

有张力的弹性支承单侧单向 加肋矩形板的柱面弯曲问题*

孙仁博 玉玳瑜
 (建工系)

摘要 本文从工程实际问题出发,以严密的解析解计算结果为基础,建立起有张力的单侧单向加肋矩形板的柱面弯曲基本方程式。结合工程问题,给出了板的弹性支承在特定变形条件下的解答。并通过算例,与有关文献进行了比较,表明文中结果是可行的。

关键词 张力,加肋板,矩形板,柱面弯曲

引言

在[1]中,按照文[2]所建立的单侧单向加肋板理论,讨论了顺肋边简支单向加肋板的弯曲问题,并将所得结果用于计算正多边形容器。对于 x (简支)向的长度 a ,远大于 y (顺

表1 按[1]计算的某单向加肋矩形板的挠度 w (mm)

$x(m)$ \ $y(m)$	0	0.583	1.167	1.750	2.333	2.917	3.500
0	0	0	0	0	0	0	0
1.7	5.48	5.26	4.65	3.76	2.76	1.92	1.56
3.4	5.70	5.49	4.90	4.04	3.08	2.27	1.92
5.1	5.66	5.45	4.88	4.03	3.09	2.28	1.94
6.8	5.64	5.43	4.86	4.01	3.06	2.26	1.91
8.5	5.63	5.43	4.85	4.00	3.05	2.25	1.90
10.2	5.64	5.43	4.86	4.01	3.06	2.26	1.91
11.9	5.66	5.45	4.88	4.03	3.09	2.28	1.94
13.9	5.70	5.49	4.90	4.04	3.08	2.27	1.92
15.3	5.48	5.26	4.65	3.76	2.76	1.92	1.56
17.0	0	0	0	0	0	0	0

注: $x=0$ 和 $x=17m$ 端为简支端, $y=0$ 为短边中点, $y=3.5m$ 为正多边形角点。

本文1988年9月18日收到。

* 本文属国家教委高校科学技术基金资助及建设部城乡建设科技发展基金资助课题。

肋) 向的长度 b 的板来说, 计算表明, 在气体内压作用下, 正多形容器的各边, 除筒支端附近外, 基本呈柱面变形。为了说明问题, 表 1 列出了按〔1〕计算的一组挠度数据。

基于上述, 为了便于工程应用, 对于 x 向长度远大于 y 向长度的单向加肋矩形板, 当荷载沿 x 向无变化时, 可以按柱面弯曲模型考虑。这样处理, 不仅计算简便, 还能计入纵力与弯曲的耦合, 弥补文〔1〕难以考虑的因素。

1 基本方程式

取加肋板的外荷载、位移及内力的正方向如图 1 示。

在柱面弯曲时, 板的内力和位移分量为 y 的函数, 而且位移分量 u 应等于零。这样一来, 由〔2〕可以得到单侧单向加肋板呈柱面弯曲时的弹性方程式为:

