯）

A STUDY ON THE ULTIMATE STRENGTH OF DOUBLE ANGLE T SECTION BEAM-COLUMNS UNDER UNEQUAL MOMENTS AT BOTH ENDS

Xu Wanming *Li Kaixi* *Wei Mingzhong*

ABSTRACT This paper summarizes the merits of traditional calculation methods for ultimate strength of beam-column. The inverse calculation segment length method is used to calculate the length of beam-column subjected to unequal bending moments at both ends. Initial deflection of beam-columns is considered by calculating ΔN and $\Delta\theta$ repeatedly. The ultimate strength of double angle T section beam-column under unequal moments at both ends are calculated and a great deal of related curves of N/N_p-M/M_p are plotted. Some practical formulas are proposed to improve the relevant provisions of the "Specification for the Design of Steel Structure" 。

KEY WORDS double angle T section, beam-columns, the ultimate strength, initial deflection, residual stress