重庆建筑工程学院学报
第11卷第3期 JOURNAL OF CHONGQING INSTITUTE OF Vol.11 No.3
1989年 9 月 ARCHITECTURE AND ENGINEERING Sept. 1989

Hilbert空间上非凸规划的Kuhn-Tucker鞍点定理

蒲 云 O221·2

（基础科学系）

摘 要 本文主要讨论了Hilbert空间上带不等式约束的非凸规划的解与Lagrange式鞍点之间的关系。利用闭包函数作为工具，在此条件，存在$(x_0, \mu_0) \notin$ conv(epif)，且在$x_0 \in domf$条件下，证明了Lagrange式存在鞍点是该非凸规划有解的必要条件。

关键词 Lagrange式、鞍点、闭包函数、正常函数、不等式约束、希尔伯特空间

前 言

本文主要研究了问题（NCP）解的条件。这里，

$$\text{(NCP)}\qquad \begin{array}{c} \min f(x) \\ g_i(x) \geq 0 \\ i=1,\cdots,m \end{array}$$

f：$H \to (-\infty, +\infty]$，g_i：$H \to (-\infty, +\infty]$为任意正常函数；H为－Hilbert空间。

在（NCP）中，我们仅考虑不等式约束的情况。因为，对于等式约束可化为二不等式约束来处理。当f、g_i（$i=1, \cdots, m$）均为正常凸函数时，此问题变成了凸规划问题。对于凸规划问题，解与Lagrange式鞍点之间存在一个著名的定理——Kuhn-Tucker鞍点定理。

本文，利用非凸函数的闭包函数作为工具，在条件：存在（x_0，μ_0）$\notin$ conv(epif)，且$x_0 \in domf$下，证明了（NCP）的解与Lagrange式鞍点之间，也存在Kuhn-Tucker鞍点定理。

1 预备定理

对H上的函数f，定义$domf$为：

$$domf = \{x \in H \mid f(x) < +\infty\}$$

本文1988年8月25日收到。

称为 f 的有效域。

若$dom f\neq\phi$，则称函数 f 为正常的。

$epi f=\{(x,\ \mu)|\ x\in H,\ \mu\in R,\ f(x)\leq\mu\}$称为 f 的上图象。包含epif的所有凸集的交记为conv(epif)，称为epif的凸包。

定理1 [2] 设C是H的闭凸子集，且$x_0\notin C$，那么，存在$x^*\neq 0$使得

$$\langle x,\ x^*\rangle\leqslant\langle x^0,\ x^*\rangle-\langle x^*,\ x^*\rangle,\ \forall x\in C \tag{1}$$

若定理1中，去掉闭的假设，则结论（1）式变为：

$$\langle x,\ x^*\rangle\leq\langle x^0,\ x^*\rangle,\ \forall x\in C,\ x^*\neq 0 \tag{2}$$

定理2 设f：$H\to(-\infty,+\infty]$为一非凸函数,$H_0=\{x\,|\exists\mu\in R,$使$(x,\mu)\in \mathrm{conv}(\mathrm{epif})\}$。令

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}\inf\{\mu\,|(x,\mu)\in\mathrm{Conv}(\mathrm{epif})\}, & 当x\in H_0,\\ +\infty & 当x\notin H_0\end{cases}$$

那么，$\tilde{f}$ 是被 f 所控制的最大的凸函数。它称为 f 的凸包函数。

证：对任意$\lambda\in[0,1]$和$x,\ y\in H$，若$(\{x\}\cup\{y\})\notin H_0$，显然有（由定义）

$$\tilde{f}(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda\tilde{f}(x)+(1-\lambda)\tilde{f}(y)$$

若$x,\ y\in H_0$，由定义

$$\tilde{f}(\lambda x+(1-\lambda)y)=\inf\{\mu\,|(\lambda x+(1-\lambda)y,\ \mu)\in\mathrm{conv}(\mathrm{epif})\}$$

$$\begin{aligned}\lambda\tilde{f}(x)+(1-\lambda)\tilde{f}(y)&=\lambda\inf\{\mu_1\,|(x,\mu_1)\in\mathrm{conv}(\mathrm{epif})\}\\&\quad+(1-\lambda)\inf\{\mu_2\,|(y,u_2)\in\mathrm{conv}(\mathrm{epif})\}\\&=\inf\{\lambda\mu_1+(1-\lambda)\mu_2\,|(x,\mu_1),\ (y,\mu_2)\in\mathrm{conv}(\mathrm{epif})\}\end{aligned}$$

