重庆建筑工程学院学报
第12卷第1期 JOURNAL OF CHONGQING INSTITUTE OF Vol.12 No.1
1990年3月 ARCHITECTURE AND ENGINEERING March 1990

向量最优化问题的Lipschitzian连续性

李声杰
（基础科学系）

摘　要　本文对参数规划问题的目标映射$F(x, u)$为集值映射的情况进行了研究。着重讨论了解集映射的李普布兹连续性。得到了在集值映射$Y(u)=F(X(u), u)$（$X(u)$是约束集合）是局部李普布兹连续，只有$y=0$，$z=0$才满足约束品性。

$$(z, 0)\in y\cdot\partial f(\bar{u}, \bar{y})+N_E(\bar{u}, \bar{y})$$

等条件下，解集映射$N(u、v)$是伪李普布兹连续的，以及在$Y(u)$是强序凸的，$N(u)$是下半连续等条件下，证明了解集映射是局部李普布兹连续的。本文还考虑了解集映射的序凸性。

关键词　向量优化，Lipschitzian连续性，目标映射

1　基本概念和基本符号

本文X，Y分别表示两赋范空间。

GrF表示F的图象，即，$GrF=\{(x, y)|y\in F(x), x\in X\}$.

在赋范空间Y中定义偏序关系$\geqslant$。设y、$d\in Y$.

定义1

（1）称d为y的控制因子，如果对于$y'\in Y$　$y'=y+d\Rightarrow y\geqslant y'$.

y的所有控制因子用$D[y]$表示。

（2）设$Y_1\subset Y$，$y\in Y_1$，称y为Y_1的非控制点，如果不存在$y'\in Y_1$　$y'\neq y$，满足$y\in y'+D[y']$.

Y_1的所有非控制点记成$N(Y_1, D)$.

（3）称y相对Y_1，关于$Y_2(Y_1\subset Y_2\subset Y)$的非控制点，若$y\in Y_2$，且不存在$y'\in Y_1$，$y'\neq y$，满足

$$y\in y'+D[y']$$

相对Y_1，关于Y_2的非控制点全体记成$N(Y_2, Y_1, D)$.

定义2　设F：$X\to Y$是集值映射。

本文1987年11月20日收到。

（1）在点$v\in X$处，若存在v的邻域V，常数$\lambda>0$和单位闭球B，满足

$$F(v)\neq 0 \qquad \forall v\in V$$

$$F(v_1)\subset F(v_2)+\lambda\|v_1-v_2\|B \qquad \forall v_1、v_2\in V$$

则称F在点V是局部李普希兹连续的。

（2）对于$(\bar{v},\bar{y})\in GrF$若分别存在$\bar{v}$，$\bar{y}$的邻域V和Z，常数$\lambda>0$，满足

$$F(v_1)\cap Z\subset F(v_2)+\lambda\|v_1-v_2\|B \qquad \forall v_1,\ v_2\in V$$

则称F在点$(\bar{v},\bar{y})$是伪李普希兹连续的。

（3）若存在点$\bar{v}$的邻域V，使得$F(V)$有界，则称F在点$\bar{v}$是局部有界的。其中$F(V)=\bigcup_{v\in V}F(v)$。

同样若存在点$\bar{v}$的邻域V，使得$F(V)$ $v\in V$ 是紧集，则称 F在点$\bar{v}$是均匀紧的。

（4）用$\varepsilon_Y D$表示D的余集，即$\varepsilon_Y D=Y-D$。

定义 3 若F：$X\times Y_1\to Z$是集值映射，Z是赋范空间，$x_0\in X$，若存在$l>0$和点x_0的邻域U使得对任何$y\in Y_1$，满足

$$F(x_1、y)\subset F(x_2、y)+\|x_1-x_2\|B \qquad \forall x_1,\ x_2\in V$$

则称$F(x,y)$在点x_0处，关于y是一致李普希兹连续的。

定义 3 以下定义假设控制结构$D[y]=P$是不随参数变化的凸锥，即 Y 中的偏序由凸锥P确定。

定义 4 称凸锥P在空间Y中是正规的，如果单位球B的序凸包$[B]_p=(B+P)\cap(B-P)$是有界的。

定义 5 设F：$X_1\to Y$是集值映射，P是Y中的凸锥，若对于 $0\leqslant\lambda\leqslant1$和任意 $x_1x_2\in X_1$，有

$$\lambda F(x_1)+(1-\lambda)F(x_2)\subset F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)+P$$

