重庆建筑工程学院学报
第12卷第1期 JOURNAL OF CHONGQING INSTITUTE OF Vol.12 No.1
1990年3月 ARCHITECTURE AND ENGINEERING March 1990

电容传感器用于水份测量的数学模型

吴文英 蔡文彬
（基础部） （机电系）

摘 要 本文论证了电容传感器用于水份测量的理论数学模型，并应用最小二乘法给出实用的数学模型，然后给出应用实例，说明该数学模型有较高的精度。

关键词 电容传感器，数学模型，水份测量

前 言

水份测量在粮食和油料作物收购、加工部门，建筑工程和制糖等部门，对于保证产品质量有重要的意义。目前市场上所见到的水份测量仪多数是采用电容传感器，并且以电容的变化量与被测物质的水份成线性关系作为依据。实际上这是近似的，从而产生明显的非线性误差。本文将推证电容传感器用于水份测量的数学模型，并用最小二乘法求解适合多种不同物质的实用数学模型，通过大量的实验表明，该数学模型适合多种不同物质和不同形式的电容传感器，并有足够的精确度。数学模型求得后，应用微机进行数据处理就十分方便，这对于智能化仪器的研制是极为有利的。

1 电容传感器用于水份测量的理论数学模型

目前，市场产品中，电容传感器主要有两种形式：平行板式和同心圆式。我们以平行板式电容传感器为例，来推证其用于水份测量的数学模型。

图1为平行板式电容传感器的示意图，设两极板采用厚度为τ足够小的导体制作，并且两极板的距离$d>>\tau$，因而其边缘效应可以忽略。于是：

$$C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r A}{d} \qquad (1)$$

式中：C——电容传感器的电容量；
A——电容传感器极板的面积；
ε_0——真空的介电常数；

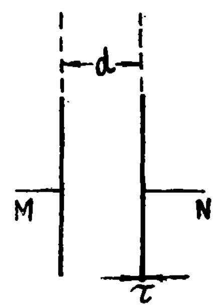

图 1

本文1989年1月8日收到。

ε_r——被测物质的相对介电常数。

设传感器装满不含水某物质，该物质的相对介电常数为ε_1，重度为ρ_1，此时的电容量以C_0表示，则：

$$C_0=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 A}{d} \tag{2}$$

又设传感器装满含水的同一物质，水的相对介电常数为ε_2，重度为ρ_2，则此时的电容量C_{12}为：

$$C_{12}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_{12}A}{d} \tag{3}$$

式(3)中，ε_{12}为该含水物质的等效相对介电常数，若传感器的体积以V表示，则：

$$V=dA \tag{4}$$

传感器装满含水物质时，其体积由两部份组成，不含水的该物质的体积V_1和水的体积V_2，即：

$$V=V_1+V_2 \tag{5}$$

于是此时的该含水物质的总重量G为：

$$G=G_1+G_2=A_1d\rho_1+A_2d\rho_2 \tag{6}$$

式(6)中：G_1——传感器中不含水该物质的重量；

G_2——传感器中水份的重量；

A_1——传感器中不含水该物质占有的等效面积；

A_2——传感器中水占有的等效面积。

因此，这时电容传感器总的电容量C_{12}为：

$$C_{12}=C_1+C_2 \tag{7}$$

而：

$$\begin{cases} C_1=\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_1 A_1}{d} \\ C_2=\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_2 A_2}{d} \end{cases} \tag{8}$$

$$\therefore\quad C_{12}=\frac{\varepsilon_0}{d}(\varepsilon_1A_1+\varepsilon_2A_2)=\frac{\varepsilon_0V}{d}\left(\frac{\varepsilon_1A_1}{V}+\frac{\varepsilon_2A_2}{V}\right)$$

$$=\frac{\varepsilon_0Ad}{d}\left(\frac{\varepsilon_1V_1}{dV}+\frac{\varepsilon_2V_2}{dV}\right)$$

或

$$C_{12}=\frac{\varepsilon_0A}{d}\left(\frac{V_1}{V}\varepsilon_1+\frac{V_2}{V}\varepsilon_2\right) \tag{9}$$

比较式（3）和式（9）可知，传感器装满含水的某物质时的等效介电常数ε_{12}为：

$$\varepsilon_{12}=\frac{V_1}{V}\varepsilon_1+\frac{V_2}{V}\varepsilon_2 \tag{10}$$

