重庆建筑工程学院学报
第12卷第1期 JOURNAL OF CHONGQING INSTITUTE OF Vol.12 No.1
1990年 3月 ARCHITECTURE AND ENGINEERING March 1990

修正的Burgers模型及其对于硬化混凝土的应用

吴礼贤 彭小芹

(建材系)

摘 要 本文通过引入一指数函数对Burgers流变模型中的粘性元件进行修正。结果表明修正的Burgers模型能更好地描述硬化混凝土的徐变行为。采用修正的Burgers模型推导的徐变公式计算值与试验结果比较吻合。

关键词 Burgers模型，混凝土，徐变，指数函数

前 言

水泥混凝土是一种多相混合物，从加水拌和开始即具有随时间、温度、湿度以及受力状态而出现弹、粘、塑性演变的特点。水泥混凝土凝结硬化，实质上是从粘塑性向粘弹性发展的过程。对于新拌混凝土的流变性能，以Bingham模型描评最为成功；而对于硬化混凝土，目前多用Burgers模型来描述[1,2,3]。值得注意的是，Burgers模型虽然可定性地描述硬化混凝土的徐变行为以及卸载后的变形行为，但由Burgers模型导出的徐变公式与实验数据拟合性差，不能应用于预测混凝土徐变。本文通过引入一指数函数对Burgers模型中的粘性元件进行修正，导出了符合混凝土徐变规律的徐变方程。

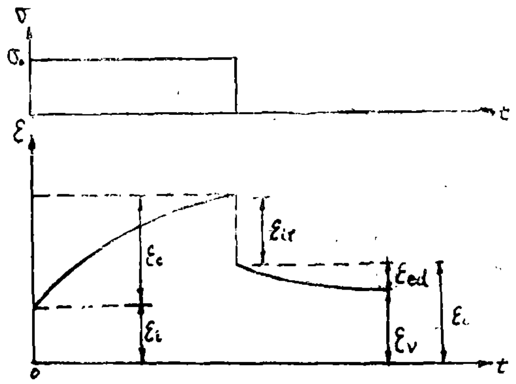
1 Burgers模型

混凝土是粘弹性材料，在长期荷载作用下产生徐变。硬化混凝土在不变应力作用下的徐变曲线及卸载后应变恢复情况如图1所示。

J.M.Burgers认为，硬化混凝土的恢复性徐变 ε_{ed} 可用Kelvin模型表达，非恢复性徐变可用Maxwell模型表达[2]。因此，将Kelvin模型与Maxwell模型串联成图2，则可表达混凝土的徐变行为。该模型称为Burgers模型，其结构公式为：

$$B_u = H - N - (H/N) = M - K \qquad (1)$$

本文1988年6月22日收到。



ε_i—瞬时应变 ε_{ir}—瞬时恢复 ε_{ed}—恢复性徐变
ε_v—非恢复性徐变 ε_c—徐变

图1 硬化混凝土的徐变曲线及卸载后的应变恢复情况

Burgers 模型的流变方程为

$$\sigma+\left(\frac{\lambda_1}{E_1}+\frac{\lambda_2+\lambda_1}{E_2}\right)\dot{\sigma}+\frac{\lambda_1\lambda_2}{E_1E_2}\ddot{\sigma}$$

$$=\lambda_1\dot{\varepsilon}+\frac{\lambda_1\lambda_2}{E_2}\ddot{\varepsilon} \quad (2)$$

当$\sigma=\sigma_0$=常数时，得到应变方程为

$$\varepsilon=\sigma_0\left[\frac{1}{E_1}+\frac{t}{\lambda_1}+\frac{1}{E_2}\left(1-e^{-(E_2/\lambda_2)t}\right)\right] \quad (3)$$

式中，t 为持荷时间

当 $t=t_1$ 时卸荷，则应变为

$$\varepsilon=\sigma_0\left[\frac{t_1}{\lambda}+\frac{1}{E_2}(1-e^{-(E_2/\lambda_2)t_1})e^{-(E_2/\lambda_2)(t-t_1)}\right] \ (t\geq t_1) \quad (4)$$

