重庆建筑工程学院学报
第12卷第3期 JOURNAL OF CHONGQING INSTITUTE OF Vol.12 No.3
1990年9月 ARCHITECTURE AND ENGINEERING Sept. 1990

用双层位势求解三维Helmholtz方程Neumann问题的边界元法

金朝嵩
（基础科学系）

摘 要 本文给出一种三维Helmholtz方程Neumann问题的新的数值解法。首先利用双层位势推得问题解的积分表达式并导出了一个Fredholm第一类积分方程。然后证明了边值问题与积分方程的等价性及积分方程在适当Sobolev空间中解的存在唯一性。最后建立了与积分方程等价的变分形式的有限元逼近以求近似解，并进行了误差估计。

关键词 位势，Sobolev空间，边界积分方程，拟微分算子，边界元法

0 前 言

作为简化波动方程的Helmholtz方程，以其深刻的物理背景长期受到人们广泛重视和深入研究。Fredholm积分方程理论成熟以后，用古典的边界积分方程法，即对Dirichlet问题使用双层位势、对Neumann问题使用单层位势以导出与边值问题等价的第二类Fredholm边界积分方程并求其近似解，曾是人们很感兴趣的工作。1974年，R.E.Kleimann对此方法做了很好的总结性工作[1]。随后，人们对这种方法又进行了一些改造，例如提出了零场法(The null field method)及修正Green函数(The modified Green functions)的思想[2]，但仍囿于第二类Fredholm积分方程的范围。本文所用的方法与之不同。对Dirichlet问题使用单层位势、对于Neumann问题使用双层位势以得到与边值问题等价的第一类Fredholm边界积分方程。这里的积分算子是拟微分算子，因此用拟微分算子理论去研究积分方程解的适定性，然后用降一维的有限元方法去寻求数值解。利用这种新的方法，J.Giroire对三维Helmholtz方程的Dirichlet问题进行了讨论[3]，但他对于Neumann问题仍沿用旧的方法处理。本文用新的方法处理三维Helmholtz方程的Neumann问题。首先利用双层位势推得同时适合外问题和内问题的解的积分表达式，并导出了联系边值条件和未知函数在边界上的跳跃量的第一类边界积分方程，并证明了边值问题与积分方程的等价性及积分方程在

本文1988年6月13日收到。

适当 Sobolev 空间中解的存在唯一性，最后给出一种建立与积分方程等价的变分形式的有限元逼近的方法以寻求原问题的近似解，并进行了误差估计。

1　边值问题及与之等价的边界积分方程

设 Ω 是 R^3 中有界开区域，Γ 是其充分光滑的边界，，Ω' 是 $\overline{\Omega}$ 的余集。用 n 表 Γ 的外法向量。r 是 R^3 中任意一点到原点的距离。用 $[v]$ 表 R^3 中的函数 v 穿越 Γ 的跳跃量：

$$[v]:=v\Big|_{\Gamma}^{内}-v\Big|_{\Gamma}^{外}$$

考虑下列 Helmholtz 方程的 Neumann 内问题和外问题：

$$(N_{内})\begin{cases}\text{求函数 } u \text{ 使得}\\ \Delta u++k^2u=0\text{，在 } \Omega \text{ 中}\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma}=g\end{cases}$$

$$(N_{外})\begin{cases}\text{求函数 } u \text{ 使得}\\ \Delta u+k^2u=0\text{，在 } \Omega' \text{ 中}\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma}=g\\ \lim\limits_{r\to\infty} r\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}-iku\right)=0\end{cases}$$

这里 u 是数值函数，k 是复数且满足 $I_m k>0$。条件 $\lim\limits_{r\to\infty} r\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}-iku\right)=0$ 被称为辐射条件，当视 Helmholtz 方程为简化波动方程时，它是必要的。