式（10）的物理意义十分清楚，由于ε_1、ε_2和V为常数，水份增大时则V_1增大V_2减小，它们

变化量的大小相等，方向相反，而一般有$\varepsilon_1>\varepsilon_2$，因此，物质中水份的变化，反映为等效介电常数变化，即使传感器的电容量随之而变化。

通常说某物质中的水份亦即含水率δ定义为：

$$\delta=\frac{G_2}{G}100\%=\frac{G_2}{G_1+G_2}100\% \tag{11}$$

若δ以小数表示，则有：

$$\delta=\frac{V_2\rho_2}{V_1\rho_1+V_2\rho_2}=\frac{V_2\rho_2}{V_1\rho_1+V_2\rho_2} \tag{12}$$

又由式（9）得：

$$C_{12}=\frac{\varepsilon_0 A}{d}\left[\left(1-\frac{V_2}{V}\right)\varepsilon_1+\frac{V_2}{V}\varepsilon_2\right]$$

或：

$$C_{12}=\frac{\varepsilon_0 A}{d}\left[\frac{V_2}{V}(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\right]+\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 A}{d}$$

$$C_{12}=C_0+\frac{\varepsilon_0 A}{d}\frac{V_2}{V}(\varepsilon_2-\varepsilon_1) \tag{13}$$

或：

$$C_{12}=C_0+\Delta C_{12} \tag{14}$$

式（14）中，ΔC_{12}表示传感器装满含水物质时，相对于传感器装满不含水同一物质电容的变化量，则：

$$\Delta C_{12}=\frac{\varepsilon_0 A}{d}\frac{V_2}{V}(\varepsilon_2-\varepsilon_1)$$

$$\Delta C_{12}=\frac{\varepsilon_0 A}{d}\frac{V_2}{V_1\left(1+\frac{V_2}{V_1}\right)}(\varepsilon_2-\varepsilon_1) \tag{15}$$

由式（13）和式（15）并注意到$\rho_2\approx 1$，则可得：

$$\Delta C_{12}=\frac{\varepsilon_0 A}{d}(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\frac{\delta\rho_1}{1+\delta(\rho_1-1)}$$

或：

$$\Delta C_{12}=C_K\frac{\delta\rho_1}{1+\delta(\rho_1-1)} \tag{16}$$

式（16）中：$C_K=\frac{\varepsilon_0 A}{d}(\varepsilon_2-\varepsilon_1)$，对于一定的传感器及某物质是一个常数，但随被测物质不同而异。由式（16）解得：

$$\delta=\frac{\Delta C_{12}}{C_K\rho_1+(1-\rho_1)\Delta C_{12}} \tag{17}$$

由式（16）和式（17）；因为C_K、ρ_1为常数，故此δ与ΔC_{12}的关系是非线性的，而且随着δ增大非线性更为明显。这就是电容传感器用于水份测量的理论数学模型。

把式(16)用台劳级数展开，并仅取一次项，则有：

$$\Delta C_{12}=C_K\delta\rho_1[1-\delta(\rho_1-1)] \tag{18}$$

$$\Delta C_{12}=C_K\delta\rho_1-C_K\delta^2\rho_1(\rho_1-1)$$

因此，如果把ΔC_{12}与δ的关系按线性来处理，引起的相对误差$M=\delta(\rho_1-1)100\%$。设被测物质为砂子，且$\delta=10\%$，对于砂子$\rho_1=2.5$，则$M=15\%$，可见影响是十分严重的。

令人感兴趣的是，对于不同形式的电容传感器，用于水份测量时，虽然当装满含水物质的等效相对介电常数表达式有所不同，但均可以得到式（16）和式（17）的数学模型，因而具有更普遍的意义。

例如：对于同心圆式的电容传感器，可以证明当其装满含水物质的等效相对介电常数ε_{12}为：

$$\varepsilon_{12}=\frac{H_1}{H}\varepsilon_1+\frac{H_2}{H}\varepsilon_2 \tag{19}$$

而仍有：

$$\begin{cases}\Delta C_{12}=C_K\dfrac{\delta\rho_1}{1+\delta(\rho_1-1)}\\[2ex]\delta=\dfrac{\Delta C_{12}}{C_K\rho_1+(1-\rho_1)\Delta C_{12}}\end{cases} \tag{20}$$

