

八阶及十六阶纵横图的编制

章 长 才

(昆明工学院)

摘 要 本文所编制的八阶及十六阶纵横图,其特点是首先编制出一种数学模型,使得双重纵横图问题变成单重纵横图的编制问题,即通过解线性方程组来编制双重纵横图,从而减少了编制双重纵横图的难度。

关键词 单重纵横图, 双重纵横图, 纵横图的教学模型

前 言

纵横图问题是个古老的数学问题。由我国宋朝数学家杨辉最早命名,后来西方人称幻方。纵横图问题是组合数学的研究对象之一。随着电子计算机的发展纵横图问题的研究也有所进展,但是它的编制的理论和方法并未完全解决。本文仅就八阶及十六阶进行研究。

1 纵横图的定义及质量标准

定义:把 n^2 个不同的自然数排成一个正方形表,使该表的各行之和,各列之和及两个对角线之和均相等,该表叫 n 阶单重纵横图,又称 n 阶单重幻方。如果该正方形表还满足各行之积各列之积及两个对角线之积均相等,该表叫 n 阶双重纵横图,又称 n 阶双重幻方。

质量标准:衡量纵横图的质量标准有两条,①, n 越小越好。②,在 n 相同条件下,其和越小越好。

2 编制的思路及数学模型

编制一个 n 阶双重纵横图,按照通常的解方程组的方法,共有 $4n+4$ 个方程,其中有 $2n+2$ 个非齐次方程,求出 n^2 个不同的自然数,这是十分困难的。产生困难的根源是来源于双重纵横图中要求各行、各列及两对角线之积相等,从而产生了 $2n+2$ 个非齐次方程。本解法的数学原理是编制出一种特殊的数学模型(正方表),对于 n^2 个不同的自然数,只要它们能满足

对定义中的各行、各列及两个对角线的积相等,也就一定能满各行、各列及两个对角线的积相等,从而克服了解 $2n+2$ 个非齐次方程(乘积项)的困难。即变双重纵横图的编制为单重纵横图的编制。见表1、表2、表3。

表1 八阶双重纵横图数学模型

$a_1(x+b_5)$	$a_2(x+b_7)$	$a_7(x+b_1)$	$a_4(x+b_3)$	x	$a_3(x+b_2)$	$a_6(x+b_4)$	$a_5(x+b_6)$
$x+b_2$	a_3x	$a_6(x+b_6)$	$a_5(x+b_4)$	$a_1(x+b_7)$	$a_2(x+b_5)$	$a_7(x+b_3)$	$a_4(x+b_1)$
$a_6(x+b_7)$	$a_5(x+b_5)$	$x+b_3$	$a_3(x+b_1)$	$a_7(x+b_2)$	a_4x	$a_1(x+b_6)$	$a_2(x+b_4)$
a_7x	$a_4(x+b_2)$	$a_1(x+b_4)$	$x+b_6$	$a_6(x+b_5)$	$a_5(x+b_7)$	$x+b_1$	$a_3(x+b_3)$
$a_4(x+b_4)$	$a_7(x+b_6)$	a_2x	$a_1(x+b_2)$	$a_5(x+b_1)$	$a_6(x+b_3)$	$a_3(x+b_5)$	$x+b_7$
$a_5(x+b_3)$	$a_6(x+b_1)$	$a_3(x+b_7)$	$x+b_5$	$a_4(x+b_6)$	$a_7(x+b_4)$	$a_2(x+b_2)$	a_1x
$a_3(x+b_6)$	$x+b_4$	$a_5(x+b_2)$	a_6x	$a_2(x+b_3)$	$a_1(x+b_1)$	$a_4(x+b_7)$	$a_7(x+b_5)$
$a_2(x+b_1)$	$a_1(x+b_3)$	$a_4(x+b_5)$	$a_7(x+b_7)$	$a_3(x+b_4)$	$x+b_6$	a_5x	$a_6(x+b_2)$

表1对任意的 x, a_i, b_i , 各行、各列及两个对角线之积均等于

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 x(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)(x+b_4)(x+b_5)(x+b_6)(x+b_7)$$

