重庆建筑工程学院学报
第11卷第2期 JOURNAL OF CHONGQING INSTITUTE OF Vol.11 No.2
1989年6月 ARCHITECTURE AND ENGINEERING June 1989

考虑中面应变效应的加肋矩形板的横向弯曲分析解*

孙仁博　王珑瑜

摘　要　本文考虑了板中面的应变效应，将加肋板的内力化为作用于中面上的薄膜内力及弯曲内力，并用板中面的三个位移分量来表示这些内力。导出了关于位移分量的三个基本微分方程式，并将其化为一个仅含挠度的八阶微分方程及两个求板中面位移的积分式。文中分析了解的形式，导出了肋端简支单向加肋矩形板，具有弱抗扭开口肋时的全部位移及内力式，并给出了数值算例。

关键词　中面应变，加肋矩形板

引　言

密加肋板（以下简称加肋板）是建筑、桥梁、航空、造船等工程中广泛采用的一种结构形式，它具有极大的实用价值和良好的经济效益。在讨论这种板的弯曲问题时，一般按Huber建立的正交板理论进行分析[1]。Huber理论只适用于自然正交板，而加肋板是构造正交板，且加劲肋一般是不对称于板的中面布置的，常位于板的一侧。这时，加肋板的中性曲面位置是未知的，不与板的中面重合。因此，分析时应考虑板中面的应变效应。所以，借助于等效厚度的概念，利用Huber理论来分析加肋板，只能得到近似解。

鉴于上述，我们在建立板的基本微分方程时，认为加肋板的中性曲面不与板的中面重合，考虑了中面的应变效应。计算时，认为剪力及扭矩只作用于板内，略去肋的影响[2]。将加肋板的内力化为作用于板中面上的薄膜内力及弯曲内力，并用板中面上的位移分量来表示。这样处理，虽然略去了一些因素，但对工程上大多数弱抗扭加劲肋构成的加肋板来说是次要的。

本文1988年9月18日收到。
*本文属国家教委高校科学技术基金资助及建设部城乡建设科技发展基金资助课题。

1 基本微分方程式

设单向加肋板的平面尺寸如图1示，板的单元体如图2示。

我们取变形前的板中面为xy面，z 轴朝肋的一方。用u,v,w表示板中面沿x,y,z 方向的

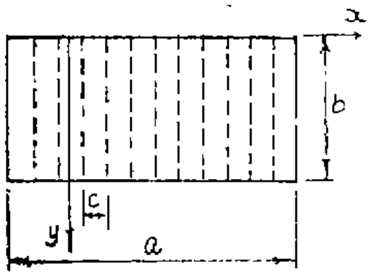


图1 单向加肋板的平面尺寸

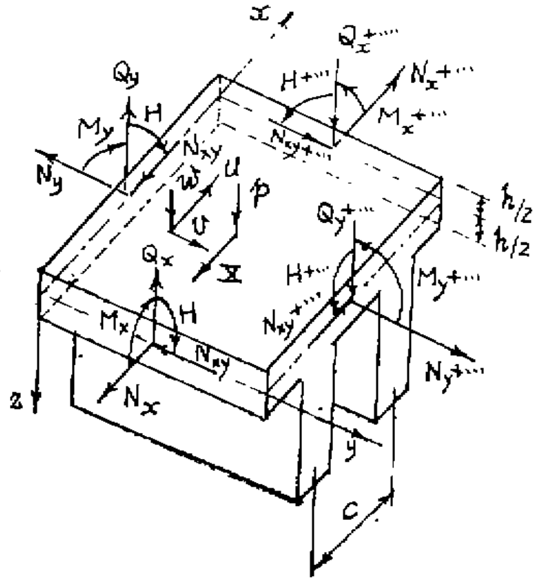


图2 单向加肋板的单元体受力图

位移分量。考虑板中面的应变效应后，按照Love-Kirchhoff假设，可以求得加肋板的应变分量为：

$$
\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
r_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
\end{aligned}\right\} \tag{1}
$$

板及肋内的应力分量分别为

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma'_x &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) \\
\sigma'_y &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) \\
\tau'_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} r_{xy}
\end{aligned}\right\} \text{（用于板内）} \tag{2}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma''_x &= \tau''_{xy} = 0 \\
\sigma''_y &= E\varepsilon_y
\end{aligned}\right\} \text{（用于肋内）} \tag{3}
$$