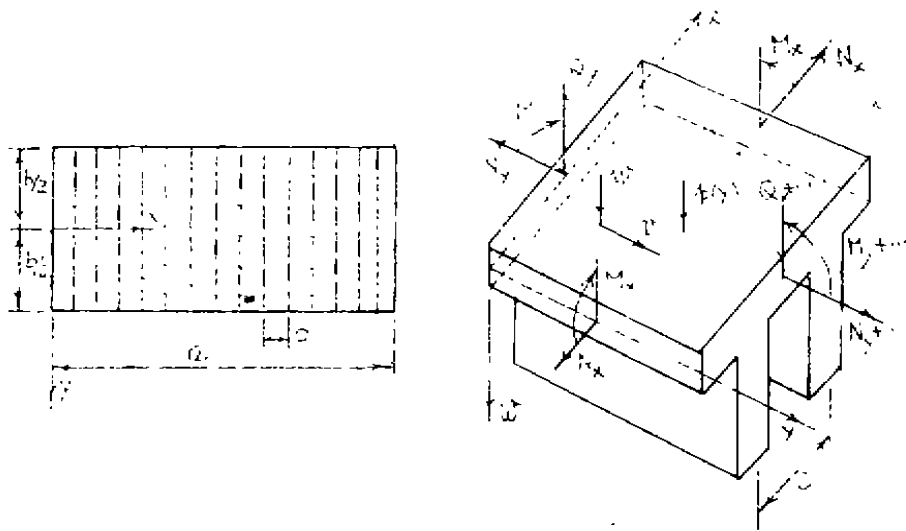


图 1 柱面弯曲加肋板单元体受力图

$$\begin{aligned}
 N_x &= K\mu \frac{dv}{dy} \\
 N_y &= K \left(A_{13} \frac{dv}{dy} - \frac{A_{12}}{B_3} \frac{d^2w}{dy^2} \right) \\
 M_x &= -\mu D \frac{d^2w}{dy^2} \\
 M_y &= -D \left(A_6 \frac{d^2w}{dy^2} - B_3 \frac{dv}{dy} \right) \\
 Q_y &= -D \frac{d}{dy} \left(A_6 \frac{d^2w}{dy^2} - B_3 \frac{dv}{dy} \right)
 \end{aligned} \tag{1}$$

其余各内力均为零, 式中

$$\left. \begin{aligned}
 K &= \frac{Eh}{1-\mu^2} & D &= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \\
 A_{12} &= 1+B_4 & A_{12} &= (1-\mu^2)B_2B_3 \\
 A_{13} &= 1+(1-\mu^2)B_1 \\
 [B_1, B_2, B_3, B_4] &= \left[\frac{A}{ch}, \frac{S}{ch}, \frac{ES}{cD}, \frac{EI}{cD} \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

h 为板厚， A ， S ， I 分别为一个肋截面的截面积，对 x 轴的静面矩及惯性矩； c 为加劲肋的间距； E 、 μ 为材料的弹性模量及泊松比。

当计入张力的影响后，则除了导出(1)₅式已利用过的平衡方程式外，在我们的情况下，还剩下两个平衡方程式：

$$\begin{aligned}
 \frac{dN_y}{dy} &= 0 \\
 \frac{dQ_y}{dy} + N_y \frac{d^2w}{dy^2} + q &= 0
 \end{aligned}$$

将(1)式中的 N_y ， Q_y 引入后，得到

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dN_y}{dy} &= 0 \\
 A_{13} \frac{dv}{dy} - \frac{A_{12}}{B_3} \frac{d^2w}{dy^2} &= \frac{N_y}{K} \\
 DA_8 \frac{d^4w}{dy^4} - N_y \frac{d^2w}{dy^2} - DB_3 \frac{d^2v}{dy^2} &= q
 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

从(3)_{2,3}中消去位移分量 v ，并注意到(3)₁式后，便可以将(3)式改写为：

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dN_y}{dy} &= 0 \\
 A_{13} \frac{dv}{dy} - \frac{A_{12}}{B_3} \frac{d^2w}{dy^2} &= \frac{N_y}{K} \\
 DD_4 \frac{d^4w}{dy^4} - A_{13} N_y \frac{d^2w}{dy^2} &= A_{13} q \\
 D_4 &= A_8 A_{13} - A_{12}
 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