则称 F 是P-凸的。

若对于$0\leqslant\lambda\leqslant1$和任意$x_1x_2\in X_1$，有

$$\lambda F(x_1)+(1-\lambda)F(x_2)-F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\subset P$$

则称F是严格P-凸的。

定义 6 称集值映射F在点x_0处是下半连续的，如果对任意 $x_n\to x_0$，和 $y\in F(x_0)$，存在某个$n_0>0$，当$n\geqslant n_0$时，有$y_n\in F(x_n)$，满足

$$y_n\to y$$

如果F在集X_1上的每点都是下半连续的，则称F在X_1上是下半连续的。

定义 7 （1）称G：$U\to Y$ 是凸的集值映射，如果对任意u_1，$u_2\in U$和 $0\leqslant\lambda\leqslant1$，有

$$\lambda G(u_1)+(1-\lambda)G(u_2)\subset G(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)$$

（2） 称G是序闭凸的，如果对任何$u_1u_2\in U$和$0\leqslant\lambda\leqslant1$，有

$$\lambda G(u_1)+(1-\lambda)G(u_2)\subset \mathrm{cl}G(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)+P$$

2 解集映射的李普希兹连续性

现在开始研究如下问题的李普希兹连续性

$$V-\min F(x、u)$$

$$u\in U,\ x\in X(u)\subset X$$

令$Y(u)=F(X(u),\ u)$，问题即是讨论$Y(u)$在目标空间的解值映射的稳定性。

首先考虑空间Y的偏序$\geqslant$由控制结构$D[y]=P$（不随y变化的凸锥）所确定。

引理 1 设U是Banach空间X中的开凸集，Y是偏序赋范空间，且序由正规锥P确定，又设F：$U\to Y$是严格P-凸的集值映射，并且对任意$x\in U$，$F(x)$是有界集，以及$F(x)$在U上是下半连续的。则F在任意点$x\in U$处是局部李普希兹连续的。

证明：由$F(x)$的有界性

可令 $S(x)=sup\|F(x)\|<+\infty \qquad \forall x\in U$

所以对任意$\varepsilon>0$，由上确界定义，对$x_0\in U$，存在$\bar{y}\in F(x_0)$，满足

$$\|\bar{y}\|\geqslant \sup\|F(x_0)\|-\varepsilon$$

由已知，对$x_n\to x_0$，存在$y_n\in F(x_n)$，使得$y_n\to\bar{y}$

因此
$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\sup\|F(x_n)\|\geq\underline{\lim}_{n\to\infty}\|y_n\|$$

$$=\|\bar{y}\|\geq\sup\|F(x_0)\|-\varepsilon$$

由ε的任意性得

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}s(x_n)=\underline{\lim}_{n\to\infty}\sup\|F(x_n)\|\geq\sup\|F(x_0)\|=s(x^0)$$