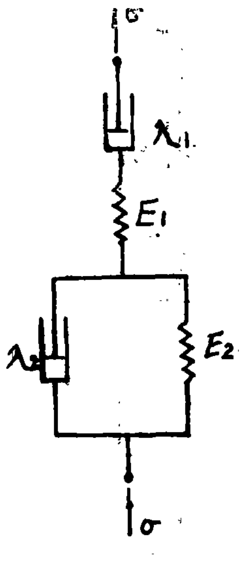


图2 Burgers 模型

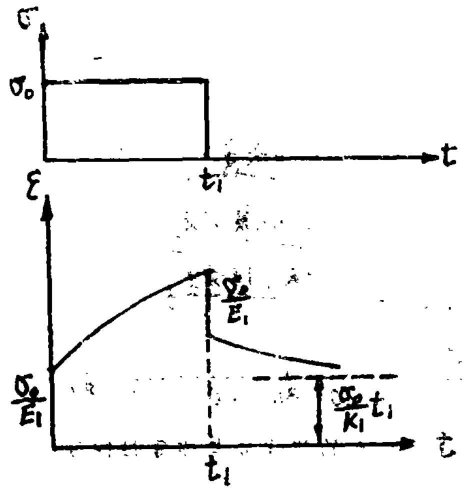


图3 Burgers 体应力及应变曲线

应力及应变随时间变化规律如图3。

(3)式中，第一项为瞬时变形，第二项为非恢复性徐变，第三项为可恢复性徐变。因此，徐变方程应为

$$\varepsilon_c=\sigma_0\left[\frac{t}{\lambda_1}+\frac{1}{E_2}(1-e^{-(E_2/\lambda_2)t})\right] \quad (5)$$

当$t\to\infty$时，$\varepsilon_c\to\infty$，这与混凝土徐变试验情况不符。混凝土徐变一般早期较大，一年可达极限徐变的76%左右[3]，以后则慢慢趋近一个极限值。

Burgers 模型与实际情况不符合的根本原因在于，假设 Maxwell 粘性元件在荷载作用下的粘度系数为常数与实际情况不符合。

2　修正的 Burgers 模型

混凝土的徐变分为恢复性徐变和非恢复性徐变。恢复性徐变约在加荷后两个月趋于稳定，而非恢复性徐变则在相当长的时间内仍继续增加[3]。如图 4 所示。

从图 4 看出，非恢复性徐变 ε_v 并不象 Burgers 模型预测的那样。按照 Burgers 模型：

$$\varepsilon_v = \frac{\sigma_0 t}{\lambda_1} \tag{6}$$

式中，$\lambda_1 = 2\eta$（η 为粘性常数），即 ε_v 与 t 呈直线关系，这显然与与实际情况不符合。

从图 4 看出，随 t 增加，$\frac{d\varepsilon_v}{dt}$ 由大到小，后来，逐渐趋于一常数。因此，用一指数函数 $\lambda_1(t)$ 代替 λ_1 将更符合实际。

设　$\lambda_1(t) = ae^{bt}$，　则　$\frac{1}{\lambda_1(t)} = \frac{1}{a}e^{-bt}$　(7)

通过这种改造后的 Burgers 模型称为修正的 Burgers 模型。见图 5 。

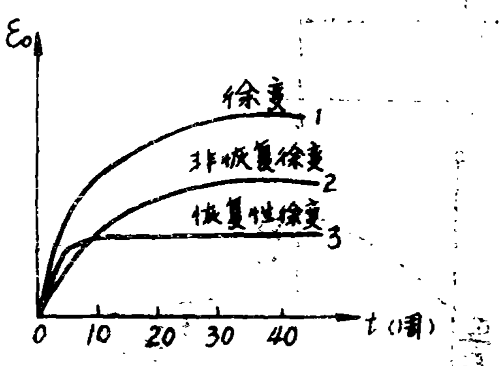


图 4　混凝土的非恢复与恢复性徐变

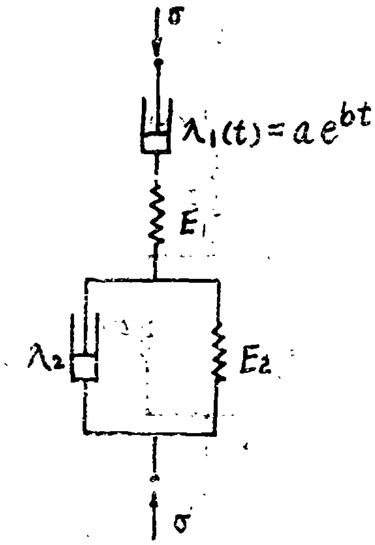


图 5　修正的 Burgers 模型

现在来推导修正的 Burgers 模型的流变方程。设 Maxwell 模型（已作修正）和Kelvin模型的应变分别为 ε_1 和 ε_2。它们的和就是修正的 Burgers 模型的应变 ε。由于是串联，所受应力均为 σ。