我们定义板中面上的内力为：

$$
\left.\begin{aligned}
N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma'_x dz = K\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma'_y dz + \frac{1}{C}\int_A \sigma'_y{}' dA = K\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{E}{C}\left(A\frac{\partial v}{\partial y} - S\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\
N_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau'_{xy} dz = \frac{(1-\mu)K}{2}\left(\frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma'_x zdz = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\
M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma'_y zdz + \frac{1}{C}\int_A \sigma'_y{}' zdA = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \frac{E}{C}\left(S\frac{\partial v}{\partial y} - I\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\
H &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau'_{xy} zdz = -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
\end{aligned}\right\} \quad (4)
$$

式中 $D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$，$K=\dfrac{Eh}{1-\mu^2}$；$C$——肋的间距；$A,S,I$——分别为肋的截面积及肋截面对$x$轴的静面矩、惯性矩；$E$，$\mu$——材料的弹性模量及泊松比；$h$——板的厚度。

加肋板单元体的静力平衡方程式为：

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\
&\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \\
&\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0 \\
&\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} = Q_y \\
&\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = Q_x
\end{aligned}\right\} \quad (5)
$$

代（4）$_{4-6}$式入（5）$_{4,5}$式，得

$$
\left.\begin{aligned}
Q_x &= -D\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w \\
Q_y &= -D\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w + \frac{E}{C}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(Sv - I\frac{\partial w}{\partial y}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (6)
$$

式中 $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$。将式（4）$_{1-3}$及（6）式代入（5）$_{1-3}$式，得求位移分量$\mu, v, w$的基本微分方程组：

$$
\left.
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=0\\
&\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\left[\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\left(1+\frac{(1-\mu^2)A}{ch}\right)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]v-\\
&\qquad-\frac{(1-\mu^2)S}{ch}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}=0\\
&\left(D\nabla^4+\frac{EI}{C}\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)w-\frac{ES}{C}\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}=p
\end{aligned}
\right\}\qquad(7)
$$

（7）式可以化为以下三个方程式：

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial^8 w}{\partial x^8}+D_1\frac{\partial^8 w}{\partial x^6\partial y^2}+D_2\frac{\partial^8 w}{\partial x^4\partial y^4}+D_3\frac{\partial^8 w}{\partial x^2\partial y^6}+D_4\frac{\partial^8 w}{\partial y^8}\\
&\quad=\frac{1}{D}\left(\frac{\partial^4 p}{\partial x^4}+D_5\frac{\partial^4 p}{\partial x^2\partial y^2}+D_6\frac{\partial^4 p}{\partial y^4}\right)\\
&u=-\frac{1}{B_3}\left[A_7\iiiint\frac{\partial^5 w}{\partial x^5}dydydydy+A_8\iint\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}dydy+A_9\int\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}dx\right.\\
&\qquad\left.+A_{10}\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{1}{D}\iint\left(A_7\iint\frac{\partial p}{\partial x}dydy+A_{11}\int pdx\right)dydy\right]\\
&v=\frac{1}{B_3}\left[\iiint\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}dydydy+2\int\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dy+A_6\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{1}{D}\iiint pdydydy\right]
\end{aligned}
\right\}\qquad(8)
$$

式中

$$
[B_1,B_2,B_3,B_4]=\left[\frac{A}{ch},\ \frac{S}{ch},\ \frac{ES}{CD},\ \frac{EI}{CD}\right]
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&A_1=2(1+\mu)B_1\qquad A_2=B_4+\frac{5-\mu}{2}A_1\\
&A_3=2\{B_4+(1+\mu)[B_1B_4-B_2B_3+(2-\mu)B_1]\}\\
&A_4=B_4+A_5A_8-A_{12}\qquad A_5=(1-\mu^2)B_1\\
&A_6=1+B_4\qquad A_7=\frac{1-\mu}{1+\mu}\\
&A_8=2\left[\frac{2-\mu}{1+\mu}+(1-\mu)B_1\right]\qquad A_{10}=2A_{11}+A_8A_7\\
&A_9=A_8A_{11}-2(1-\mu)B_2B_3\qquad A_{11}=-\frac{2}{1+\mu}A_{13}\\
&A_{12}=(1-\mu^2)B_2B_3\qquad A_{13}=1+A_5
\end{aligned}
\right\}\qquad(9)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&D_1 = 4 + A_1 \qquad D_6 = 2 + A_1\\
&D_2 = 6 + A_2 \qquad D_6 = A_{13}\\
&D_3 = 4 + A_3\\
&D_4 = 1 + A_4
\end{aligned}\right\}
\tag{10}
$$