即 $s(x)$是下半连续的。

令 $A_k=\{x\in U|\ s(x)>k\}$

由U的开性和$s(x)$的下半连续性，得

A_k是开集，自然 $U=\bigcup\limits_{k=1}A_k$

又由[3]，p.7，定理4的证明方法可得，存在k_0，使得A_{k_0}中包含开球B_1，即，使得$S(x)$在B_1上有界。

下面来证明对任意$x_0\in U$，存在x_0的邻域，使得$s(x)$在此邻域上有界，设$B_1=x_1+Q_1$，其中Q_1是原点的开邻域。

对$x_0\in U$，显然存在$t_0>0$，使得

$$x_0+t(x_0-x_1)\in U \qquad 0<t<t_0 \tag{1}$$

$$V=\frac{t}{1+t}(B_1-x_1)+x_0\in U \tag{2}$$

∴ V中任意元素x'，可表示成

$$x'=x_0+\frac{t}{1+t}(z-x_1) \qquad z\in B_1$$

∴
$$F(x')=F\left(x_0+\frac{t}{1+t}(z-x_1)\right)$$

$$=F\left(\frac{1}{1+t}(x_0+t(x_0-x_1))+\frac{t}{1+t}z\right)$$

由已知得

$$F(x')\subset\frac{1}{1+t}F(x_0+t(x_0-x_1))+\frac{t}{1+t}F(z)-P$$

设$x=z_1+z_1$，$z_1\in Q_1$，自然$-z_1\in Q_1$

而 $x'\in U$，$z'\in B_1$

所以，存在$t_1>0$．当$0<t<t_1$时，有

$$\frac{z'}{1+t}\in B_1 \tag{3}$$

取$t^0=\min(t_0,\ t_1)$ 当$0<t<t^0$时

自然（1），（2），（3）同时成立。

∴ 对于固定的t，存在$r>0$，使得

$$A(z)=\frac{1}{1+t}F(x_0+t(x_0-x_1))+\frac{t}{1+t}F(z)\subset B(0,r)\quad \forall z\in E_1$$

$$B(z')=(1+t)F\left(\frac{x'}{1+t}+\frac{tz'}{(1+t)^2}\right)-tF\left(\frac{z'}{1+t}\right)$$

$$=(1+t)F\left(\frac{x_0(1+t)^2+tx_1}{(1+t)^2}\right)-tF\left(\frac{z'}{1+t}\right)\subset B(0,r)\quad \forall z'\in B_1$$

又由P的正规性，存在闭球$B(0,R)$，满足

$$[B(0,r)]_P\subset B(0,R)$$

而 $A(z)\subset B(0,r)$ $B(z')\subset B(0,r)$

∴
$$A(z)\leqslant F(x')\leqslant B(z')$$

故$s(x)$在V上是均匀有界的。

因此对$x'\in U$，可选择$\varepsilon>0$，使得$s(x)$在集$x'+\varepsilon B+\varepsilon B$上有界，即，存在$l>0$，使得

$$s(x'+\varepsilon B+\varepsilon B)\subset[0,l] \tag{4}$$

对任意$x_1,x_2\in x'+\varepsilon B$，$x_1\neq x_2$

令
$$z=x_1+\frac{\varepsilon(x_1-x_2)}{\|x_1-x_2\|}\subset x'+\varepsilon B+\varepsilon B$$

$$h=\frac{\|x_1-x_2\|}{\varepsilon+\|x_1-x_2\|}$$

则
$$(1-h)x_2+hz=x_1$$

∴
$$(1-h)F(x_2)+hF(z)-F(x_1)\subset P$$

因此
$$F(x_1)-F(x_2)\subset h(F(z)-F(x_2))-P$$

同理可得

$$F(x_2)-F(x_1)\subset h(F(v)-F(x_1))-P$$

即
$$F(x_1)-F(x_2)\subset h(-F(v)+F(x_1))+P$$

由（2、4）式得

$$F(x_1)-F(v),\ F(z)-F(x_2)\subset B(0,l)$$

因此
$$F(x_1)-F(x_2)\subset[B(0,hl)]_p=h[B(0,l)]_p$$

又由P的正规性，存在$M>0$，使得

$$[B(0,l)]_p \subset MB(0,1)$$

$$\therefore \quad F(x_1)-F(x_2)\subset h\cdot MB(0,1)\subset \frac{M}{\varepsilon}\|x_1-x_2\| B$$

因此F在点$x\in U$是局部李普希兹连续的。由x'的任意性，F 在U 内的每点是李普希兹连续的。

引理 2 设$Y(u)$是严格P-凸的，则解集映射$N(u)$也是严格P-凸的。

证明 设u_1，$u_2\in U$，由$Y(u)$的严格P-凸性有

$$\lambda Y(u_1)+(1-\lambda)Y(u_2)-Y(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)\subset P$$