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\sigma}{\lambda_1(t)} + \frac{\dot{\sigma}}{E_1} = \dot{\varepsilon}_1 \\ &\sigma = E_2\varepsilon_2 + \lambda_2\dot{\varepsilon}_2 \\ &\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

将 $\frac{1}{\lambda_1(t)}=\frac{1}{a}e^{-bt}$ 代入(8)式，并从中消去 ε_1 和 ε_2，则得：

$$\frac{E_2-\lambda_2 b}{a}e^{-bt}\sigma+\left(\frac{E_2}{E_1}+1+\frac{\lambda_2}{a}e^{-bt}\right)\dot{\sigma}+\frac{\lambda_2}{E_1}\ddot{\sigma}=E_2\dot{\varepsilon}+\lambda_2\ddot{\varepsilon} \tag{9}$$

设 $\frac{E_2-\lambda_2 b}{a}=q_1$，$\frac{E_2}{E_1}+1=q_2$，$\frac{\lambda_2}{a}=q_3$，$\frac{\lambda_2}{E_1}=q_4$，

则 $$q_1e^{-bt}\sigma+q_2\dot{\sigma}+q_3e^{-bt}\dot{\sigma}+q_4\ddot{\sigma}=E_2\dot{\varepsilon}+\lambda_2\ddot{\varepsilon} \tag{10}$$

(9)式或(10)式便是修正的 Burgers 模型的流变方程。

3 对于硬化混凝土的应用

假设硬化混凝土是修正的 Burgers 体。为求解徐变方程，让应力在 $t=0$ 时快速加荷后即保持为常量 σ_0，持荷时间 $t=t_1$ 时卸荷。即修正的 Burgers 体的应力按下列规律变化：

$$\sigma=\begin{cases}0, & t<0\\ \sigma_0, & 0<t<t_1\\ 0, & t<t_1\end{cases} \tag{11}$$

当 $t<0$，$\varepsilon=0$。

当 $0<t<t_1$ 时，为了表示瞬时加载，可引进一个单位阶梯函数 $\Delta(t)$，其定义为：

$$\Delta(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases} \tag{12}$$

则应力 $\sigma=\sigma_0\Delta(t)$ (13)

σ、$\dot{\sigma}$、$\ddot{\sigma}$ 的拉普拉斯变换为：

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}&=\frac{\sigma_0}{S}\\ \overline{\dot{\sigma}}&=S\overline{\sigma}-\sigma(O^-)=S\frac{\sigma_0}{S}-0=\sigma_0\\ \overline{\ddot{\sigma}}&=S^2\overline{\sigma}-S\sigma(O^-)-\dot{\sigma}(0^-)=S\sigma_0\end{aligned} \tag{14}$$

应变 ε 的拉普拉斯变换为 $\overline{\varepsilon}$，ε 的导数的拉普拉斯变换为：

$$\begin{aligned}\overline{\dot{\varepsilon}}&=S\overline{\varepsilon}-\varepsilon(0^-)=S\overline{\varepsilon}\\ \overline{\ddot{\varepsilon}}&=S^2\overline{\varepsilon}-S\varepsilon(0^-)-\dot{\varepsilon}(0^-)=S^2\overline{\varepsilon}\end{aligned} \tag{15}$$

对修正的 Burgers 模型的流变方程（即式(10)）两边进行拉普拉斯变换得：

$$q_1\frac{\sigma_0}{S+b}+q_2\sigma_0+q_3\sigma_0+q_4S\sigma_0=E_2S\overline{\varepsilon}+\lambda_2S^2\overline{\varepsilon} \tag{16}$$

$$\therefore\quad \overline{\varepsilon}=\sigma_0\left[\frac{q_1}{(E_2S+\lambda_2S^2)(S+b)}+\frac{q_2+q_3}{E_2S+\lambda_2S^2}+\frac{q_4}{E_2+\lambda_2S}\right] \tag{17}$$

对（17）式作拉氏逆变换得

$$\varepsilon=\sigma_0\left[\frac{q_1}{E_2 b}(1-e^{-bt})-\frac{q_1/E_2}{E_2/\lambda_2-b}(e^{-bt}-c^{-(E_2/\lambda_2)t})\right.$$

$$\left.+\frac{q_4}{\lambda_2}e^{-(E_2/\lambda_2)t}+\frac{q_2+q_3}{E_2}(1-e^{-(E_2/\lambda_2)t})\right] \tag{18}$$