至此为止，我们建立了求解单向加肋板弯曲问题的全部方程式。根据边界条件求解基本微分方程式（7）或（8）便可以得到板的中面位移u, v, w。进而由（4）、（6）式求得作用于板中面处的内力。

2　肋端边简支单向加肋板的解

设单向加肋板沿y向简支，x向为任意约束。坐标原点取在板的左边缘，其位置可任意选定（图3）。这时，y向的简支条件为：

$$[u, w, N_y, M_y]_{y=0,b} = 0 \tag{10}$$

现在我们来求自动满足条件（10）的解。

1.2　齐次解

设加肋板的挠度w_h为

$$w_h = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x)\sin\beta_n y;\quad \beta_n = \frac{n\pi}{b} \tag{11}$$

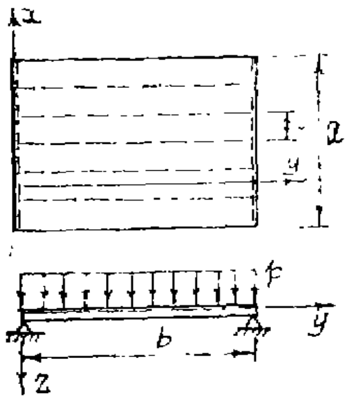


图3　板的平面寸尺，荷载及坐标规定

显然，设定的挠度w_h是满足（10）式的。代（11)式入（8），便得到求$w_n(x)$的八阶常微分方程式

$$\frac{d^8 w_n}{dx^8} - D_1\beta_n^2\frac{d^6 w_n}{dx^6} + D_2\beta_n^4\frac{d^4 w_n}{dx^4} - D_3\beta_n^6\frac{d^2 w_n}{dx^2} + D_4\beta_n^8 w_n = 0$$

设

$$w_n(x) = e^{r_n x}, \qquad t = r_n^2 \tag{12}$$

代入上式后，得到求r_n的特征方程式为

$$t^4 - D_1\beta_n^2 t^3 + D_2\beta_n^4 t^2 - D_3\beta_n^6 t + D_4\beta_n^8 = 0 \tag{13}$$

这是一个标准形式的四次方程式。当加劲肋为弱抗扭的开口截面，如矩形截面、L形截面，倒T形截面时，（9）式中的B_4比B_2B_3大若干倍，且是一个很大的量，而B_1是一个很小的量，不到B_4的百分之一。经过对（13）式各种可能解的分析，并通过对加劲肋截面的各种可能尺寸组合的大量数值计算，发现在弱抗扭开口截面加劲肋时，由(13式)求得的八个r_n值，具有以下形式：

$$
\left.\begin{aligned}
&r_{n1,2} = \pm k_1\beta_n, \quad r_{n3,4} = \pm k_2\beta_n\\
&r_{n5\sim 8} = \pm(k_3 \pm k_4 i)\beta_n
\end{aligned}\right\}
\tag{14}
$$

式中

$$
\left.\begin{aligned}
&k_{1,2}=\sqrt{\frac{C_1}{2}\pm C_2+\frac{D_1}{4}}\\
&k_{3,4}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{C_3^2+C_4^2}\pm C_3\right)}\\
&C_1=\sqrt{b_4+b_6-\frac{2d_1}{3}}\\
&C_{2,4}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{b_2^2+b_3^2}\pm b_2\right)}\\
&C_3=-\frac{C_1}{2}+\frac{D_1}{4},\quad b_2=\frac{b_4+b_5}{2}+\frac{2d_1}{3}\\
&b_3=\frac{\sqrt{3}}{2}(b_4-b_6),\quad b_4=\sqrt[3]{-q_1+\sqrt{q_1^2+q_1^3}}\\
&b_6=\sqrt[3]{-q_1-\sqrt{q_1^2+p_1^3}},\quad p_1=-\frac{4d_3}{3}-\frac{d_1^2}{q}\\
&q_1=-\frac{1}{27}d_1^3+\frac{4}{3}d_1d_3-\frac{1}{2}d_2^2\\
&d_1=D_2-\frac{3D_1^2}{8},\quad d_2=-D_3+\frac{D_1D_2}{2}-\frac{D_1^3}{8}\\
&d_3=D_4-\frac{1}{4}D_1D_3+\frac{1}{16}D_1^2D_2-\frac{3}{256}D_1^4
\end{aligned}\right\} \tag{14}
$$