这就是单侧单向加肋矩形板柱面弯曲的基本微分方程式。

2 正多边形容器侧板柱面弯曲的解

作为以上结果的应用，我们来研究正多边形容器，在气压作用下侧板呈柱面弯曲时的计算问题。设容器边长为 b ，气压集度为 p ，如图2示。由整体平衡，不难求得：

$$N_y = N = \frac{pb \cos \alpha}{2 \sin \alpha} \quad (5)$$

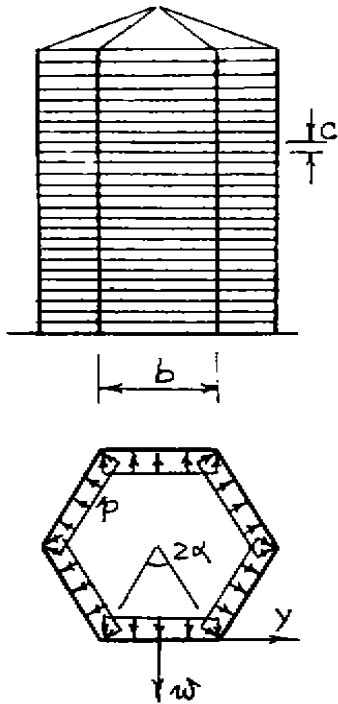


图2 容器示意图

显然, (5)式是满足(4)₁式的。代(5)式入(4)₃式, 得

$$DD_4 \frac{d^4 w}{dy^4} - A_{13} N \frac{d^2 w}{dy^2} = A_{13} p$$

它的解为

$$w = C_1 \text{Shky} + C_2 \text{chky} + C_3 y + C_4 - \frac{p}{2N} y^2 \quad (6)$$

式中

$$k = \sqrt{\frac{A_{13} N}{DD_4}} \quad (7)$$

代(5)、(6)式入(4)₂式, 得

$$v = \frac{1}{A_{13}} \left\{ \frac{A_{12}}{B_3} \left(C_1 k \text{chky} + C_2 k \text{shky} + C_3 - \frac{p}{N} y \right) + \frac{N}{K} y + C_5 \right\} \quad (8)$$

(6)、(8)式中的积分常数, 由边界条件确定。根据变形的对称性, 挠度 w 应为 y 的偶函数, y 向位移分量 v 应为 y 的奇函数, 可见

$$C_1 = C_3 = C_5 = 0$$

另外, 对图2示结构来说, 侧板在 $y = \pm b/2$ 的转角应等于零, 且各角棱应沿内角平分线方向变位。这样一来, 又可以得到两个条件:

$$\left(\frac{dw}{dy} \right)_{y=\pm b/2} = 0 \pm (v)_{y=\pm b/2} = (w)_{y=\pm b/2} \text{tga}$$

将(6)、(8)式代入上式, 并注意 $C_1 = C_3 = C_5 = 0$, 可以求得剩下的两个积分常数 C_2, C_4 分别为:

$$\left. \begin{aligned} C_2 &= \frac{\text{tga}}{k \text{sh}t} \\ C_4 &= \frac{Nb}{2KA_{13} \text{tga}} - \left(\frac{b}{4} - \frac{\text{coth}t}{k} \right) \text{tga} \\ t &= \frac{kb}{2} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

进而由(1)式, 求得板的内力。汇总以上结果, 则板的内力及位移分量计算公式为:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{\mu}{A_{13}} \left[\frac{A_{12} K}{B_3} \left(C_2 k^2 \text{chky} - \frac{p}{N} \right) + N \right] \\ N_y &= N = \frac{pb}{2} \text{ctga} \\ M_x &= -D\mu \left(C_2 k^2 \text{shky} - \frac{p}{N} \right) \\ M_y &= -\frac{D}{A_{13}} \left[D_4 \left(C_2 k^2 \text{chky} - \frac{p}{N} \right) - \frac{B_3 N}{K} \right] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$Q_y = -\frac{pb}{2} \frac{shky}{shl}$$

$$v = \frac{1}{A_{13}} \left[\frac{A_{12}}{B_3} \left(C_2 kshky - \frac{py}{N} \right) + \frac{N}{K} y \right]$$

$$w = C_2 chky + C_4 - \frac{p}{2N} y^2$$

3 算例及其分析

现在来计算截面如图3示加肋板的柱面弯曲。它是图2示正多边形容器的各侧壁。计算用参数为：加肋板尺寸 $b=7m$ ， $c=0.81m$ ， $h=6mm$ ， $h_1=0.244m$ ， $h_2=34mm$ ， $h_3=79mm$ ，气体内压 $p=7kPa$ ，材料弹性模量及泊松比分别为 $E=210GPa$ ， $\mu=0.3$ 。