熟知：函数 $E:=-\dfrac{1}{4\pi r}e^{ikr}$ 是 Helmholtz 方程的一个基本解且满足辐射条件。现设 u 满足 Helmholtz 方程且 $u\in C^\infty(\overline{\Omega})\cap C(\Omega')$。$p=\left[\dfrac{\partial u}{\partial n}\right]$，$q:=[u]$。定义以下算子分别表单层和双层位势：

$$(Sp)(y):=\int_{\Gamma}p(x)E(x,y)d_0x,\quad \forall y\in R^3$$

$$(Dq)(y):=\int_{\Gamma}q(x)\frac{\partial}{\partial n_x}E(x,y)d_0x,\quad \forall y\in R^3$$

利用 Green 公式，容易推出以下结果：

若 u 定义在 Ω' 上且满足 Helmholtz 方程，有

$$\left(Du\Big|_{\Gamma}^{内}\right)(y)-\left(S\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma}^{内}\right)(y)=\begin{cases}u(y), & y\in\Omega\\ \dfrac{1}{2}u\Big|_{\Gamma}^{内}, & y\in\Gamma\\ 0, & y\in\Omega'\end{cases}$$

若 u 定义在 Ω' 上且满足 Helmholtz 方程及辐射条件，有

$$\left(S\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma}^{外}\right)(y)-\left(Du\Big|_{\Gamma}^{外}\right)(y)=\begin{cases}0, & y\in\Omega\\ \frac{1}{2}u\Big|_{\Gamma}^{外}, & y\in\Gamma\\ u(y), & y\in\Omega'\end{cases}$$

将以上二式相加，得

$$-[(Sp)(y)]+(Dq)(y)=\begin{cases}u(y), & y\in\mathbf{R}^3-\Gamma\\ \frac{1}{2}\left(u\Big|_{\Gamma}^{内}+u\Big|_{\Gamma}^{外}\right), & y\in\Gamma\end{cases}\qquad(1)$$

现在将问题($N_{内}$)及($N_{外}$)综合并明确化。设$g\in H^{-1/2}(\Gamma)$。定义空间M_0(参阅[4])：

$$M_0:=\left\{u\,|\,u\in W_0^1(\mathbf{R}^3-\Gamma),\ \lim_{r\to\infty}r\left(\frac{\partial u}{\partial r}-iku\right)=0\right\}$$

其中

$$W_0^1(\Omega)=H^1(\Omega),$$

$$W_0^1(\Omega')=\left\{u\in D'(\Omega')\,\Big|\,\frac{u}{\sqrt{1+r^2}}\in L^2(\Omega'),\ \frac{\partial u}{\partial x_i}\in L^2(\Omega'),\ i=1,2,3\right\}$$

因此

$$W_0^1(\mathbf{R}^3-\Gamma)=W_0^1(\Omega)\cup W_0^1(\Omega')$$

现在的边值问题是：求函数$u\in M_0$使得它是下列问题的广义解，

$$(N)\begin{cases}\Delta u+k^2u=0,\ 在\mathbf{R}^3-\Gamma内,\\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma}=g\in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\end{cases}$$

现进一步假设u是问题(N)的解。由于$C^{\infty}(\Omega)$及$C^{\infty}(\Omega')$分别在$H^1(\Omega)$及$W_0^1(\Omega')$中稠密，故(1)式仍然成立。又假设$\frac{\partial u}{\partial n}$在穿越$\Gamma$时是连续的，即$p=0$，于是得到用双层位势表示的解的表达式：

$$u(y)=(Dq)(y)=-\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}q(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}d_0x\quad\forall y\in\mathbf{R}^3-\Gamma\qquad(2)$$

又因$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma}=g$，由双层位势法向导数的连续性有

$$g(y)=-\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}q(x)\frac{\partial^2}{\partial n_x\partial n_y}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}d_0x\quad\forall y\in\Gamma\qquad(3)$$

这是一个联系边界条件中已知函数g及未知函数u在穿越Γ时的跳跃量q的第一类Fredholm的边界积分方程。为证它与原问题(N)等价，还须证明若q是方程(3)的解，则u满足原问题(N)。