自然 对任意$y_1\in N(u_1)$，$y_2\in N(u_2)$，$z\in N(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)$

有 $$\lambda y_1+(1-\lambda)y_2-z\in P$$

由y_1，y_2，z的任意性知，$N(u)$是严格P-凸的。

由引理 1 、引理 2 ，显然有下面定理成立。

定理 1 设U是 Banach空间 z 中的开凸集，Y 是偏序赋范空间，序由正规锥P确定，且$Y(u)$ 是严格 P-凸的，以及$Y(u)$（对任意 $u\in U$)是有界的，$N(u)$ 在U上是下半连续的。则$N(u)$在U内每点都是局部李普希兹连续的。

下面开始讨论解集映射的伪李普希兹连续性，此处控制结构随着某参数变化而变化。

假设：对任意非空紧子集$Y_1\subset Y$，$N(Y_1, D)$是非空集合。

引理 3 [(1)定理 2 、 3]设F：$X\to Y$是闭值的集值映射，$\bar{x}\in X,\bar{y}\in F(\bar{x})$，则下列条件等价。

(a) F在点$(\bar{x},\bar{y})$ 是伪李普希兹连续的。

(b) dF在点 $(\bar{x},\bar{y})$ 是局部李普希兹连续的。其中

$$dF(x,y)=dist(F(x),y)=\min_{y'\in F(x)}\|y'-y\|$$

引理 4 [(1)定理 3 、 2] 设 g：$R^d\times R^n\to R^n$ 是局部李普希兹连续的映射，C、E 分别是$R^d\times R^n$ 中的闭集，设集值映射

$$F(v)=\{x\in R^n \mid g(v,x)\in C,\ (v,x)\in F\}$$

若在点$\bar{v}\in R^d$ 和$\bar{x}\in F(\bar{v})$ 处，仅有$y=0$，$z=0$，才满足约束品性：

$$y\in N_c(g(\bar{v},\bar{x})),\ (z,0)\in y\cdot\partial g(\bar{v},\bar{x})+N_E(\bar{v},\bar{x})$$

则F在点 $(\bar{v},\bar{x})$ 是伪李普希兹连续的。

定理 2 设$U\times Y(U)$是闭的，$Y(u)$在点$\bar{u}$是局部李普希兹连续的，$D[y']$是与y'无关的锥，且

$$cl\varepsilon_Y D\cap D=\{0\}\text{或空集}$$

又设$\bar{y}\in N(Y(v),\ Y(\bar{u}),D)$，以及仅有$z=0$，$y=0$，才满足约束品性

$$(z,0)\in y\cdot\partial f(u,y)+N_E(\bar{u},\bar{y})$$

则$N(Y(U),Y(\bar{u}),D)$ 在点 $(\bar{u},\bar{y})$ 是伪李普希兹连续的。其中

$$E=U\times Y(U),\ f(u,y)=\sup_{y'\in Y(u)} d(y-y',\varepsilon_Y D)$$

证明 由于$N(Y(U),\ Y(u),D)=\{y\in Y(U)\mid$不存在$y'\in Y(u)$，$y'\neq y$满足$y\in y'+D\}$

$=\{y\in Y(U)\mid \forall y'\in Y(u)\quad d(y-y',\varepsilon_Y D)=0\}$

又由已知，$cl\varepsilon_Y D\cap D=\{0\}$或空集

$$\therefore\quad N(Y(U),\ Y(u),D)=\{y\in Y(U)\mid f(u,y)=\sup_{y'\in Y(u)} d(y-y',\varepsilon_Y D)=0\}$$

$$=\{y\mid f(u,y)=0,\ (u,y)\in U\times Y(U)\}$$

令$c=0$，由引理4，若能证得$f(u,y)$在点$(\bar{u},\bar{y})$是局部李普希兹连续的，即可。

事实上，由$d(y-y',\ \varepsilon_Y D)$相对$y-y'$是李普希兹连续的，$Y(u)$在点$\bar{u}$是局部李普希兹连续的，所以存在$\bar{u}$的邻域$V$，满足