因为conv(epif)为一凸集，因此

$$\lambda(x,\ \mu_1)+(1-\lambda)(y,\ \mu_2)=(\lambda x+(1-\lambda)y,\ \lambda\mu_1+(1-\lambda)\mu_2)\in\mathrm{conv}(\mathrm{epif})$$

即，

$$\lambda\mu_1+(1-\lambda)\mu_2\in\{\mu\,|(\lambda x+(1-\lambda)y,\ \mu)\in\mathrm{conv}(\mathrm{epif})\}$$

因此，

$$\tilde{f}(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda\tilde{f}(x)+(1-\lambda)\tilde{f}(y)$$

假定$g(x)$为一凸函数且对任意x属于H有$g(x)\leq f(x)$。当$x\notin H_0$时，显然有，$g(x)\leq\tilde{f}(x)$。当$x\in H_0$时。因为$(x,\ \mu)\in\mathrm{conv}(\mathrm{epif})$ 当且仅当$(x,\ \mu)$能被表示为凸组合

$$(x,\mu)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x_i,\ \mu_i)=\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i x_i,\ \lambda_i\mu_i),\ m\in N$$

这里，$(x_i,\ \mu_i)\in\mathrm{epif}$（即，$f(x_i)\leq\mu_i$），$N$为自然数集。

所以

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f(x_i)\leq\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\mu_i=\mu$$

$$g(x)\leq\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g(x_i)\leq\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f(x_i)\leq\mu$$

即

$$g(x)\leq\tilde{f}(x)$$

故$\widetilde{f}$是被f所控制的最大的凸函数。

定理3 设f：$H\to(-\infty,\ +\infty]$为一非凸函数，若存在$(x_0,\ \mu_0)\notin \mathrm{conv(epif)}$，且$x_0\in domf$为非极值点。那么，存在$x^*\neq 0$和$\beta\in R$，使得，

$$\langle x,\ x^*\rangle-\beta\leq f(x),\ \forall x\in H$$

证 因为conv(epif)为一凸集，且$(x_0,\ \mu_0)\notin \mathrm{conv(epif)}$。则存在$\mu_1<\mu_0$使得$(x_0,\mu_1)\notin Cl\mathrm{conv(epif)}$，由定理1得，存在$(x^*,\ \mu^*)\neq 0$，使得

$$\langle(x^*,\ \mu^*),\ (x,\ \mu)\rangle<\langle(x_0,\ \mu_1),\ (x^*,\ \mu^*)\rangle,\ \forall(x,\ \mu)\in Cl\mathrm{conv(epif)}$$

即

$$\langle x,\ x^*\rangle+\mu\mu^*<\langle x_0,\ x^*\rangle+\mu_0\mu^*,\ \forall(x,\ \mu)\in Cl\mathrm{conv\ (epif)} \qquad (3)$$

因为$x_0\in domf$，所以对任意$\mu\geq f(x_0)$，$(x_0,\ \mu)\in \mathrm{epif}$。令$x=x_0$，则（3）式变为

$$\mu\mu^*<\mu_1\mu^* \qquad (4)$$

因为，$\mu_1<\mu_0$，$(x_0,\mu_0)\notin \mathrm{conv\ (epif)}$，所以$\mu_1<f(x_0)\leq\mu$。由(4)式及$\mu^*\neq 0$得，$\mu^*<0$，不妨设$\mu^*=-1$，则（3）式变为：

$$\langle x,\ x^*\rangle\leq\langle x_0,\ x^*\rangle-\mu_1+\mu,\ \forall(x,\ \mu)\in Cl\mathrm{conv(epif)} \qquad (5)$$