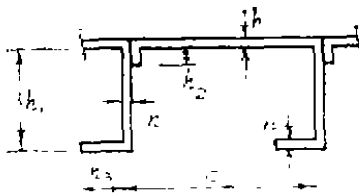


图3 加肋板截面形状

计算结果列于表2内。为了便于比较，还在表2中列出了用相同数据按严密的加肋板理论的计算结果。

为了考察本文(10)式结果沿板内的误差情况，在表3中，列出了 w ， N_y ， M_y 及 Q_y 各值相对于文献[1]的误差百分数。

从以上数值计算结果，可以看出：

(一)、本文(10)式的计算结果与文[1]的相对误差，除挠度 w 及靠近顺肋边支承附近的 N_y 外，一般均在 -4% 以内。挠度 w 的相对误差，除容器的角棱(图2)附近外，一般在 $-5\% \sim -7\%$ 之间。虽然容器角棱附近挠度 w 的相对误差较大，但它们的绝对值是很小的，不是控制结构变形的关键部位。

(二)、文[3]曾对图2示容器的侧壁计算进行了研究，该文章将各侧壁按简支于角棱上的拉弯筒支梁考虑。我们重新推导了该文各式，其正确结果应为：

$$w = \frac{px(b-x)}{2N} - \frac{2p}{k^2N} \frac{sh \frac{kx}{2} sh \frac{k(b-x)}{2}}{ch \frac{kb}{2}}$$

$$M = \frac{px(b-x)}{2} - Nw$$

$$Q = \frac{p}{k} \frac{shk \left(\frac{b}{2} - x \right)}{ch \frac{kb}{2}}$$

$$N = \frac{pb}{2} ctg\alpha, \quad k^2 = \frac{N}{EI}$$
(11)

式中 $x = \frac{b}{2} + y$ ， EI 为梁的抗弯刚度，其余符号与前面相同，但(11)式中的内力、位移是

表2 算例结果及其比较

y (m)	计算方法		σ	τ	M_x	M_y	C_y	N_y
			(m \cdot mm)	(mm)	(N \cdot m/m)	(kN \cdot m/m)	(kN/m)	(kN/m)
0	本 文	(10)式	0	5.36	1.459	20.291	0	151.69
		(12)式	0	3.67 (5.61)	0	20.82	0	154.69
	文献[1]	0	5.63	1.503	20.873	0	158.49	
	文献[8]	0	17.53	0	46.963	0	154.69	
0.583	本 文	(10)式	19.64	5.16	1.338	19.130	-3.981	154.69
		(12)式	—	3.47 (5.41)	0	19.66	-3.978	154.69
	文献[1]	23.38	5.43	1.376	19.681	-1.083	158.34	
	文献[8]	—	16.92	0	45.862	-3.777	154.69	
1.167	本 文	(10)式	43.86	4.60	0.976	15.643	-7.979	154.69
		(12)式	—	2.90 (4.84)	0	16.18	-7.975	154.69
	文献[1]	51.31	4.85	0.994	16.109	-8.167	157.89	
	文献[8]	—	15.22	0	42.553	-7.571	154.69	
1.750	本 文	(10)式	77.25	3.79	0.370	9.815	-12.012	154.69
		(12)式	—	2.07 (4.01)	0	10.35	-12.01	154.69
	文献[1]	88.34	4.06	0.358	10.154	-12.250	157.22	
	文献[8]	—	12.48	0	37.022	-11.400	154.69	
2.333	本 文	(10)式	124.44	2.87	-0.483	1.619	-16.098	154.69
		(12)式	—	1.14 (3.08)	0	2.159	-16.09	154.69
	文献[1]	139.11	3.05	-0.533	1.817	-16.333	156.41	
	文献[8]	—	8.89	0	29.244	-15.279	154.69	
2.917	本 文	(10)式	190.12	2.10	-1.584	-8.980	-20.254	154.69
		(12)式	—	0.34 (2.28)	0	-8.437	-20.25	154.69
	文献[1]	208.31	2.25	-1.677	-8.902	-20.417	155.63	
	文献[8]	—	4.61	0	19.183	-19.227	154.69	
3.500	本 文	(10)式	279.03	1.76	-2.941	-22.028	-24.500	154.69
		(12)式	—	0 (1.94)	0	-21.48	-24.50	154.69
	文献[1]	300.74	1.90	-3.075	-22.002	-24.499	155.03	
	文献[8]	—	0	0	6.796	-23.261	154.69	