$$d(y_1-y',\ \varepsilon_Y D)\leqslant d(y_2-y',\ \varepsilon_Y D)+\|y_1-y_2\|\quad \forall y_1,y_2\in Y$$

$$Y(u_1)\subset Y(u_2)+l\|u_1-u_2\|B\qquad \forall u_1,u_2\in V$$

因此
$$\sup_{y'\in Y(u_1)} d(y_1-y',\ \varepsilon_Y D)\leqslant \sup_{y'\in Y(u_1)} d(y_2-y',\ \varepsilon_Y D)+\|y_1-y_2\|$$

$$\leqslant \sup_{y'\in Y(u_2)+l\|u_1-u_2\|B} d(y_2-y',\ \varepsilon_Y D)+\|y_1-y_2\|\quad \forall u_1,\ u_2\in V$$

$$\leqslant \sup_{y'\in Y(u_2),r\in B}[d(y_2-y',\varepsilon_Y D)+l\|u_2-u_1\|\|r\|]+\|y_1-y_2\|\quad \forall u_1,u_2\in V$$

$$\leqslant \sup_{y'\in Y(u_2)} d(y_2-y',\varepsilon_Y D)+\max(l,\ 1)[\|u_1-u_2\|+\|y_1-y_2\|]\quad \forall u_1,u_2\in V$$

于是 $f(u,y_1)\leqslant f(u_2,y_2)+\max(l,\ 1)[\|u_1-u_2\|+\|y_1-y_2\|]\quad \forall u_1,u_2\in V$

故 $N(Y(U),Y(u),D)$在点$\bar{u}$是伪李普希兹连续。

定理3 设$V\times Y_1$是闭集，对任意$y'\in Y_1$，$\varepsilon_Y D(v)[y']$(控制结构随参数v变化)在点$\bar{v}$处，关于y'是一致李普希兹连续的，且$\bar{y}\in N(Y_1,D(v))=N_2(v)$和仅有$y=0$，$z=0$才满足约束品性。

$$(z,\ 0)\in y,\partial f(\bar{v},\bar{y})+N_E(\bar{v},\bar{y})$$

并且$cl\varepsilon_Y D(v)[y']\cap D(v)[y']=\{0\}$或空集。则$N_2(v)$在点$(\bar{v},\bar{y})$是伪李普希兹连续的。其中$E=V\times Y_1$，$f(v,y)=\sup_{y'\in Y_1} d(y-y',\ \varepsilon_Y D(v)[y'])$。

证明 令$c=0$，由引理4，只须证$f(v,y)$是局部李普希兹连续即可。

由已知条件得，存在$\bar{v}$的邻域V，满足

$$\varepsilon_Y D(v_2)[y']\subset\varepsilon_Y D(v_1)[y']+l\|v_1-v_2\|B\qquad \forall v_1,v_2\in V$$

因此 $d(y_1-y',\ \varepsilon_Y D(v_1)[y'])+l\|v_1-v_2\|B)\leqslant d(y_1-y',\ \varepsilon_Y D(v_2)[y'])\quad \forall v_1,v_2\in V$

而 $d(y_1-y',\varepsilon_Y D(v_1)[y'])-l\|v_1-v_2\|B\leqslant d(y_1-y',\varepsilon_Y D(v_1)[y']+l\|v_1-v_2\|B)$

所以 $d(y_1-y',\varepsilon_Y D(v_1)[y'])\leqslant d(y_1-y',\varepsilon_Y D(v_2)[y'])+l\|v_1-v_2\|B$

因此 $d(y_1-y',\varepsilon_Y D(v_1)[y'])\leqslant d(y_1-y',\varepsilon_Y D(v_2)[y'])+l\|v_1-v_2\|B\quad \forall v_1,v_2\in B$

$$\leqslant d(y_2-y',\varepsilon_Y D(v_2)[y'])+\max(l,\ 1)[\|y_1-y_2\|+\|v_1-v_2\|]B\quad \forall v_1,v_2\in V$$