这样，（11）式变为

$$
\begin{aligned}
w_h=\sum_{n=1}^{\infty}(&C_{n1}Shx_1+C_{n2}Chx_1+C_{n3}Shx_2+C_{n4}Chx_2\\
&+C_{n5}\varphi_1+C_{n6}\varphi_2+C_{n7}\varphi_3+C_{n8}\varphi_4)\sin\beta_n y
\end{aligned} \tag{15}
$$

式中$C_{n1}\sim C_{n8}$为积分常数，由x向的边界条件确定，而

$$
\left.\begin{aligned}
&x_j=k_j\beta_n x, \qquad (j=1\sim4)\\
&\varphi_1=Shx_3\sin x_4,\quad \varphi_2=Shx_3\cos x_4\\
&\varphi_3=Chx_3\sin x_4,\quad \varphi_4=Chx_3\cos x_4
\end{aligned}\right\} \tag{16}
$$

然后代（15）式入（8）$_{2,3}$式，得位移分量u，v为：

$$
\left.\begin{aligned}
u_h=&-\frac{1}{B_3}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n[C_{n2}u_1Shx_1+C_{n1}u_1chx_1+C_{n4}Shx_2+C_{n3}u_2chx_2\\
&+(-C_{n6}u_3+C_{n7}u_4)\varphi_1+(C_{n8}u_3+C_{n8}u_4)\varphi_2+\\
&+(C_{n5}u_4-C_{n8}u_3)\varphi_3+(C_{n8}u_4+C_{n7}u_3)\varphi_4]\sin\beta_n y\\
v_h=&\frac{1}{B_3}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n[C_{n1}v_1Shx_1+C_{n2}v_1chx_1+C_{n3}v_2Shx_2\\
&+C_{n4}v_2chx_2+(C_{n5}v_3-C_{n6}v_4)\varphi_1+(C_{n6}v_3+C_{n7}v_4)\varphi_2\\
&+(C_{n7}v_3-C_{n8}v_4)\varphi_3+(C_{n8}v_3+C_{n6}v_4)\varphi_4]\cos\beta_n y
\end{aligned}\right\} \tag{17}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
u_1 &= A_7k_1^5 - A_8k_1^3 - \frac{A_9}{k_1} + A_{10}k_1 \\
u_2 &= A_7k_2^5 - A_8k_2^3 - \frac{A_9}{k_2} + A_{10}k_2 \\
u_3 &= A_7q_5 + A_8q_3 + \frac{A_9k_4}{k_3^2+k_4^2} + A_{10}k_4 \\
u_4 &= A_7p_5 - A_8p_3 - \frac{A_9k_3}{k_3^2+k_4^2} + A_{10}k_3 \\
v_1 &= k_1^4 - 2k_1^2 + A_6, \quad v_2 = k_2^4 - 2k_2^2 + A_6 \\
v_3 &= p_4 - 2p_2 + A_6, \quad v_4 = q_4 - 2q_2
\end{aligned}
\right\} \tag{18}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
p_2 &= k_3^2 - k_4^2 & q_2 &= 2k_3k_4 \\
p_3 &= k_3(k_3^2 - 3k_4^2) & q_3 &= k_4(k_4^2 - 3k_3^2) \\
p_4 &= k_3^4 - 6k_3^2k_4^2 + k_4^4 & q_4 &= 2p_2q_2 \\
p_5 &= k_3(k_3^4 - 10k_3^2k_4^2 + 5k_4^4) & q_5 &= k_4(5k_3^4 - 10k_3^2k_4^2 + k_4^4)
\end{aligned}
\right\} \tag{19}
$$