首先注意，若要$u\in M_0$，据迹定理，须有$q:=[u]\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$。故设$q\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$是方程(3)的解。

对于$y\in\mathbf{R}^3-\Gamma, x\in\Gamma$，容易验证：$\frac{\partial}{\partial n_x}E(x,y)$以及它对于$x$、$y$的导数均属于$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$，故双层位势所确定的函数

$$u(y)=(Dq)(y)=\int_\Gamma q(x)\frac{\partial}{\partial n_x}E(x,y)d_0x$$

有定义且可导。算子 D 是映边界 Γ 上的函数至 $\mathrm{R}^3-\Gamma$ 中的函数的 $-1/2$ 阶的拟微分算子[8，§8]，因此 $u=Dq\in H^1(\Omega)\cup W_0^1(\Omega')$。再注意到 $E(x,y)$ 是 Helmholtz 方程的基本解且满足辐射条件，用交换微分和积分顺序以及在积分号下取极限的办法，立即可验证 u 还满足 Helmholtz 方程和辐射条件。至于 $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=g$ 是显然的。故 u 是原问题 (N) 的解。

当然，还须证明方程（3）确有解 $q\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 且解唯一，为此，先给出一个引理。

引理　对于 $I_mk>0$，齐次 Neumann 问题

$$(N')\begin{cases}\text{求 } u\in M_0 \text{ 使得}\\ \Delta u+k^2u=0,\ \text{在 } \mathrm{R}^3-\Gamma \text{ 内},\\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=0\end{cases}$$

只有平凡解。

证　设 u 是问题 (N') 的解，则有

$$\begin{cases}u\in H^1(\Omega)\cup W_0^1(\Omega')\text{使得}\\ u=u_1,\ \Delta u_1+k^2u_1=0,\ \text{在 } \Omega \text{ 内}\\ u=u_2,\ \Delta u_2+k^2u_2=0 \text{ 且 } u_2 \text{ 满足辐射条件，在 } \Omega' \text{ 内}\\ \left.\frac{\partial u_1}{\partial n}\right|_\Gamma^{\text{内}}=0=\left.\frac{\partial u_2}{\partial n}\right|_\Gamma^{\text{外}}\end{cases}$$

设 B_R 是以原点为心、R 为半径且包含 $\bar{\Omega}$ 的球。用 ∂B 记其边界，用 Ω_1 记 $B_R\cap\Omega'$。由于 $u\in H^1(\Omega)\cup W_0^1(\Omega')$，故 $\nabla u_1\in L^2(\Omega)$，$\nabla u_2\in L^2(\Omega_1)$（当 $x\in\Omega_1$）。于是可对 u_1、u_2 分别在 Ω 及 Ω_1 上使用 Green 第一公式，得

$$-\int_\Omega k^2|u_1|^2dx+\int_\Omega|\nabla u_1|^2dx=\int_\Gamma u_1\Big|_\Gamma^{\text{内}}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial n}\Big|_\Gamma^{\text{内}}d_0x=0$$

$$-\int_{\Omega_1}k^2|u_2|^2dx+\int_{\Omega_1}|\nabla u_2|^2dx=\int_{\partial B}u_2\frac{\partial u_2}{\partial n}d_0x-\int_\Gamma u_2\Big|_\Gamma^{\text{外}}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial n}\Big|_\Gamma^{\text{外}}d_0x$$

$$=\int_{\partial B}u_2\frac{\partial u_2}{\partial n}d_0x$$

将此二式相加，得

$$\int_{\partial B}u_2\frac{\partial u_2}{\partial n}d_0x=-k^2\int_\Omega|u_1|^2dx-k^2\int_{\Omega_1}|u_2|^2dx+\int_\Omega|\nabla u_1|^2dx+\int_{\Omega_1}|\nabla u_2|^2dx$$