式（19）中：H——同心圆电容传感器的高度；

H_1、H_2——分别为不含水该物质和水的等效高度。

式（19）和式（20）的推导方法与上述相似，不再重复。

2　用最小二乘法确定实用的数学模型

以上我们给出了电容传感器用于水份测量的理论数学模型，如式(16）或式(17）所列。

在式（17）中，若是已知常数C_K和ρ_1之值，则δ就是ΔC_{12}的单值函数，测定ΔC_{12}则可求解得δ,这对于应用微型计算机来数据处理是十分方便的。

但是，由于C_K是$(\varepsilon_2-\varepsilon_1)$的函数，其中$\varepsilon_1$和$\rho_1$是被测物质的相对介电常数和重度，常常是不知道的，而且测定往往又是比较麻烦，特别当我们希望测量多种物质的水份时更为如此，因此，得设法求解实用的数学模型。我们应用最小二乘法来解决此问题。设有：

$$y=f(K_1、K_2、x) \tag{21}$$

式（21）中，K_1、K_2为参变量，y为变量x的非线性函数。为了确定参变量K_1、K_2，我们一一对应地测量x和y，设为：

$$\begin{cases}x_1、x_2\cdots\cdots x\\y_1、y_2\cdots\cdots y_n\end{cases}$$

于是有：

$$\begin{cases}f_1(k_1、k_2、x_1)-y_1=v_1\\f_2(k_1、k_2、x_2)-y_2=v_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\f_n(k_1、k_2、k_n)-y_n=v_n\end{cases} \tag{22}$$

式（22）称为误差方程组。式中的v_1、$v_2\cdots\cdots v_n$称为随机误差，这是测量x和y不可避免地存在误差所至。在此k_1、k_2是所要求的未知数。

由于$y=f(k_1、k_2、x)$是非线性方程，为此用台劳级数展开，并仅取一次项，于是有：

$$\begin{cases} f_1(k_{10}、k_{20}、x_{10})+\left(\frac{\partial f_1}{\partial k_1}\right)_0\Delta k_1+\left(\frac{\partial f_1}{\partial k_2}\right)_0\Delta k_2-y_1=v_1 \\ f_2(k_{10}、k_{20}、x_{20})+\left(\frac{\partial f_2}{\partial k_1}\right)_0\Delta k_1+\left(\frac{\partial f_2}{\partial k_2}\right)_0\Delta k_2-y_2=v_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(k_{10}、k_{20}、x_{n0})+\left(\frac{\partial f_n}{\partial k_1}\right)_0\Delta k_1+\left(\frac{\partial f_n}{\partial k_2}\right)_0\Delta k_2-y_2=v_n \end{cases} \tag{23}$$

令：

$$\begin{cases} a_i=\left(\frac{\partial f_i}{\partial k_1}\right)_0; \quad b_i=\left(\frac{\partial f_i}{\partial k_2}\right)_0, \\ l_i=f_i(k_{10}、k_{20}、x_{i0})-y_i \\ i=1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots n \end{cases} \tag{24}$$

则

$$\begin{cases} a_1\Delta k_1+b_1\Delta k_2+l_1=v_1 \\ a_2\Delta k_1+b_2\Delta k_2+l_2=v_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n\Delta k_1+b_n\Delta k_2+l_n=v_n \end{cases} \tag{25}$$

式（23）～(25）中，k_{10}和k_{20}为k_1,k_2的近似值,可以通过概算求得，Δk_1、Δk_2为k_{10}和k_{20}的修正值。因此

$$\begin{cases} k_1=k_{10}+\Delta k_1 \\ k_2=k_{20}+\Delta k_2 \end{cases} \tag{26}$$

由于k_{10}和k_{20}可以通过式（21）估算得到,因此,在此仅有两个未知数Δk_1和Δk_2,而误差方程(25）是由n个方程组成,因而多余$(n-2)$个方程，于是引出最小二乘法求解Δk_1和Δk_2,其条件是：

$$v_1^2+v_2^2+\cdots\cdots\cdots+v_n^2=\sum_{i=1}^{n}v_n^2=min \tag{27}$$

由式(25）和(27）并令$\sum\limits_{i=1}^{n}v_n^2=Q$则有：

$$Q=\sum_{i=1}^{n}v_i^2=(a_1\Delta k_1+b_1\Delta k_2+l_1)^2+(a_2\Delta k_1+b_2\Delta k_2+l_2)^2 \tag{28}$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+(a_n\Delta k_1+b_n\Delta k_2+l_n)^2。$$