表2 八阶双重纵横图数学模型

$2(x+b_4)$	$3(x+b_6)$	$2x$	$6(x+b_2)$	$x+b_1$	$4(x+b_3)$	$8(x+b_5)$	$7(x+b_7)$
$x+b_3$	$4(x+b_1)$	$8(x+b_7)$	$7(x+b_5)$	$2(x+b_6)$	$3(x+b_4)$	$9(x+b_2)$	$6x$
$8(x+b_6)$	$7(x+b_4)$	$x+b_2$	$4x$	$9(x+b_3)$	$6(x+b_1)$	$2(x+b_7)$	$3(x+b_5)$
$9(x+b_1)$	$6(x+b_3)$	$2(x+b_5)$	$3(x+b_7)$	$8(x+b_4)$	$7(x+b_6)$	x	$4(x+b_2)$
$6(x+b_5)$	$9(x+b_7)$	$3(x+b_1)$	$2(x+b_3)$	$7x$	$8(x+b_2)$	$4(x+b_4)$	$x+b_6$
$7(x+b_2)$	$8x$	$4(x+b_6)$	$x+b_4$	$6(x+b_7)$	$9(x+b_5)$	$3(x+b_3)$	$2(x+b_1)$
$4(x+b_3)$	$x+b_5$	$7(x+b_3)$	$8(x+b_1)$	$3(x+b_2)$	$2x$	$6(x+b_6)$	$9(x+b_4)$
$3x$	$2(x+b_2)$	$6(x+b_4)$	$9(x+b_6)$	$4(x+b_5)$	$x+b_7$	$7(x+b_1)$	$8(x+b_3)$

3 解法举例

在表(2)中,令各行之和、各列之和及两个对角线之和均相等,得18个等式。解这18个等式(从略),得 $b_1 = -k_1 + k_2, b_2 = 2(-k_1 + k_2), b_3 = 3(-k_1 + k_2), b_4 = 3k_1 - 2k_2, b_5 = 2k_1 - k_2, b_6 = k_1, b_7 = k_2$ 。令 $k_1 = 20, k_2 = 26$,得 $b_1 = 6, b_2 = 12, b_3 = 18, b_4 = 8, b_5 = 14, b_6 = 20, b_7 = 26$ 。将 b_i 代入表2得表4;表4中,令 $x = 5$,得表5;表4中,令 $x = 11$,得表6。

在表5中,同理由十六阶纵横图的数学模型,令各行、各列及两个对角线的和均相等,得31个等式。可得 $b_i = 2, b_i = 1, b_i = 2, i = 1, 2, 3, \dots, 15$ 。再令 $x = 201$ 得下列十六阶纵横图(表7)

表3 十六阶纵横图数学模型

$10x$	$11(x+b_2)$	$14(x+b_4)$	$15(x+b_6)$	$8(x+b_8)$	$5(x+b_{10})$	$4(x+b_{12})$	$x+b_{14}$
$9(x+b_{15})$	$12(x+b_{13})$	$13(x+b_{11})$	$16(x+b_9)$	$7(x+b_7)$	$6(x+b_5)$	$3(x+b_3)$	$2(x+b_1)$
$15(x+b_2)$	$14x$	$11(x+b_6)$	$10(x+b_4)$	$x+b_{10}$	$4(x+b_8)$	$5(x+b_{14})$	$8(x+b_{12})$
$16(x+b_{13})$	$13(x+b_{15})$	$12(x+b_9)$	$9(x+b_{11})$	$2(x+b_5)$	$3(x+b_7)$	$6(x+b_1)$	$7(x+b_3)$
$3(x+b_4)$	$2(x+b_6)$	$7x$	$6(x+b_2)$	$13(x+b_{12})$	$16(x+b_{14})$	$9(x+b_8)$	$12(x+b_{10})$
$4(x+b_{11})$	$x+b_9$	$8(x+b_{15})$	$5(x+b_{13})$	$14(x+b_3)$	$15(x+b_1)$	$10(x+b_7)$	$11(x+b_5)$
$6(x+b_6)$	$7(x+b_4)$	$2(x+b_2)$	$3x$	$12(x+b_{14})$	$9(x+b_{12})$	$16(x+b_{10})$	$13(x+b_8)$
$5(x+b_9)$	$8(x+b_{11})$	$x+b_{13}$	$4(x+b_{15})$	$11(x+b_1)$	$10(x+b_3)$	$15(x+b_5)$	$14(x+b_7)$
$x+b_1$	$4(x+b_3)$	$5(x+b_5)$	$8(x+b_7)$	$15(x+b_9)$	$14(x+b_{11})$	$11(x+b_{13})$	$10(x+b_{15})$
$2(x+b_{14})$	$3(x+b_{12})$	$6(x+b_{10})$	$7(x+b_8)$	$16(x+b_6)$	$13(x+b_4)$	$12(x+b_2)$	$9x$
$8(x+b_3)$	$5(x+b_1)$	$4(x+b_7)$	$x+b_5$	$10(x+b_{11})$	$11(x+b_9)$	$14(x+b_{15})$	$15(x+b_{13})$
$7(x+b_{12})$	$6(x+b_{14})$	$3(x+b_8)$	$2(x+b_{10})$	$9(x+b_4)$	$12(x+b_6)$	$13x$	$16(x+b_2)$
$12(x+b_5)$	$9(x+b_7)$	$16(x+b_{11})$	$13(x+b_3)$	$6(x+b_{13})$	$7(x+b_{15})$	$2(x+b_9)$	$3(x+b_{11})$
$11(x+b_{10})$	$10(x+b_8)$	$15(x+b_{14})$	$14(x+b_{12})$	$5(x+b_2)$	$8x$	$x+b_6$	$4(x+b_4)$
$13(x+b_7)$	$16(x+b_5)$	$9(x+b_3)$	$12(x+b_1)$	$3(x+b_{15})$	$2(x+b_{13})$	$7(x+b_{11})$	$6(x+b_9)$
$14(x+b_8)$	$15(x+b_{10})$	$10(x+b_{12})$	$11(x+b_{14})$	$4x$	$x+b_2$	$8(x+b_4)$	$5(x+b_6)$