2.2 特解

这里，我们只考虑加肋板受均布荷载p的情形。将p展为y的正弦级数，有

$$
p = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin\beta_n y, \qquad p_n = \frac{4p}{n\pi}, (n = 1,\ 3,\ 5,\ ,\ \cdots) \tag{20}
$$

参照(15)、(17)式，取u, v, w的特解为：

$$
\left.
\begin{aligned}
u_p &= -\frac{1}{B_3}\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \tilde{u}_n \sin\beta_n y \\
v_p &= \frac{1}{B_3}\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \tilde{v}_n \cos\beta_n y \\
w_p &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \sin\beta_n y
\end{aligned}
\right\} \tag{21}
$$

将(20)、(21)式代入基本微分方程式（7）或（8），可以求得

$$
\left.
\begin{aligned}
\tilde{u}_n &= 0 \\
\tilde{v}_n &= \frac{A_{12}}{D_4}\ \frac{p_n}{D\beta_n^4} \\
\tilde{w}_n &= \frac{A_{13}}{D_4}\ \frac{p_n}{D\beta_n^4}
\end{aligned}
\right\} \tag{22}
$$

2.3 加肋板的内力式

我们将已求得的位移分量的全解代入(4)、(6)式，便可以求出加肋板的各内力表达式，并可以把所有的位移及内力表达式写成以下两类统一的形式。

对于 v, w, $\frac{\partial w}{\partial y}$, N_x, N_y, M_x, M_y, Q_y, $\overline{Q_y}=Q_y+\partial H/\partial x$, 可以表示为：

$$W=\Psi_W\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\widetilde{\Psi}_W\Big[C_{n1}a_1^W Shx_1+C_{n2}a_1^W Chx_1+C_{n3}a_2^W Shx_2+C_{n4}a_2^W Chx_2+(C_{n5}a_3^W-C_{n8}a_4^W)\varphi_1+(C_{n6}a_3^W+C_{n7}a_4^W)\varphi_2+(-C_{n6}a_4^W+C_{n7}a_3^W)\varphi_3+(C_{n5}a_4^W+C_{n8}a_3^W)\varphi_4+\widetilde{W}_n\Big]F_n \tag{23}$$

对于u, $\partial w/\partial x$, N_{xy}, H, Q_x, $\overline{Q_x}=Q_x+\partial H/\partial y$, 可表示为：

$$W=\Psi_W\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\widetilde{\Psi}_W\Big[C_{n2}a_1^W Shx_1+C_{n1}a_1^W Chx_1+C_{n4}a_2^W Shx_2+C_{n3}a_2^W Chx_2+(-C_{n6}a_3^W+C_{n7}a_4^W)\varphi_1+(C_{n5}a_3^W+C_{n8}a_4^W)\varphi_2+C_{n5}a_4^W-C_{n8}a_3^W)\varphi_3+(C_{n6}a_4^W+C_{n7}a_3^W)\varphi_4+\widetilde{W}_n\Big]F_n \tag{24}$$

(23)式及(24)式中的系数W, Ψ_W, $\widetilde{\Psi}_W$, a_1^W, a_2^W, a_3^W, a_4^W 及F_n见表 1。

3 竖放肋向简支单向加肋板的解

以上所讨论的单向加肋板，其板面，即xy平面内只有法向荷载p。然而，在实际应用中，如多边形容器结构的侧板，板面往往是沿竖向布置的。对于这类竖放的单向加肋板，板面（即xy平面）内，除了有法向荷载p外，还有作用于板面内的自重。

设x、y轴仍位于板面内，x轴竖直向上，y轴为水平的，这时，板的自重沿x轴负向，即向下作用的。令单位面积的自重为X，沿x轴负向（向下）为正（图2）。

竖放单向加肋板的基本方程式，与本文第二部分相似，不同的是：平衡方程式$(5)_1$的右端应为X，方程式$(7)_1$的右端应为X/K，方程式$(8)_1$的右端括号项，应增加一项 $-(1+\mu^2)B_2\frac{\partial^5 X}{\partial x\partial y^4}$。