注：表中文献[1]的值为 $x=8.5\text{m}$ 截面上的值（见表1注）；括号中的 τ 值用于(12)式。

表3 本文式(10)结果与〔1〕的相对误差 (%)

x (m)	y(m) 项目	0	0.583	1.167	1.750	2.333	2.917	3.500
1.7	w	- 2.2	- 1.9	- 1.0	+ 0.8	+ 4.0	+ 9.2	+13.0
	N _y	+37.1	+35.9	+32.4	+26.1	+17.5	+ 8.5	+ 2.4
	M _y	+ 3.1	+ 3.5	+ 4.9	+ 9.4	+148.8*	-10.7	- 4.8
	Q _y	0	- 2.3	- 5.8	- 1.8	- 1.3	- 0.7	+ 0.1
3.4	w	- 6.0	- 6.0	- 6.1	- 6.3	- 6.8	- 7.7	- 8.4
	N _y	+ 1.6	+ 1.1	- 0.3	- 2.1	- 3.8	- 4.6	- 4.3
	M _y	- 3.2	- 3.2	- 3.4	- 4.1	-15.0*	+ 1.8	+ 0.5
	Q _y	0	- 2.5	- 2.3	- 1.9	- 1.4	- 0.8	0.0
5.1	w	- 5.3	- 5.4	- 5.6	- 6.0	- 6.8	- 8.1	- 9.0
	N _y	- 3.7	- 3.7	- 3.6	- 3.5	- 3.0	- 2.3	- 1.5
	M _y	- 3.4	- 3.5	- 3.7	- 4.6	-17.0*	+ 2.4	+ 0.7
	Q _y	0	- 2.5	- 2.3	- 1.9	- 1.4	- 0.8	0.0
6.8	w	- 5.0	- 5.0	- 5.2	- 5.5	- 6.1	- 7.1	- 7.7
	N _y	- 3.0	- 2.9	- 2.6	- 2.2	- 1.6	- 1.1	- 0.4
	M _y	- 3.0	- 3.0	- 3.1	- 3.7	-12.7*	+ 1.3	+ 0.3
	Q _y	0	- 2.5	- 2.3	- 1.9	- 1.4	- 0.8	0.0
8.5	w	- 4.8	- 5.0	- 5.2	- 5.3	- 5.9	- 6.7	- 7.3
	N _y	- 2.4	- 2.3	- 2.0	- 1.6	- 1.1	- 0.6	- 0.2
	M _y	- 2.8	- 2.8	- 2.9	- 3.3	-10.9*	+ 0.8	+ 0.1
	Q _y	0	- 2.5	- 2.3	- 1.9	- 1.4	- 0.8	0.0

注：带*号各项的值均为较小的量

指梁中性轴处的值。如果将(11)式的值换成图1示对应的值后，用前述数据算出的结果也列于表2内。由表2看出，按文〔3〕得到的挠度w，弯矩M_y均较文〔1〕的值偏大一倍以上。其中w_{max}/b=1/400，此值已超出了该结构的工艺要求，与已成结构的实际不符。可见，按文〔3〕的方法来处理图2示容器侧壁的计算问题是欠妥的。

(三)、作为进一步的简化，把图2示容器按正多边形闭台框架考虑。分为考虑轴向变形与不考虑轴向变形对挠度w的影响两种情况，分析表明，两者的内力相同，挠度不同，其计算公式见(12)式，

$$w = \frac{px(b-x)}{2N} - \frac{pb}{Nk} \frac{\operatorname{sh} \frac{kx}{2} \operatorname{sh} \frac{k(b-x)}{2}}{\operatorname{sh} \frac{kb}{2}} \quad (\text{不考虑轴向变形})$$

$$w = \frac{px(b-x)}{2N} + \frac{pb}{2EA} \operatorname{ciga} - \frac{pb}{Nk} \frac{\operatorname{sh} \frac{kx}{2} \operatorname{sh} \frac{k(b-x)}{2}}{\operatorname{sh} \frac{kb}{2}} \quad (\text{考虑轴向变形})$$

$$M = \frac{p}{k^2} \left(1 - \frac{kb \cdot \operatorname{ch} \frac{k(b-2x)}{2}}{2 \operatorname{sh} \frac{kb}{2}} \right)$$

$$Q = \frac{pb}{2} \frac{\operatorname{sh} \frac{k(b-2x)}{2}}{\operatorname{sh} \frac{kb}{2}}$$
(12)