为了求极值，对式(28)求偏导数

$$\frac{\partial Q}{\partial \Delta k_1}=2a_1(a_1\Delta k_1+b_1\Delta k_2+l_1)+2a_2(a_2\Delta k_1+b_2\Delta k_2+l_2)$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+2a_n(a_n\Delta k_1+b_n\Delta k_2+l_n)$$

令
$$\frac{\partial Q}{\partial \Delta k_1}=0\text{，则有：}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a^2\right)\Delta k_1+\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)\Delta k_2+\sum_{i=1}^{n}a_il_i=0 \tag{29}$$

同理：令 $\frac{\partial Q}{\partial \Delta k_2}=0$ 可得：

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)\Delta k_1+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)\Delta k_2+\sum_{i=1}^{n}c_il_i=0 \tag{30}$$

式(29) 和(30) 组成联立方程组，则可求得Δk_1、Δk_2，代入式(26) 则可求得经第一次改正后的k_1'，k_2'，若精确度尚不符合要求，则把 $k_1'k_2'$作为k_{10}、k_{20}重复上列计算，直到符合要求为止。实践表明，此法收敛相当快，只要测量有足够的精确度，一般经1～2次计算则可。
于是对电容传感器用于水份测量的数学模型式(17)，可以表示为：

$$\delta=\frac{\Delta C_{12}}{k_1+k_2\Delta C_{12}} \tag{31}$$

只要精确测定某物质的几个不同的δ及相应的ΔC_{12}，则可依上述最小二乘法求得k_1和k_2，从而得到实用的数学模型。

3　计算举例

我们曾用上述方法确定小麦、大米、稻谷、玉米的水份测量的数学模型，均得到相当好的结果，下面以小麦为例来，说明求k_1、k_2的具体方法。

3.1　采样测试

取水份不同的7个小麦试样，用105℃恒重法测量得δ_1、δ_2……δ_7。为了提高测量精确度，把ΔC_{12}转换为频率进行测量，相应为F_1、F_2……F_7，具体数值如表1所列。

表 1

	1	2	3	4	5	6	7
δ %	10.77	11.00	11.50	12.51	14.13	16.12	16.94
F(Hz)	221.6	228.6	276.9	330.0	420.0	687.8	877.0

3.2　概算k_{10}、k_{20}

取表1中两对δ、F代入式(31) 联解得k_{10}、k_{20}，例如：

$$10.77=\frac{F_1}{k_1+k_2F_1}=\frac{221.6k_2}{k_1+221.6k_2} \tag{a}$$

$$14.13=\frac{F_5}{k_1+k_2F_5}=\frac{420.0}{k_1+420.0} \tag{b}$$

求解得$k_1=k_{10}=10.36$，　　$k_2=k_{20}=0.0461$

3.3　列表计算Δk_1、Δk_2

应用k_{10}和k_{20}之值代入式(31)求解得δ_{10}、δ_{20}……δ_{70}

则：

$$\begin{cases} l_1 = \delta_{10} - \delta_1 = 10.77 - 10.77 = 0 \\ l_2 = \delta_{20} - \delta_2 = 10.94 - 11.00 = -0.06 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ l_i = \delta_{70} - \delta_7 = 17.27 - 16.94 = +0.33 \end{cases}$$

$$a_i = \left(\frac{\partial \delta_i}{\partial k_1}\right)_0 = -\frac{\delta_{i0}^2}{F_i}$$

$$b_i = \left(\frac{\partial \delta_i}{\partial k_2}\right)_0 = -\delta_{i0}^2 \quad i = 1、2、\cdots 7$$

全部计算在表2中进行：

表2 计算Δk_1、Δk_2，$k_{10} = 10.36$；$k_{20} = 0.0461$

F_i	δ_{i0}	a_i	b_i	l_i	a_i^2	a_ib_i	a_il_i	b_i^2	b_il_i
221.6	10.77	-0.5234	-115.99	0	0.2740	60.71	0	13453.7	0
228.6	10.94	-0.5236	-119.68	-0.06	0.2741	62.66	+0.0314	14323.3	+7.1808
276.9	11.97	-0.5174	-143.28	+0.47	0.2678	74.14	-0.2432	20529.2	-67.3416
330.0	12.90	-0.5043	-166.41	+0.39	0.2543	83.92	-0.1967	27692.2	-64.8999
420.0	14.13	-0.4754	-199.66	0	0.2260	94.91	0	39864.1	0
687.8	16.35	-0.3887	-267.32	+0.23	0.1511	103.90	-0.0894	71460.0	-61.4836
877.0	17.27	-0.3401	-289.25	+0.33	0.1157	98.37	-0.1122	83665.6	-95.4525
				Σ	1.563	578.61	-0.6101	270988.1	-282.0