令$\beta=\langle x_0,\ x^*\rangle-\mu_1$，则(5)式变为：

$$\langle x,\ x^*\rangle-\beta\leq\mu,\ \forall(x,\ \mu)\in Cl\mathrm{conv(epif)}$$

当$x\in domf$时，令$\mu=f(x)$，则

$$\langle x,\ x^*\rangle-\beta\leq f(x)$$

当$x\notin domf$，显然，$\langle x,\ x^*\rangle-\beta\leq f(x)$

故

$$\langle x,\ x^*\rangle-\beta\leq f(x),\ \forall x\in H$$

由x_0之非极值性得$x^*\neq 0$

定义1 设f：$H\to(-\infty,\ +\infty]$。集合$L(f)$定义为

$L(f)=\{(y,\ \beta)\mid(y,\ \beta)\in H\times R,\ 且\langle x,\ y\rangle-\beta\leq f(x),\ \forall x\in H\}$，称为$f$的支撑集。

定义2 设f：$H\to(-\infty,\ +\infty]$，若$L(f)\neq\phi$，定义$\mathrm{Cl}f(x)=\sup\limits_{(y,\beta)\in L(f)}\{\langle x,y\rangle-\beta\}$，若$L(f)=\phi$，定义$\mathrm{Cl}f(x)=-\infty$，Cl$f$称为$f$的闭包函数。

由定义2和定理3易得下面的结论。

定理4 设f：$H\to(-\infty,\ +\infty]$为一正常函数若存在$(x_0,\ \mu_0)\notin \mathrm{conv\ (epif)}$，且$x_0\in domf$，则Cl$f$也为一正常函数。

定理5 设f：$H\to(-\infty,\ +\infty]$为任意一函数。则Clf为被f所控制的最大的凸的下半连续函数。

证：(i) 若$L(f)\neq\phi$，由定义2，对每一$\lambda\in[0,\ 1]$和$x,\ z\in H$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cl}f(\lambda x+(1-\lambda)z)&=\sup_{(y,\beta)\in L(f)}\{\langle\lambda x+(1-\lambda)z,\ y\rangle-\beta\}\\&\leq\lambda\sup_{(y,\beta)\in L(f)}\{\langle x,\ y\rangle-\beta\}+(1-\lambda)\sup_{(y,\beta)\in L(f)}\{\langle z,y\rangle-\beta\}\\&=\lambda\mathrm{Cl}f(x)+(1-\lambda)\mathrm{Cl}f(z)\end{aligned}$$

若$x_n\to x$且$\mathrm{cl}f(x_n)\to l\in[\infty,\ +\infty]$。因为$(x_n,\ y)-\beta\leqslant \mathrm{cl}f(x_n$。$\forall(y,\ \beta)\in L(f)$，所以$(x,\ y)-\beta\leqslant\lim\mathrm{Cl}f(x_n)$，$\forall(y,\ \beta)\in L(f)$

故

$$\mathrm{Cl}f(x)=\sup_{(y,\beta)\in L(f)}\{\langle x,\ y\rangle-\beta\}\leq \lim \mathrm{Cl}f(x_n)$$

所以，$\mathrm{Cl}f(x)$为一凸的下半连续函数。由$\widetilde{f}$的定义及定理2得

$$\mathrm{Cl}\widetilde{f}(x)\leq \mathrm{Cl}f(x)\leq \widetilde{f}(x)\leq f(x),\quad \forall x\in H$$

因为$\widetilde{f}(x)$为一凸函数，由凸函数闭包函数的性质知，$\mathrm{Cl}\widetilde{f}(x)$是被$\widetilde{f}$所控制的最大的下半连续函数。因此，$\mathrm{Cl}\widetilde{f}=\mathrm{Cl}f$。

假定$g(x)\leqslant f(x)$，$\forall x\in H$，且$g(x)$是一个凸的下半连续函数，由定理2知，$g(x)\leq \widetilde{f}(x)$。从而由闭包函数之定义得，$g(x)\leqslant \mathrm{Cl}\widetilde{f}(x)=\mathrm{Cl}f(x)$，$\forall x\in H$