由于 u_2 满足辐射条件且 $I_mk>0$，当 $R\to\infty$ 时，上式左端要趋于零，故右端的实部及虚部均趋于零，这蕴涵了 $u_1\equiv0$ 及 $u_2\equiv0$，即 $u\equiv0$（当 $x\in\mathrm{R}^3-\Gamma$）。这说明 (N') 若有解必是平凡解。

定义算子 $\boldsymbol{A}$ 为

$$(Aq)(y)=\int_{\Gamma}q(x)\frac{\partial^2}{\partial n_x\partial n_y}E(x,y)d_0x$$

则方程(3)可写为

$$Aq=g,\ 在\ \Gamma\ 上 \tag{4}$$

算子 A 是一个有主象征 $a_0(x,\xi)=|\xi|$ 的拟微分算子，故 A 是 $+1$ 阶的强椭园拟微分算子，因此，$\forall s\in R$，A 是 $H^{s+\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 至 $H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 的连续映射。由于它还满足 Garding 不等式，故还是一个零指标的 Fredholm 算子[6,7]。另外，已证方程(3)与问题(N)等价，在 $I_mk>0$ 的条件下，据引理问题(N)对应的齐次问题仅有平凡解，即问题(N)无特征值，故算子 A 是 $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 至 $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 的单射。(此时取 $s=0$) 还因 A 是零指标的 Fredholm 算子，A 又是满射从而是一个双射，即 $\forall g\in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$，方程(4)有唯一解 $q\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$。

综上所述，有以下结论：

定理 1 $\forall g\in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$，方程(3)在 $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 中有唯一解。且方程(3)与原边值问题(N)等价。

于是，为求原问题(N)的解，先求解边界积分方程(3)，得到 q 后将其代入(2)即可。但除非 Ω 非常特殊，很难求得方程(3)的精确解，因此在 Γ 上用有限元方法寻求(3)的近似解。注意到这个积分方程的核具有高阶奇异性，是不可积的，在使用有限元方法求近似数值解时，首先要寻求与方程(3)等价的便于进行数值计算的变分形式。转入下一节的讨论。

2 边界积分方程的近似解

由对偶原理知，与边界积分方程(3)等价的变分形式是

$$\begin{cases}求\ q\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)使得\\ b_1(q,q')=\int_{\Gamma}q'gd_0\qquad \forall q'\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\end{cases}\tag{5}$$

这里，双线性形式

$$b_1(q,q')=\frac{-1}{4\pi}\int_{\Gamma}\int_{\Gamma}q(x)q'(y)\frac{\partial^2}{\partial n_x\partial n_y}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}d_0xd_0y$$

对于 $q\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$，据前面的论述，对应着函数 $u\in M_0$ 使得

$$\begin{cases}\Delta u+k^2u=0,\ 在\ \Omega\ 及\ \Omega'\ 内,\\ [u]=q,\ 在\ \Gamma\ 上\end{cases}$$

记此函数 u 为 $u(q)$。对于任意 $q'\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$，对应着函数 $v(q')\in M_0$。由 Green 公式可推知原边值问题 (N) 有下列等价的变分形式：

$$b_2(q,q')=\int_{\Gamma}q'gd_0\qquad \forall q'\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\tag{6}$$

这里，双线性形式

$$b_2(q,q'):=\int_{\Omega}\nabla u(q)\nabla v(q')dx+\int_{\Omega'}\nabla u(q)\nabla v(q')dx-k^2\cdot$$

$$\left[\int_{\Omega} u(q)v(q')dx + \int_{\Omega'} u(q)v(q')dx\right]$$

比较(5)及(6)式知，与边界积分方程等价的变分形式也可以写成

$$(Q)\begin{cases} 求\ q \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\ 使得 \\ b_2(q,\ q') = \int_{\Gamma} q' g d_0, \qquad \forall q' \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \end{cases}$$