对于竖放肋向简支单向加肋板，当荷载p及X各为常量时，其解与第三部分相同。但这时的$(22)_1$式变为

$$\widetilde{u}_n=\frac{2(1+\mu)B_3}{Eh}\frac{x_n}{\beta_n^3} \tag{25}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&x_n=\frac{4X}{n\pi},\quad(n=1,3,5,\cdots)\\&X=\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}x_n\sin\beta_n y\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

表 1　公式（23）、（24）中的系数W、ψ_W，$\tilde{\psi}_W$，α_i^W，$\widetilde{W}_n$及F_n值

W	Ψ_W	$\tilde{\Psi}_W$	$\widetilde{W}$	F_n	α_1^W	α_2^W	α_3^W	α_4^W
N_x	$-\frac{K}{B_3}$	β_n^2	$\mu\tilde{v}_n$	$\sin\beta_n y$	$k_1u_1+\mu v_1$	$k_2u_2+\mu v_2$	$k_3u_4-k_4u_3+\mu v_3$	$k_3u_3+k_4u_4+\mu v_4$
N_y	$-\frac{K}{B_3}$	β_n^2	$A_{13}\tilde{v}_n-A_{12}\tilde{w}_n$	$\sin\beta_n y$	$A_{13}v_1+\mu k_1u_1-A_{12}$	$A_{13}v_2+\mu k_2u_2-A_{12}$	$A_{13}v_3+\mu(k_3u_4-k_4u_3)-A_{12}$	$A_{13}v_4+\mu(k_3u_3+k_4u_4)$
N_{xy}	$\frac{(1-\mu)K}{2B_3}$	β_n^2	$-\tilde{u}_n$	$\cos\beta_n y$	$k_1v_1-u_1$	$k_2v_2-u_2$	$k_4v_3+k_3v_4-u_3$	$k_3v_3-k_4v_4-u_4$
M_x	$-D$	β_n^2	$-\mu\tilde{w}_n$	$\sin\beta_n y$	$k_1^2-\mu$	$k_2^2-\mu$	$P_2-\mu$	q_2
M_y	$-D$	β_n^2	$\tilde{v}_n-A_6\tilde{w}_n$	$\sin\beta_n y$	$\mu k_1^2+v_1-A_6$	$\mu k_2^2+v_2-A_6$	$\mu P_2+v_3-A_6$	μq_2+v_4
H	$-D(1-\mu)$	β_n^2	0	$\cos\beta_n y$	k_1	k_2	k_4	k_3
Q_x	$-D$	β_n^3	0	$\sin\beta_n y$	$k_1(k_1^2-1)$	$k_2(k_2^2-1)$	$k_4(P_2-1)+k_3q_2$	$k_3(P_2-1)-k_4q_2$
$\bar{Q}_x$	$-D$	β_n^3	0	$\sin\beta_n y$	$k_1(k_1^2-2+\mu)$	$k_2(k_2^2-2+\mu)$	$k_4(P_2-2+\mu)+k_3q_2$	$k_3(P_2-2+\mu)-k_4q_2$
Q_y	$-D$	β_n^3	$\tilde{v}_n-A_6\tilde{w}_n$	$\cos\beta_n y$	$k_1^2+v_1-A_6$	$k_2^2+v_2-A_6$	$P_2+v_3-A_6$	q_2+v_4
$\bar{Q}_y$	$-D$	β_n^3	$\tilde{v}_n-A_6\tilde{w}_n$	$\cos\beta_n y$	$(2-\mu)k_1^2+v_1-A_6$	$(2-\mu)k_2^2+v_2-A_6$	$(2-\mu)P_2+v_3-A_6$	$(2-\mu)q_2+v_4$
u	$-\frac{1}{B_3}$	β_n	$\tilde{u}_n$	$\sin\beta_n y$	u_1	u_2	u_3	u_4
v	$\frac{1}{B_3}$	β_n	$\tilde{v}_n$	$\cos\beta_n y$	v_1	v_2	v_3	v_4
w	1	1	$\tilde{w}_n$	$\sin\beta_n y$	1	1	1	0
$\frac{\partial w}{\partial x}$	1	β_n	0	$\sin\beta_n y$	k_1	k_2	k_4	k_3
$\frac{\partial w}{\partial y}$	1	β_n	$\tilde{w}_n$	$\cos\beta_n y$	1	1	1	0