表4

$2(x+8)$	$3(x+20)$	$9x$	$6(x+12)$	$x+6$	$4(x+18)$	$8(x+14)$	$7(x+26)$
$x+18$	$4(x+6)$	$8(x+26)$	$7(x+14)$	$2(x+20)$	$3(x+8)$	$9(x+12)$	$6x$
$8(x+20)$	$7(x+8)$	$x+12$	$4x$	$9(x+18)$	$6(x+6)$	$2(x+26)$	$3(x+14)$
$9(x+6)$	$6(x+18)$	$2(x+14)$	$3(x+26)$	$8(x+8)$	$7(x+20)$	x	$4(x+12)$
$6(x+14)$	$9(x+26)$	$3(x+6)$	$2(x+18)$	$7x$	$8(x+12)$	$4(x+8)$	$x+20$
$7(x+12)$	$8x$	$4(x+20)$	$x+6$	$6(x+26)$	$9(x+14)$	$3(x+18)$	$2(x+6)$
$4(x+26)$	$x+14$	$7(x+18)$	$8(x+6)$	$3(x+12)$	$2x$	$6(x+20)$	$9(x+8)$
$3x$	$2(x+12)$	$6(x+8)$	$9(x+20)$	$4(x+14)$	$x+26$	$7(x+6)$	$8(x+18)$

表5

21	75	45	102	11	92	152	217
23	44	248	133	50	39	153	30
200	91	17	20	207	66	62	57
99	138	38	93	104	175	5	68
114	279	33	46	35	136	52	25
119	40	100	13	186	171	69	22
124	19	161	88	51	10	150	117
15	31	78	235	76	31	77	184

其和为720, 其积为 2.1876597×10^{14}

$9(x+b_9)$	$12(x+b_{11})$	$13(x+b_{13})$	$16(x+b_{15})$	$7(x+b_1)$	$6(x+b_3)$	$8(x+b_5)$	$2(x+b_7)$
$10(x+b_6)$	$16(x+b_4)$	$14(x+b_2)$	$15x$	$(x+b_{14})$	$5(x+b_{12})$	$4(x+b_{10})$	$x+b_8$
$16(x+b_{11})$	$13(x+b_9)$	$12(x+b_{15})$	$9(x+b_{13})$	$2(x+b_3)$	$3(x+b_1)$	$6(x+b_7)$	$7(x+b_5)$
$15(x+b_4)$	$11(x+b_6)$	$11x$	$10(x+b_2)$	$x+b_{12}$	$4(x+b_{14})$	$5(x+b_8)$	$8(x+b_{10})$
$4(x+b_{13})$	$x+b_{15}$	$8(x+b_9)$	$5(x+b_{11})$	$14(x+b_5)$	$15(x+b_7)$	$10(x+b_1)$	$11(x+b_3)$
$3(x+b_2)$	$2x$	$7(x+b_6)$	$6(x+b_4)$	$13(x+b_{10})$	$16(x+b_8)$	$9(x+b_{14})$	$12(x+b_{12})$
$5(x+b_{15})$	$8(x+b_{13})$	$x+b_{11}$	$4(x+b_9)$	$11(x+b_7)$	$10(x+b_5)$	$15(x+b_3)$	$14(x+b_1)$
$6x$	$7(x+b_2)$	$2(x+b_4)$	$3(x+b_6)$	$12(x+b_8)$	$9(x+b_{10})$	$16(x+b_{12})$	$13(x+b_{14})$
$2(x+b_8)$	$8(x+b_{10})$	$6(x+b_{12})$	$7(x+b_{14})$	$16x$	$13(x+b_2)$	$12(x+b_4)$	$9(x+b_6)$
$x+b_7$	$4(x+b_5)$	$5(x+b_3)$	$8(x+b_1)$	$15(x+b_{15})$	$14(x+b_{13})$	$11(x+b_{11})$	$10(x+b_9)$
$7(x+b_{10})$	$6(x+b_8)$	$3(x+b_{14})$	$2(x+b_{12})$	$9(x+b_2)$	$12x$	$13(x+b_6)$	$16(x+b_4)$
$8(x+b_5)$	$5(x+b_7)$	$4(x+b_1)$	$x+b_9$	$10(x+b_{13})$	$11(x+b_{15})$	$14(x+b_9)$	$15(x+b_{11})$
$11(x+b_{12})$	$10(x+b_{14})$	$15(x+b_8)$	$14(x+b_{10})$	$5(x+b_4)$	$8(x+b_6)$	x	$4(x+b_2)$
$12(x+b_3)$	$9(x+b_1)$	$16(x+b_7)$	$13(x+b_5)$	$6(x+b_{11})$	$7(x+b_9)$	$2(x+b_{15})$	$3(x+b_{13})$
$14(x+b_{14})$	$15(x+b_{12})$	$10(x+b_{10})$	$11(x+b_8)$	$4(x+b_6)$	$x+b_4$	$8(x+b_2)$	$5x$
$13(x+b_1)$	$16(x+b_9)$	$9(x+b_5)$	$12(x+b_7)$	$3(x+b_9)$	$2(x+b_{11})$	$7(x+b_{13})$	$6(x+b_{15})$