(ii) 若$L(f)=\phi$，则$\mathrm{Cl}f\equiv-\infty$，结论自然成立。

定理6 [4] 设C_1和C_2是R^n中两个互不相交的非空凸集。则存在一个超平面分离它们。

2 Kuhn-Tucker 鞍点定理

定义3 设H_1，H_2为Hilbert空间，$D\subset H_1$，$E\subset H_2$。$\Phi(x,\ y)$是定义在$H_1\times H_2$上的实值函数，其定义域为$D\times E$。一个点$(\overline{x},\ \overline{y})\in D\times E$称为$\Phi$的鞍点，如果对每个$x\in D$和$y\in E$有

$$\Phi(\overline{x},\ y)\leqslant\Phi(\overline{x},\ \overline{y})\leqslant\Phi(x,\overline{y})$$

定义4 对(NCP)中的函数f，g_i $(i=1,\ \cdots,\ m)$定义$L(x,\ \lambda)$为：

$$L(x,\ \lambda)=f(x)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x)$$

称为(NCP)的$Lagrange$函数。

定义5 非凸规划(NCP)称为是强相容的，如果存在点$x_0\in H$，使得

$$g_i(x_0)>0,\quad i=1,\ \cdots,\ m$$

定理7 设f_i：$H\to(-\infty,\ +\infty]$ $(i=1,\ \cdots,\ m)$为任意正常函数；且所有f_i的有效域的交集非空。若f_i $(i=1,\ \cdots,\ m)$满足下列条件：

(i) 存在$(x_i,\ \mu_i)\notin \mathrm{Conv}(\mathrm{epi}f_i)$，且$x_i\in \mathrm{dom}f_i$ $(i=1,\ \cdots,\ m)$；

(ii) 存在$i_0(1\leqslant i_0\leqslant m)$，使得任意$x\in H$，有 $\mathrm{Cl}f_{i_0}(x)\geq 0$

那么，存在不全为零的非负数α_1，$\cdots$，α_m使得对一切$x\in H$，均有

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(x)\geq 0$$

证 令$M=\{y:\ y\in R^m,\ \exists x\in H$使$\mathrm{Cl}f_i(x)<y_i,\ i=1,\ \cdots,\ m\}$，由条件(i)和定理4、定理5得，$\mathrm{Cl}f_i(x)$为正常凸函数。所以$M\neq\phi$。由条件(ii)得，对每个$y\in M$至少有一个正分量。进一步可以证明$M$为一凸集，设$y^1$，$y^2\in M$及$x^1$，$x^2\in H$使得，

$$\mathrm{Cl}f_i(x^1)<y_i^1,\quad \mathrm{Cl}f_i(x^2)<y_i^2,\ i=1,\ \cdots,\ m$$

因为对任意λ：$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，有$\lambda x^1+(1-\lambda)x^2\in H$，且

$$\begin{aligned}\mathrm{Cl}f_i(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2&\leqslant\lambda \mathrm{Cl}f_i(x^1)+(1-\lambda)\mathrm{Cl}f_i(x^2)\\&<\lambda y_i^1+(1-\lambda)y_i^2\end{aligned}$$

$$(i=1, \cdots, m)$$

所以 $y^1+(1-\lambda)y^2 \in M$，故M为一凸集。又令

$$N=\{y, \ y \in R^m, \ y \leqslant 0\}$$

显然N为一凸集，且$M \cap N=\phi$。故M、N为二非空的互不相交的凸集。由定理6，必存在一个超平面来分离它们。这样，便存在一个非零向量$a \in R^m$及一个实数b，使对任何$y \in M$，有

$$\sum_{i=1}^{m} d_i y_i \geq b \qquad (6)$$

而对任何$y \in N$，有

$$\sum_{i=1}^{m} d_i y_i \leqslant b \qquad (7)$$

若有某个$a_k<0$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$，令$y=(0, \cdots, 0, y_k, 0, \cdots, 0) \in N-\{0\}$，则（7）变成

$$a_k y_k \leqslant b \qquad (8)$$

由于$y_k<0$，所以$a_k y_k>0$可任意大，此时（8）式不成立。故对所有$i=1, \cdots, m$，均有$a_i \geq 0$，且$b \geq 0$（因为$0 \in N$），则对每个$x \in \bigcap_{i=1}^{m} dom f_i$，令$y$由下式定义：

$$y_i=\mathrm{Cl}f_i(x)+\varepsilon, \ i=1, \cdots, m \qquad (\varepsilon>0)$$

于是$y \in M$，且

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \mathrm{Cl}f_i(x)+\sum_{i=1}^{m} a_i \varepsilon \geq b \geq 0$$