将 q_1、q_2、q_3 和 q_4 代入（18）式并整理，则

$$\varepsilon=\sigma_0\left[\frac{1}{E_1}+\frac{1}{ab}(1-e^{-bt})+\frac{1}{E_2}(1-e^{-(E_2/\lambda_2)t})\right] \tag{19}$$

将（19）式与(3)式比较，发现两式仅第二项不同，即非恢复性徐变不同。由式(19)得出的非恢复性徐变 $\varepsilon_v=\frac{\sigma_0}{ab}(1-e^{-bt})$，与实际情况较符合。

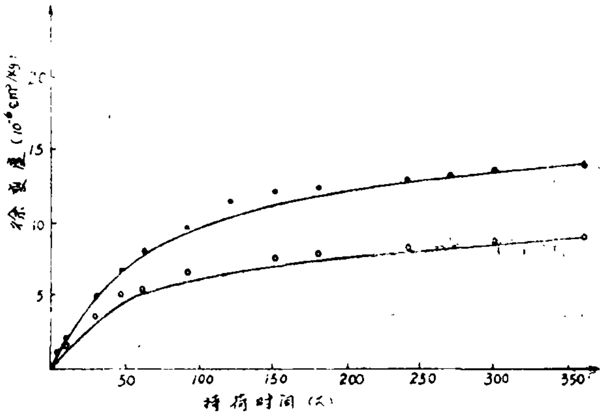
从（19）式中除去第一项(瞬时弹性变形)，则得到修正的 Burgers 模型的徐变方程为：

$$\varepsilon_c=\sigma_0\left[\frac{1}{ab}(1-e^{-bt})+\frac{1}{E_2}(1-e^{-(E_2/\lambda_2)t})\right] \tag{20}$$

当 $t\to\infty$ 时，$\varepsilon_c=\frac{\sigma_0}{ab}+\frac{\sigma_0}{E_2}$，即为极限徐变值。

设 $\frac{1}{ab}=A_1$，$\frac{1}{E_2}=A_2$，$E_2/\lambda_2=C$，并将（20）式两边同除以 σ_0，则得到徐变度方程为：

$$C_t=\frac{\varepsilon_c}{\sigma_0}=A_1(1-e^{-bt})+A_2(1-e^{-ct}) \tag{21}$$



·28d加实验荷值， ∘ 90d加荷试验值，—— 计算值

图 6　混凝土的徐变度实验值与理论计算值的比较

对于硬化混凝土，可从徐变度试验值计算出 A_1、A_2、b、c 值。

图 6 为采用修正的 Burgers 模型计算值与实验结果对照图。数据取自文献[4]中表 2 第二大组实验数据中的28d、90d加荷徐变度实验值。

通过计算得出：

对于90d加荷试件，$A_1=7.8008$ $A_2=4.5192, b=0.0028, C=0.0306$. 得徐变度方程为：

$$C_t=7.8008(1-e^{-0.0028t})$$

$$+4.5192(1-e^{-0.0306t}) \tag{20}$$

对于 28d 加荷试件，$A_1=11.3065$，$A_2=7.0535$，$b=0.0031$，$C=0.0258$. 得徐变度方程为：

$$C_t=11.3065(1-e^{-0.0031t})+7.0535(1-e^{-0.0258t}) \tag{21}$$

由图 6 可见，计算值与实验值吻合较好。

4 结 论

描述硬化混凝土行为的Burgers模型由于假设非恢复性徐变与时间成线性关系，因而与实际情况不符，得出的徐变方程不能用来描述混凝土的徐变。通过引入一指数函数对粘性元件进行修正得到的修正的Burgers模型，能更好地描述硬化混凝土的徐变行为，所得的徐变公式与实验吻合较好。

参 考 文 献

〔1〕王启宏，材料流变学，中国建筑工业出版社，1985年

〔2〕黄大能，沈威等编译，新拌混凝土的结构与流变特征，中国建筑工业出版社，1983年

〔3〕蒲心诚等，混凝土学，中国建筑工业出版社，1981年

〔4〕尹志府，贾绿薇，《混凝土与加筋混凝土》，1986年第5期

（编辑：姚国安）

MODIFIED BURGERS MODEL AND ITS APPLICATON TO HARDENED CONCRETE

Wu Lixian *Peng Xiaoqin*

(Department of Building Material Engineering)

ABSTRACT In this paper, an exponential function is introduced to modify the viscous element of Burgers model. The result shows modified Burgers model is advantageous to describe the creep behavior of hardened concrete and the creep test results are in good agreement with the theoretical predictions of creep equations derived from modified Burgers model.

KEY WORDS Burgers model, concrete, creep exponential function