对于任意的 x, a_i, b_i , 各行各列两个对角线的积相等, 且为 $(16!)x(x+b_1)(x+b_2)\dots(x+b_{15})$.

表 6

38	93	99	138	17	116	200	259
29	68	296	175	62	57	207	66
248	133	23	44	261	102	74	75
153	174	50	111	152	217	11	92
150	333	51	58	77	184	76	31
161	88	124	19	222	225	87	34
148	35	203	136	69	22	186	171
33	46	114	279	100	37	119	232

其和为960, 其积为 4.9319367×10^{15}

参 考 文 献

- [1] (美) C.L.Liu著, 魏万迪译, “组合数学导论”, pp.225—257, 四川大学出版社 1987
- [2] 周振黎、泰康, “组合数学” pp.4—7, pp.246—275, 重庆大学出版社, 1986
- [3] 梁宗巨, “世界数学史简编”, 辽宁人民出版社

(编辑: 姚国安)

表 7

2010	2255	2926	3195	1736	1105	900	229	1971	2676	2951	3696	1421	1242	633	430
2079	2724	2899	3504	1505	1266	621	406	2130	2299	2870	3015	1832	1125	884	217
3075	2814	2343	2090	221	868	1145	1800	3568	2847	2772	2043	414	609	1290	1477
3632	3003	2628	2007	422	645	1218	1449	3135	2982	2211	2050	225	916	1085	1788
627	426	1407	1230	2925	3664	1953	2652	908	231	1752	1115	2954	3225	2030	2277
892	219	1848	1135	2898	3045	2150	2321	615	402	1491	1254	2873	3472	2061	2700
1278	1463	410	603	2748	2025	3536	2821	1155	1816	223	876	2365	2110	3105	2842
1095	1784	227	924	2233	2070	3165	3010	1206	1435	418	639	2804	1989	3600	2977
203	828	1055	1720	3285	3122	2497	2310	434	663	1350	1603	3216	2665	2508	1917
458	675	1326	1519	3408	2717	2460	1809	215	844	1035	1624	3465	3178	2453	2190
1656	1015	860	211	2230	2409	3234	3405	1547	1302	687	450	1843	2412	2769	3344
1575	1374	651	442	1881	2556	2613	3280	1688	1075	812	207	2270	2541	3066	3345
2532	1935	3248	2691	1362	1617	438	669	2475	2290	3255	3094	1045	1704	201	820
2431	2170	3435	3150	1025	1608	213	836	2484	1827	3440	2743	1338	1533	462	681
2795	3376	1863	2436	693	454	1561	1314	3206	3375	2210	2387	852	209	1640	1005
3038	3315	2250	2519	804	205	1672	1065	2639	3312	1899	2580	657	446	1539	1386

其和为29376, 其积为 $(161) \times 201 \times 203 \cdots \times 231$.

THE COMPILING OF EIGHTH AND SIXTEENTH ORDER MAGIC SQUARE

Zhang Changcai

ABSTRACT This paper introduces how to compile the mathematic model of eighth and sixteenth order magic square and how to change twofold magic square problem into onefold magic square problem. The twofold magic square is made by solving liner equations and thus the difficulty of making the twofold magic square is reduced.

KEY WORDS onefold magic square, twofold magic square, mathematic pattern of magic square