令 $\varepsilon \to 0^+$得，

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \mathrm{Cl}f_i(x) \geq 0$$

对一切$x \in H$成立。

由定理5知，$f_i(x) \geq \mathrm{Cl}f_i(x)$，从而$a_i f_i(x) \geq a_i \mathrm{Cl}f_i(x)$，所以

$$\sum_{i=1}^{m} a_i f_i(x) \geq 0$$

引理1 设f：$H \to (-\infty, +\infty]$为一正常函数。那么，$\inf f=\inf \mathrm{cl} f$。

证：(i) 若$\inf f=-\infty$，由$\mathrm{Cl}f(x) \leqslant f(x)$得，$\inf \mathrm{Cl}f=-\infty$，所以结论成立。

(ii) 若$\inf f=-\infty$，且$\inf f \neq \inf \mathrm{Cl}f$，因为

$$\mathrm{Cl}f(x) \leqslant f(x), \ \forall x \in H$$

所以有，

$$\inf \mathrm{Cl}f<\inf f$$

从而，存在 $\varepsilon<0$，使得

$$\inf \mathrm{Cl}f+\varepsilon<\inf f$$

令$\beta=-(\inf \mathrm{Cl}f+\varepsilon)$，$y=0$，那么

$$\langle x, y\rangle-\beta=\inf \mathrm{Cl}f+\varepsilon<\inf f \leqslant f(x), \ \forall x \in H$$

即，$(y, \beta) \in L(f)$；从而有

$$\langle x, y\rangle-\beta \leqslant \mathrm{Cl}f(x), \ \forall x \in H$$

故，

$$\inf\{\langle x, y\rangle - \beta\} \leqslant \inf \mathrm{Cl} f(x) = \inf \mathrm{Cl} f$$

又因为

$$\langle x, y\rangle - \beta = -\beta = \inf \mathrm{Cl} f + \varepsilon, \quad \forall x \in H$$

所以
$$\inf\{\langle x, y\rangle - \beta\} = \inf \mathrm{Cl} f + \varepsilon$$

从而

$$\inf \mathrm{Cl} f + \varepsilon \leqslant \inf \mathrm{Cl} f$$

矛盾！故
$$\inf f = \inf \mathrm{Cl} f$$

定理8　(Kuhn-Tucker鞍点定理) 设 $f: H \to (-\infty, +\infty]$, $g_i: H \to (-\infty, +\infty]$ $(i=1, \cdots, m)$ 为正常函数；且f、g_i $(i=1, \cdots, m)$ 满足下列条件：

(i) 存在 $(x, \mu) \notin \mathrm{Conv}(\mathrm{epi} f)$，$(x_i, \mu_i) \notin \mathrm{Conv}(\mathrm{epi} g_i)$，且$x \in \mathrm{dom} f$，$x_i \in \mathrm{dom}(g_i)$ $(i=1, \cdots, m)$.

(ii) (NCP) 是强相容的。

如果x^*是 (NCP) 的解，那么必存在向量$\lambda^* = (\lambda_1^*, \cdots, \lambda_m^*)^T \geq 0$ 使得，

$$L(x^*, \lambda) \leqslant L(x^*, \lambda^*) \leqslant L(x, \lambda^*)$$

且
$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0 \quad (i=1, \cdots, m)$$

证：由定理4得，$\mathrm{Cl} f$, $\mathrm{Cl} g_i$ $(i=1, \cdots, m)$ 均为正常凸函数。令

$$F(x) = \begin{cases} f(x) - f(x^*), & \text{当} g_i(x) \geq 0 \quad (i=1, \cdots, m) \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