4 算　例

作为本文结果的应用，我们计算了如图 3 肋端简支，顺肋向固支的加肋板。其x向跨度$a=10$m，y向跨度$b=10$m，截面形状如图 4，肋间距$c=1$ m，法向荷载$p=5$ KN/m²，板厚$h=60$mm，肋厚$t_1=0.2$m，肋高$H=0.34$m，材料的弹性模量$E=26$GPa，泊松比$\mu=0.1667$取坐标原点在板左边（肋端边）a/2处，则x向的边界条件为

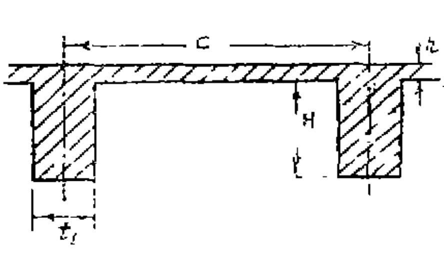
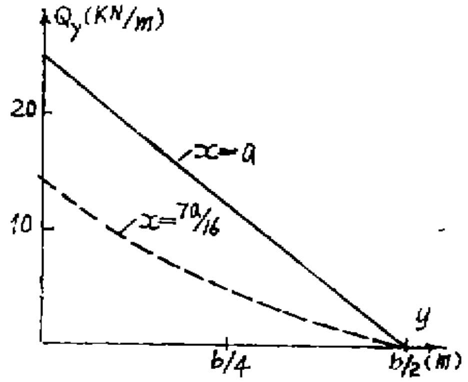


图　4

$$[u,v,w,\partial w/\partial x]_{x=\pm a/2}=0$$

计算表明，顺肋方向内力比垂直于肋向的内力大得多，如$M_{ymax}=63.8326$KN-m/m，而$M_{xmax}=15.4174$KN-m/m。板的挠度w及顺肋方向（y向）的内力计算结果如图5。



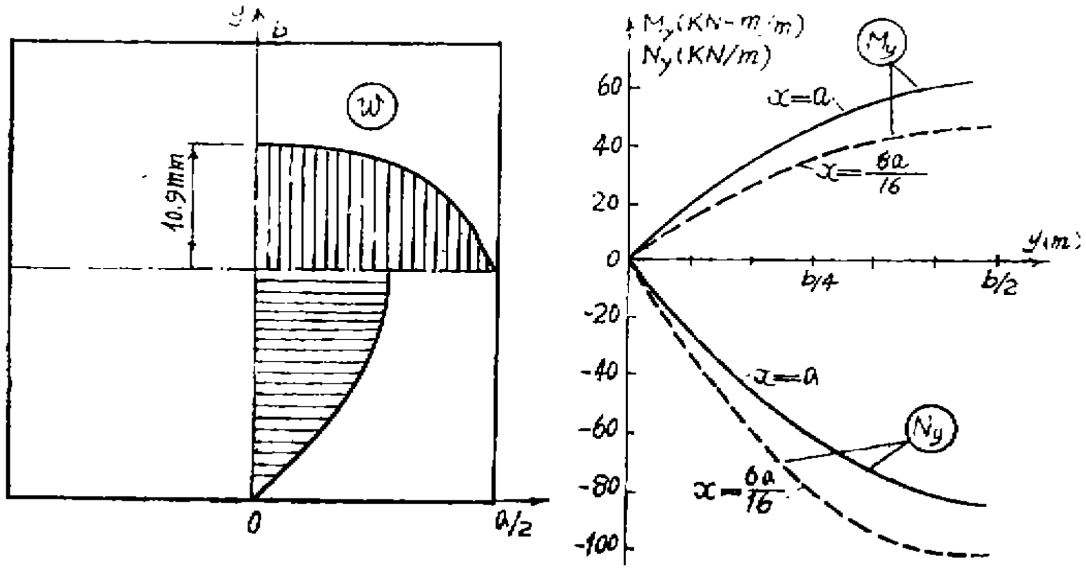


图　5

5 结　语

由表2可知级数的收敛性良好。为了校核结果的正确性，我们用计算结果考查了结构的平衡条件。当项数$n=139$时，发现其任一部份的平衡条件误差均在2%以内。对于实际工程问题一般取50项即可满足工程的要求。