因而列方程组

$$\begin{cases} 1.563\Delta k_1 + 578.61\Delta k_2 = 0.6101 \\ 578.61\Delta k_1 + 270988.1\Delta k_2 = 282.0 \end{cases}$$

求解得： $\Delta k_1 = +0.02435$； $\Delta k_2 = 0.0009886$，

$\therefore$ $k_1 = k_{10} + \Delta k_1 = 10.38$；

$k_2 = k_{20} + \Delta k_2 = 0.0471$，

以此处的k_1、k_2作为k_{10}、k_{20}再进行一次计算Δk_1、Δk_2，如表3所列：

表3 $k_{10} = 10.38$，$k_{20} = 0.0471$

F_i	δ_{i0}	a_i	b_i	l_i	a_i^2	a_ib_i	a_il_i	b_i^2	b_il_i
221.6	10.64	-0.5109	-113.21	-0.13	0.2610	57.84	+0.066	12816.5	+14.72
228.6	10.81	-0.5112	-116.86	-0.19	0.2613	59.74	+0.097	13656.3	+22.20
276.9	11.82	-0.5046	-139.71	+0.32	0.2 [illegible]	70.49	-0.161	19518.9	-44.71
330.0	12.73	-0.4911	-162.05	+0.22	0.2411	79.58	-0.108	26260.2	-35.65
420.0	13.92	-0.4613	-193.77	-0.21	0.2128	89.40	+0.097	37546.8	+40.69
687.8	16.08	-0.3759	-258.57	-0.04	0.1413	97.21	+0.015	66858.4	+10.34
877.0	16.97	-0.3284	-287.98	+0.03	0.1078	94.56	-0.010	82932.4	-8.64
				Σ	1.4799	548.82	-0.004	259589.5	-1.05

列得方程组：

$$\begin{cases} 1.4799\Delta k_1 + 548.82\Delta k_2 = 0.004 \\ 548.82\Delta k_1 + 259589.5\Delta k_2 = 1.05 \end{cases}$$

解得：$\Delta k_1 = +0.00557$；$\Delta k_2 = -0.00000773$，

因此，Δk_1和Δk_2已足够小，

则把$k_1 = 10.39$，$k_2 = 0.0471$作为最后值。

于是用该电容传感器测量小麦水份的实用数学模型为：

$$\delta = \frac{F}{10.39 + 0.047F} \tag{32}$$

由表3中l_i一栏之值，可以求得应用式(32)的标准差$\sigma = 0.20\%$，平均误差$\beta = 0.16\%$，可见，有相当高的精确度。我们曾经应用本法对稻谷、小麦、大米、玉米等进行试验，共测试近400个数据，标准差小于0.3%，说明本法是正确的，并有足够的精确度。

当试样品种不多时，应用一般具存贮数据功能的计算器来计算表2、表3的数据，已十分方便。如果品种较多，可编制专门的程序，在计算机上进行计算，更为便利。

4 结束语

电容传感器具有结构简单、反应迅速等优点，应用本文提出的测量水份的数学模型，不仅可以提高测量精确度，而且该数学模型适用多种不同结构的电容传感器，不同品种的被测物质仅是k_1、k_2之值不同而已，而数学模型的表达式是一致的，这对于构成智能化仪器提供很大的方便，并成功地应用在智能水份测量仪中。

参 考 文 献

〔1〕蔡文彬：应用微机的砂子含水率测量仪的研究，重庆建工学院学报，1986,3

〔2〕严钟豪、谭祖根：非电量电测技术，机械出版社，1983,6 （编辑：刘家凯）

MATHEMATICAL MODEL OF CAPACITANCE SENSOR FOR MOISTURE MEASUREMENT

Wu Wenying

(Department of Natural Science)

Cai Wenbin

(Department of Mechanical and Electrical Engineering)

ABSTRACT This paper presents a theoretical mathematical model of capacitance sensor for moisture measurement. The practical mathematical model is provided using least squares theory, an applied example shows higher accuracy of the model.

KEY WORDS capacitance sensor, mathematical model, moisture measurement