则$F(x) \geq 0$，$\forall x \in H$，且为正常函数；从而$\mathrm{Cl} F$为一非负的正常凸函数。因为，对任意函数f，

$$\mathrm{dom} f = \mathrm{dom}(-f)$$

所以

$$(\mathrm{dom} F) \bigcap_{i=1}^{m} \mathrm{dom}(-g_i) \neq \phi$$

因为对一切$x \in H$均有

$$\mathrm{Cl} F(x) \geqslant 0$$

所以，由定理7得，存在不全为0的非负数α_0, α_1, $\cdots$, α_m，使得一切$x \in H$有

$$\alpha_0 F(x) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (-g_i(x)) \geqslant 0 \tag{9}$$

从而对所有的可行解x：$g_i(x) \geqslant 0$ $(i=1, \cdots, m)$

$$\alpha_0 (f(x^*) - f(x)) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i g_i(x) \leqslant 0 \tag{10}$$

即

$$\alpha_0 f(x^*) \leqslant \alpha_0 f(x) - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i g_i(x) \tag{11}$$

若$\alpha_0 > 0$，则 (11) 式变为

$$f(x^*)\leqslant f(x)-\sum_{i=1}^{m}\frac{\alpha_i}{\alpha_0}g_i(x) \tag{12}$$

令 $\lambda_i^*=\frac{\alpha_i}{\alpha_0}$，则（12）式可写成

$$f(x^*)\leqslant L(x,\ \lambda^*) \tag{13}$$

由于$g_i(x^*)\geqslant 0$，所以任意$\lambda\in R^m$，$\lambda\geqslant 0$ 有

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x^*)\geqslant 0$$

故，

$$f(x^*)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x^*)=L(x^*,\ \lambda)\leqslant f(x^*) \tag{14}$$

又在（13）中以x^*代x，（14）中以λ^*代入得，

$$L(x^*,\ \lambda^*)\leqslant f(x^*)\leqslant L(x^*,\ \lambda^*)$$

所以

$$f(x^*)=L(x^*,\ \lambda^*)=f(x^*)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^* g_i(x^*) \tag{15}$$

从而

$$\lambda_i^* g_i(x^*)=0 \qquad (i=1,\ \cdots,\ m) \tag{16}$$

由（13）、（14）、（15）式得，存在向量$\lambda^*\geqslant 0$ 使得，

$$L(x^*,\ \lambda)\leqslant L(x^*,\ \lambda^*)\leqslant L(x,\ \lambda^*)$$

且，

$$\lambda_i^* g_i(x^*)=0$$

所以当$\alpha_0>0$ 时，结论成立。

若$\alpha_0=0$，则

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i g_i(x)\leqslant 0$$

而（NCP）是强相容的，所以存在$x_0\in H$使得，

$$g_i(x_0)>0 \quad (i=1,\ \cdots,\ m)$$

而$\alpha_i\geqslant 0$，且不全为零，所以

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i g_i(x_0)>0$$

矛盾！故$\alpha_0>0$，结论为真。

参 考 文 献

〔1〕 R.T.Rockaffellar, Convex Analysis, Princeton Univ Press (1970)

〔2〕 J.R.Aubin, Applied Function Analysis, Wilay (1979)

〔3〕 J.R.Aubin, Applied Abstract Analysis, Wilay (1979)

〔4〕 M.阿佛里耳，非线性规划一分析与方法，上海科学技术出版社 (1977)

〔5〕 V.Burbu and Th.Precupanu, Convexity and optimization in Banach Spaces, Bucuvesti, Româ nia International Publishers

（编辑：姚国安）

KUHN-TUCKER SADDLE POINL THEOREM OF NONCONVEX PROGRAMMING ON HILBERT SPACE

Pu Yun

ABSTRACT *In this paper, the relationship between the solution of nonconvex* programming with inequality constraints on Hilbert space and the saddle point of Lagrange function are discussed. Under this condition, there exists $(x_0, u_0) \notin \text{conv}(\text{epif})$, and $x_b \in \text{domf}$, it is proved that the existence of saddle point in Lagrange function is the necessary condition for the existence of solution in nonconvex programming。

KEY WORDS Lagrange functon, saddle point, closure function, proper function, Hilbert space, inequality constraints