表2　　　　**级数的系数表**

项数 n	C_{n2}	C_{n4}	C_{n5}	C_{n8}
1	0.459048×10^{-3}	-0.245758×10^{-2}	0.119897×10^{-3}	0.175746×10^{-3}
3	0.112024×10^{-7}	-0.235154×10^{-6}	0.154422×10^{-9}	-0.832686×10^{-10}
5	0.513506×10^{-11}	-0.415725×10^{-9}	-0.103978×10^{-14}	-0.252826×10^{-14}
7	0.562857×10^{-14}	-0.175635×10^{-11}	-0.977223×10^{-19}	0.287171×10^{-19}
9	0.144426×10^{-17}	-0.113718×10^{-13}	0.104838×10^{-23}	0.571390×10^{-23}
11	0.204131×10^{-19}	-0.947918×10^{-16}	0.425544×10^{-27}	-0.328761×10^{-28}
13	0.521973×10^{-22}	-0.934782×10^{-18}	0.101095×10^{-32}	-0.370841×10^{-31}
15	0.150453×10^{-24}	-0.103911×10^{-19}	-0.360331×10^{-35}	-0.476996×10^{-36}
17	0.474357×10^{-27}	-0.126348×10^{-21}	-0.910687×10^{-40}	0.378744×10^{-39}
19	0.160352×10^{-29}	-0.164717×10^{-23}	0.421931×10^{-43}	0.149408×10^{-43}
21	0.573110×10^{-32}	-0.227040×10^{-25}	0.233923×10^{-47}	-0.490902×10^{-47}
23	0.214381×10^{-34}	-0.327530×10^{-27}	-0.589811×10^{-51}	-0.360840×10^{-51}
25	0.832960×10^{-37}	-0.490776×10^{-29}	-0.555112×10^{-55}	0.725084×10^{-55}
27	0.334189×10^{-39}	-0.759377×10^{-31}	0.904618×10^{-59}	0.855943×10^{-59}
29	0.137820×10^{-41}	-0.120776×10^{-32}	0.132545×10^{-62}	-0.113623×10^{-62}
31	0.582086×10^{-44}	-0.327179×10^{-34}	-0.142412×10^{-66}	-0.206245×10^{-66}
33	0.251025×10^{-46}	-0.196722×10^{-36}	-0.322435×10^{-70}	0.176133×10^{-70}
35	0.492339×10^{-48}	-0.166776×10^{-38}	0.211407×10^{-74}	0.506210×10^{-74}
37	0.110266×10^{-51}	-0.954403×10^{-40}	0.797538×10^{-78}	-0.239082×10^{-78}
⋮				
99	0.275650×10^{-122}	-0.794404×10^{-93}	-0.271884×10^{-195}	-0.13568×10^{-144}
⋮				
139	0.129809×10^{-167}	-0.198152×10^{126}	0.262462×10^{-269}	0.865670×10^{-270}

本文考虑了中面效应，较之Huber理论和能量法近似解都更为准确，对于处理当前国民经济建设中一些重要的，要求较高的加肋结构是有效的，而且其解的形式较为简单，易于实现计算程序设计。关于本文结果的实际应用，将另文发表。

参 考 文 献

〔1〕 S.P. Timoshenko, and S.Woinowsky-krieger, Theory of Plates and Shells, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1959

〔2〕 M.S.Troisky, Stiffened Plates, Bending, StabiLity and Vibration, Elsvier Scientific Pub. Co. , Amsterdam, 1976

（编辑：徐维森）

ANALYTICAL SOLUTION FOR LATERAL BENDING OF RECTANGULAR STIFFENED PLATES CONSIDERING THE EFFECT OF STRAIN IN THE MIDDLE PLANE

Sun Renbo *Wang Daiyu*

ABSTRACT In this paper, considering the effect in the middle plane of plates, internal forces in stiffened plates are transformed into membrane and bending forces expressed by the three displacements in the middle plane of plates。 Three simulataneous differential equations are derived. They are transformed into one differential equation of eighth order for the deflection and two integral formulas, expressing the deformations in the middle plane of plates. The forms of the solution are analyzed。 All formulas of both displacements and internal forces in rectangular stiffened plates with two simply supported edges, being normal to the direction of stiffeners, are derived。 A calculeting example is given。

KEY WORDS strain in middle plane, rectangular stiffened plates