重庆建筑工程学院学报
第12卷第1期 JOURNAL OF CHONGQING INSTITUTE OF Vol.12 No.1
1990年3月 ARCHITECTURE AND ENGINEERING March 1990

关于奇异Cauchy问题

杨祖贵

（基础科学系）

摘　要　在本文中，讨论了奇异Cauchy问题，利用Adomian的分解方法得到了一类奇异Cauchy问题的非平坦解。

关键词　奇异Cauchy问题，分解法，非平坦解，奇异算子

Adomian[1]提出的分解方法为我们提供了一种快速收敛到准确解的计算方法。特别对于求解随机微分方程，某些非线性微分方程和Tricomi方程等[2、3]，有许多便利之处。在求解这些方程的过程中不需对方程作一些不必要的限制，而这些限制往往没有多少物理意义。近年来，许多作者把分解法和Picard逼近法，扰动法等进行了比较[4、5]得到了许多有趣的结果。本文利用Adomian的方法来研究型如

$$\begin{cases} t\dfrac{du}{dt}=Bu+f(t) \\ u(o)=o \end{cases} \tag{1}$$

的奇异Cauchy问题。其中B是某Banach空间阶梯中的线性算子。

对于奇异Cauchy问题已有许多文章进行了研究[6,7,8]。〔6〕讨论了B是一连续半群的生成元时解的状况。〔7〕讨论了解析系数的情形。〔8〕研究了方程

$$t\frac{du}{dt}=-\frac{i}{\phi(x)}\frac{\partial u}{\partial x} \tag{2}$$

的平坦解的存在性。这里ϕ可以是$H^2(\Omega)$中的函数。本文利用Adomian的方法来研究（1）的非平坦解。为此先作一些假定：

设$s_0>o$，一族Banach空间$\{X_s\}_{0<s\leqslant s_0}$适合以下条件：

$X_S\to X_{S'}$　　$0<s'\leqslant s\leqslant s_0$，嵌入范数$\leqslant 1$

则称$\{X_{0<s\leqslant s_0}\}$为Banach空间阶梯。例如Ω_s为C^n中的重园域，$\Omega_s=\{z=(z_1,\cdots z_n)\in C^n,|z|<s\}$，于是定义

$X_s=\{f(z)$在Ω_s中全纯且有界$\}$

本文1988年6月28日收到。

$$\|f\|_s = \sup_{\Omega_s}\{|f(z)|\} \tag{3}$$

显然$X_s \subset X_{s'}$，$s' \leqslant s$，且由最大模原理，嵌入算子的范数$\leqslant 1$。

设B: $\bigcup_{0<s\leqslant s_0} X_s \to \bigcup_{0<s\leqslant s_0} X_s$ 是一个线性算子使得

$$f \in X_s \Rightarrow Bf \in X_{s'} \qquad 0 < s' < s$$

若

$$B \in L(X_s,\ X_{s'}),\ \text{且}\|B\|_{L(X_s,\ X_{s'})} \leqslant C(s-s')^{-d} \tag{4}$$

则称B为d阶奇异算子。对于(3)，d阶微分算子为d阶奇异算子。

现在来讨论(1)。

设$f = t^r g$，$g \in X_s$，方程(1)写成Adomian的标准形式为

$$tL_t u = Bu + t^r g \tag{5}$$

其中$L_t = \frac{d}{dt}$，令$L_t^{-1} = \int_0^t [\cdot]d\tau$，则由(5)有

$$u = u(0) + L_t^{-1}\left(\frac{1}{t}t^r g\right) + L_t^{-1}\left(\frac{1}{t}Bu\right)$$

$$= \frac{t^r}{r}g + L_t^{-1}\left(\frac{1}{t}Bu\right)$$

令 $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$为$u$的分解，其中

$$u_0 = \frac{t^r}{r}g,$$

$$u_1 = L_t^{-1}\left(\frac{1}{t}Bu_0\right) = \frac{t^r}{r^2}Bg \tag{6}$$

$$\vdots$$

$$u_n = L_t^{-1}\left(\frac{1}{t}Bu_{n-1}\right) = \frac{1}{r^{n+1}}t^r B^n g$$

$$\vdots$$

则

$$u = \frac{t^r}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^n}B^n g \tag{7}$$

是(1)的形式解。如果(7)收敛，则(7)为方程(1)的精确解。

由(4)，我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{1}{r^n}B^n g\right\|_s \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^n}\frac{C^n}{(s-s')^{dn}}\|g\|_s \tag{8}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{C}{r(s-s')^d}\right]^n\|g\|_s$$

因此，只要r充分大，则(8)式右端收敛。从而推得(7)收敛。因此得到

定理：如果

B: $\bigcup_{0<s\leqslant s_0} X_s \to \bigcup_{0<s\leqslant s_0} X_s$是一个$d$阶奇异算子，$f(t) \in t^r \times X_s$，则对于充分大的$r$，方程