式中的 A 为框架的截面积, 其余符号与 (11) 式相同。由表 2 知, 按 (12) 式求得对应于图 1 的内力值, 也与文 [1] 较吻合; 而挠度 w , 仅按 (12)₂ 式计算时才较吻合, 若按 (12)₁ 式计算时, 其值偏小且幅度很大。可见, 用 (12) 式按考虑轴向变形的情形来分析图 2 示结构, 从实用的角度看是可行的, 它比 (10) 式更简单。不足之处是无法估计内力 N_x , M_x 及位移 v 的影响, 不过在文 [3] 中也同样存在这个问题。

(四)、在表 2 中, 只比较了主要的内力及位移。至于其余内力, 按 (12), (13) 式计算时, 均等于零。按 (10) 式计算时, 也只能补充 N_x 值。由文 [1] 计算表明(用表 1 的数据), Q_x 一般小于 1 N/m , 仅在 x 向支承处达 1.09 kN/m ; M_{xy} 一般小于 $92.5 \text{ mN} \cdot \text{m/m}$, 仅在 x 向支承处达 $15.2 \text{ N} \cdot \text{m/m}$; N_{xy} 一般小于 8.7 kN/m , 仅在 x 向支承的角点处可达 18.48 kN/m ; 至于 N_x 在 $y=0$ 附近各截面均为受压, 最大值达 -24.36 kN/m , 在 $y=b/2$ 附近各截面均为受拉, 最大值达 62.75 kN/m 。而按本文 (10) 式得到的值, 从 $y=0 \sim b/2$, N_x 为 $13.45 \sim 72.79 \text{ kN/m}$ 。可见, 按 (10) 式分析图 2 示容器时, 所算得的 N_x 是不够满意的。不过从应力的角度看, 按文 [1] 的 N_x 算出的应力介于 $-4.06 \sim 10.46 \text{ MPa}$, 按 (10) 式为 $2.242 \sim 12.132 \text{ MPa}$, 它们均远小于材料的屈服强度 240 MPa , 对设计来说是不起控制作用的。

综上所述, 从工程实用的角度出发, 可以用加肋矩形板柱面弯曲的公式 (10), 或更简单些, 可以用闭合正多边形框架, 考虑轴向变形对挠度响影的公式 (12), 来分析图 2 示容器结构, 在气压作用下的计算问题。这样做, 能保证对设计起控制作用的内力及位移, 具有工程上要求的精度, 计算也很简单。

参 考 文 献

- [1] 孙仁博, 王玳瑜, 顺肋筒支加肋矩形板的弯曲问题, 工程力学, 6, (1989), 54—65
- [2] 孙仁博, 王玳瑜, 考虑中面应变效应的加肋矩形板的横向弯曲分析解, 重庆建筑工程学院学报, 11, 2(1989), 53—64
- [3] 姜德进, 正多边形干式贮气柜 (M, A, N型) 侧壁板在贮气压力下的内力分析, 特种结构, 3(1986), 9—11
- [4] 卢有杰, 对“正多边形干式贮气柜 (M, A, N型) 侧壁板在贮气压力下的内力分析”一文的商量和补充, 特种结构, 2(1987), 59—60

(编辑: 徐维森)

CYLINDRICAL BENDING PROBLEM OF RECTANGULAR
PLATES STIFFENED ON ONE SIDE ALONG ONE
DIRECTION WITH ELASTIC SUPPORTS AND TENSILE
FORCES

Sun Renbo Wang Daiyu
[Department of Civil Engineering]

ABSTRACT On the basis of the calculated results of accurate analytic solution of stiffened rectangular plates, the general equations of cylindrical bending of the plates with tensile forces are established for engineering practice. Its solution combining with engineering problem is given for the special deformation conditions of elastic supports. In the paper, the numerical example is given and compared with references, it shows that the results are available.

KEY WORDS tension, stiffened plate, rectangular plate, cylindrical bending