由引理4，此定理得证。

定理A 设$V\times Y_1$是闭集，对任意$y'\in Y_1$，$d(y-y',\varepsilon_Y D(v)[y'])$关于$(y,v)$是下半连续的，以及$cl\varepsilon_Y D(v)[y']\cap D(v)[y']=\{0\}$或空集和仅有$y=0$，$z=0$才满足约束品性

$$(z,0)\in y\cdot\partial f(\bar{u},\bar{y})+N_E(\bar{u},\bar{y})$$

并且$\partial f(\bar{v},\bar{y})$非空有界。则$N_2(v)$在点$(\bar{v},\bar{y})$是伪李普希兹连续的。其中$F=V\times Y_1$，$f$的定义同定理3。

证明 由已知得

$f(v,y)=\sup\limits_{y'\in Y_1} d(y-y',\varepsilon_Y D(v)[y'])$也是下半连续的，又由[6]的定理4和引理4，此定理得证。

定理5 若$\bigcap\limits_{y'\in Y(u)}\varepsilon_Y(y'+D(v)[y'])\cap Y(u)$关于$(u,v)$在点$(\bar{u},\bar{v})$是局部李普希兹连续的，且目标映射$F$是闭值的集值映射，则解集映射$N(Y(u),D(v))=N_{12}(u,v)$在点$(\bar{u},\bar{v},\bar{y})$ $(\forall\bar{y}\in N_{12}(\bar{u},\bar{v}))$是伪李普希兹连续的。

证明 $\because N_{12}(u,v)=\{y\in Y(u)\mid$不存在$y'\in Y(u)$，$y'\neq y$满足，$y\in y'+D(v)[y']\}$

$$=\{y\in Y\mid y\in\bigcap_{y'\in Y(u)}\varepsilon_Y(y'+D(v)[y'])\cap Y(u)\}$$

由引理5，只须证d_{N12}在点$(\bar{u},\bar{v},\bar{y})$的某个邻域内是李普希兹连续的即可。

而 $d_{12}(w)=d(N_{12}(u,v),w)$

$\therefore$ 由已知条件和定理3的证法，同理可得存在$(\bar{u},\bar{v})$的邻域$U\times V$，使得

$$d(N_{12}(u,v_1),w_1)\leqslant d(N_{12}(u_2,v_2),w_2+\max(l,1)$$
$$[\|u_1-u_2\|+\|v_1-v_2\|+\|w_1-w_2\|]B\quad\forall(u_1,v_1),(u_2,v_2)\in U\times V$$

因此d_{N12}在点$(\bar{u},\bar{v},\bar{w})$ $(w\in Y)$是局部李普希兹连续的，由w的任意性

故$N_{12}(u,v)$在点$(\bar{u},\bar{v},\bar{y})$ $(\bar{y}\in N(\bar{u},\bar{y}))$是伪李普希兹连续的。

3 解集映射的P-凸性

定理6 若约束映射$X(u)$是凸的集值映射$F(x,u)$是P-凸的，且偏序空间Y的序由闭的反对称锥P确定，并且$Y(u)=F(X(u),u)$对任意u是非空紧集，则解集映射$N(u)$是P-凸的。

证明 首先证$Y(u)$是P-凸的

事实上 对任意$y_1\in F(X(u_1),u_1)$，$y_2\in F(X(u_2),u_2)$

显然存在$x_1\in X(u_1)$，$x_2\in X(u_2)$，满足

$$y_1\in F(x_1,u_1),\quad y_2\in F(x_2,u_2)$$

由已知得

$$\lambda y_1+(1-\lambda)y_2\in F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\ \lambda u_1+(1-\lambda)u_2)+P$$
$$\subset F(X_1\lambda x_1+(1-\lambda)x_2),\ \lambda u_1+(1-\lambda)u_2)+P$$

由y_1，y_2的任意性，得

$$\lambda F(X_1(u_1),u_1)+(1-\lambda)F(X(u_2),u_2)$$
$$\subset F(X(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2),\ \lambda u_1+(1-\lambda)u_2)+P$$