(1) 存在解$u\in t^r\times X_{s}'$，$s'<s\leqslant s_0$。

注：从前面的讨论可以看到，(7) 给出了方程(1) 的解的逼近，可以用于近似计算。

对于非线性方程

$$\begin{cases} t\dfrac{du}{dt}=Bu+N(u)+tg(x) \\ u(0)=0 \end{cases} \tag{9}$$

其中$N(u)$是无穷次可微的非线性函数，B为线性微分算子。可以用Adomian多项式将$N(u)$分解成

$$N(u)=\sum_{n=0}A_n \tag{10}$$

其中

$$A_0=N(u_0) \tag{11}$$

$$A_n=\sum_{\nu=1}^{n}C(\nu,n)h_\nu(u_0) \tag{12}$$

其中$h_\nu(u_0)=\dfrac{d^\nu N}{du^\nu}(u_0)$，$C(\nu,n)$是$u_1,\cdots,u_n$的多项式，它的每项为$\prod\limits_{i=1}^{\nu}u_{k_i}$，$\sum\limits_{i=1}^{\nu}k_i=n$，如果$j$是下标的重复次数，则这一项就除以$j!$。例如，$N(u)=u^2$，则有

$$\begin{aligned} &A_0=u_0^2,\quad A_1=2u_0u_1 \\ &A_2=2u_0u_2+u_1^2 \\ &A_3=2u_0u_3+2u_1u_2 \\ &\quad\vdots \end{aligned} \tag{13}$$

$$A_n=C(1,n)h_1(u_0)+C(2,n)h_2(u_0)=2u_0C(1,n)+2C(2,n)$$

$$\cdots\cdots$$

令 $u=\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$则可得到(9)的逼近解：

$$\begin{aligned} &u_0=\frac{t_r}{r}g(x) \\ &u_1=L_t^{-1}\left(\frac{1}{t}Bu_0\right)+L_t^{-1}(t^{-1}A_0) \\ &\quad\vdots \\ &u_n=L_t^{-1}\left(\frac{1}{t}Bu_{n-1}\right)+L_t^{-1}\left(\frac{1}{t}A_{n-1}\right) \\ &\quad\vdots \end{aligned} \tag{14}$$

A_0、A_n如(11)、(12)定义。这时$u=\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$的收敛性取决于$r$和$N$的具体形式。为了说明，考虑方程：

$$\begin{cases} t\dfrac{du}{dt}=u^2+t^r \\ u(0)=0 \end{cases} \tag{15}$$

这是奇异的常微分方程，由(13)、(14)有

$$u_0 = \frac{t^r}{r}$$

$$A_0 = u_0^2 = \frac{t^{2r}}{r^2}$$

$$u_1 = L_t^{-1}(t^{-1}A_0) = \int_0^t \frac{\tau^{2r-1}}{r^2} d\tau = \frac{t^{2r}}{2r^3}$$

$$A_1 = 2u_0u_1 = 2\frac{t^r}{r}\cdot\frac{t^{2r}}{2r^3} = \frac{t^{3r}}{r^4}$$

$$u_2 = L_t^{-1}(t^{-1}A_1) = \int_0^t \frac{1}{\tau}\cdot\frac{\tau^{3r}}{r^4} = \frac{t^{3r}}{3r^5}$$

$$A_2 = 2u_0u_2 + u_1^2$$

$$= 2\frac{t^r}{r}\cdot\frac{t^{3r}}{3r^5} + \frac{t^{4r}}{4r^6} = \frac{2}{3}\frac{t^{4r}}{r^6} + \frac{t^{4r}}{4r^6} = \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)\frac{t^{4r}}{r^6}$$

$$u_3 = \frac{9}{12\times 4}\frac{t^{4r}}{r^7} = \frac{9}{48}\frac{t^{4r}}{r^7}$$

$$\vdots$$

这样有

$$u = \frac{t^r}{r} + \frac{t^{2r}}{2r^3} + \frac{t^{3r}}{3r^5} + \frac{9}{48}\frac{t^{4r}}{r^7} + \cdots$$

显然，当$r>0$，$t>0$，且t充分小时u收敛，这时得到(15)的近似解，这与理论结果也是相符的。

参考文献

〔1〕G. Adomian, Stochastic Systems, Academic Press, 1983

〔2〕G. Adomian and R. Rach, Nonlinear Differential Equations with Negative Power Nonlinearities, J.Math.Anal. Appl.112, 497-501 (1985)

〔3〕G. Adomian, and R.Rach, On the Solution of Nonlinear Differential Equations with Convolution Product Nonlinearities, J.Math.Anal. Appl.144, 171-175 (1986)

〔4〕N.Bellomo and R.Monaco.A Comaparison between Adomian's Decomposition Method and Perturbation Techniques, J. Math. Anal. Appl. 110, 495-502 (1985)

〔5〕N. Bellomo and D. Sarafyan, On Adomian's Decomposition Method and Some Comparisons with Picard's Iterative Scheme, J.Math.Anal. Appl. 123, 389-400 (1987)

〔6〕On the Abstract Singular Cauchy Problem, Commu.P.D.E 3(1987) N. 11, 10077-10082

〔7〕M. Baouendi, F. Treves and E. Zachmanoglou, Flat Solutions and Singular Solution of Homogenous L.P.D.E. with analytic coefficients,Duch. Math.J.

46 (1979) 409－438

〔8〕 V.Schuchman, On the the Existence of Flat Solutions for P.D.E of the First Order, J.Diff.Eq.62.(1986), 117－128

（编辑：姚国安）

ON THE SINGULAR CAUCHY PROBLEM

Yang Zugui

(Department of Natural Science)

ABSTRACT In this paper, a singular Cauchy problem is studied. The unflat solutions for some singular Cauchy problem are obtained by Adomian's decomposition method.

KEY WORDS singular Cauchy problem, decomposition, unflat solution, singular operator