又设　$y_1\in N(u_1)$，$y_2\in N(u_2)$，自然$y_1\in Y(u_1)$，$y_2\in Y(u_2)$

所以
$$\lambda y_1+(1-\lambda)y_2\in Y(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)+P$$

∴　存在$y\in Y(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)$，$P_1\in P$，使得

$$\lambda y_1+(1-\lambda)y_2=y+P_1$$

按照〔4〕中定理3.15和3.16的证法可得，存在$\bar{y}\in N(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)$，满足 $y=\bar{y}+P$

∴
$$\lambda y_1+(1-\lambda)y_2=\bar{y}+(p_1+P)$$

从而
$$\lambda N(u_1)+(1-\lambda)N(u_2)\subset N(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)+P$$

即$N(u)$是P-凸的。

定理7　设$Y(u)$是序闭凸的，偏序空间Y的序由闭的反对称锥P确定，且$N(u)$是紧集，则$N(u)$是P-凸的。

证明　对任意$w_1\in N(u_1)$，$w_2\in N(u_2)$，自然有$w_1\in Y(u_1)$，$w_2\in Y(u_2)$

又由已知条件得，存在$y_1\in \mathrm{cl}Y(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)$，$p_1\in P$　满足

$$\lambda w_1+(1-\lambda)w_2\subset y'+p_1$$

于是　存在$y_n\in Y(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)$，使得$y_n\to y'$

按照〔4〕中定理3.15和定理3.16，存在

$\bar{y}_n\in N(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)$，使得　$y_n=\bar{y}_n+p_n$

又由$Y(u)$的紧性，对$\{\bar{y}_n\}$存在子序列不妨就记成它本身。

∴
$$\bar{y}_n\to\bar{y}\in N(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)\qquad(n\to\infty)$$

由$\{\bar{y}_n\}$、$\{y_n\}$的收敛性，自然p_n也收敛。记作$p_n\to p_o$。

因此
$$\lambda w_1+(1-\lambda)w_2=\bar{y}+(p_o+p')$$

由P的闭性，∴$N(u)$是P-凸的。

本文是在中国科学院，副研究员陈光亚，本院副教授李泽民指导下完成的，在此表示衷心的感谢。

参考文献

〔1〕 R.T.Rockafellar, "Lipschitzian Properties of Multifunction", Nonlinear Analysis, the Math, and Appl., V.9, No.8, 1985, pp.867-885

〔2〕 R.T.Rockafellar, "Lipschitzian stability in optimization the role of nonsmooth analysis", Lecture Notes in Math., 1986, pp55-73

〔3〕 J.P.Aubin, "Applied Nonlinear Analysis", 1985

〔4〕 Graham Jameson, "Order Linear Spaces", Lecture Notes in Math., 1970

〔5〕 Peter Kosmol kiel, "On stability of convex opevaters", Lecture Notes in math., 1986, pp.173-179

〔6〕 R.T.Rockafellar, "Clarke tangent cones and boundaries of closed set in R^n," Nonlinear Analysis, the Math. and Appl., V.3, No.1 1979, pp.145-154

（编辑：姚国安）

LIPSCHITZIAN PROPERTIES OF VECTOR OPTIMIZATION

Li shengjie

(Department of Natural Science)

ABSTRACT This paper deals with parametrized vector optimization in which the objective mapping is set-valued mapping. Lipschitzian properties of solution mapping are emphatically studied. This paper shows that solution map is pseudo-Lipschitzian if the only victors $y = 0$, $z = 0$ hold following constraint qualification

$$(z, 0) \quad y\cdot f(\bar{u},\bar{y}) + N_E(\bar{u},\bar{y})$$

and set-valued mapping $Y(u) = F(x(u).u)$ ($x(u)$ is constraint set) is locally Lipschitzian if $Y(u)$ is strong order convex and $N(u)$ is lower semi-continuous. Order convex peoperties of solution mapping are also studied.

KEY WORDS ,vector optimization, Lipschitzian properties, objective mapping