为寻求双线性形式 $b_2(q,\ q')$ 在离散化后便于进行数值计算的表达式，我们需要在 Γ 上引入一些微分算子。设 $\Psi(x)$ 是 Γ 的某邻域内任意一点 x 在 Γ 上的局部正交投影。对于定义在 Γ 上的任意函数 q，我们定义

$$\tilde{q}(x) = q(\Psi(x))$$

$$grad_{\Gamma} q(x) = grad\,\tilde{q}(x)$$

$$Cur\,l_{\Gamma} q(x) = n(x) \Lambda\, grad_{\Gamma} q(x)$$

这里，记号"$\cdot\Lambda\cdot$"表两向量的外积。于是有下列结果[10]：

变分形式(Q)中的双线性形式 $b_2(q,q')$ 由下式给出：

$$b_2(q,q') = \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}\int_{\Gamma} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\, curl_{\Gamma}\, q(x)\, curl_{\Gamma}\, q'(y)\cdot$$

$$\cdot d_0 x d_0 y - k^2 \int_{\Gamma}\int_{\Gamma} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} q(x) q'(y)(n_x,\ n_y) d_0 x d_0 y$$

为求问题(Q)的近似解，取分片多项式曲面 Γ_h 近似代替 Γ，构造 $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_h)$ 的有限维子空间 V_h，在 Γ_h 上建立有限元的 Galerkin 逼近。为便于讨论，设 Γ_h 由顶点在 Γ 上的一个个平面三角形构成，$V_h \subset C^0(\Gamma_h)$ 且由分片的一阶多项式构成。于是用下列问题来近似代替问题(Q)：

$$(Q_h) = \begin{cases} 求\ q_h \in V_h\ 使得 \\ \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_h}\int_{\Gamma_h} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\, curl_{\Gamma_h} q_h(x)\cdot curl_{\Gamma_h} q_h'(y) d_0 x d_0 y \\ - k^2 \int_{\Gamma_h}\int_{\Gamma_h} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} q_h(x) q_h'(y)(n_{hx},\ n_{hy}) d_0 x d_0 y \\ = \int_{\Gamma_h} g_h(y) q_h'(y) d_0 y \qquad \forall q_h' \in V_h \end{cases}$$

这里 g_h 是定义在 Γ_h 上的 g 的近似函数，且 n_h 是 Γ 的外法向量的分片一阶插值。

原问题(N)的近似解 u_h 是

$$u_h(y) = \frac{-1}{4\pi}\int_{\Gamma_h} q_h(x) \frac{\partial}{\partial n_{hx}} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} d_0 x, \quad \forall y \in \mathbf{R}^3 - \Gamma \tag{6}$$

3 误差估计

设 Γ_h 由顶点在 Γ 上的平面三角形组成：

$$\Gamma_h = \bigcup_{i=1}^{N} S_i$$

即Γ_h是在三角剖分$T_h=\bigcup_{i=1}^{N}K_i$下，$P=\mathrm{P}_1$的有限元构成。$S_i=\Phi_h(K_i)$，$i=1,2\cdots N$，$\Phi_h\in\mathrm{P}_1$。并设

$$V_h=\{q_h\in C^0(\Gamma_h)|\ q_h|_{S_i}\in\mathrm{P}_1,\ \ i=1,2\cdots N\}$$

则显然　$V_h\subset H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_h)$

由于变分问题(Q)与(5)等价，故(Q)的近似问题(Q_h)与下列(5)的近似问题等价：

$$(Q_h')\ \begin{cases}\text{求 } q_h\in V_h \text{ 使得}\\ b_h(q_h,\ q_h')=\langle g_h,\ q_h'\rangle \qquad \forall q_h'\in V_h\end{cases}$$

其中

$$b_h(q_h,\ q_h')=\frac{-1}{4\pi}\int_{\Gamma_h}\int_{\Gamma_h}q_h(x)q_h'(y)\frac{\partial^2}{\partial n_{hx}\partial n_{hy}}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}d_0xd_0y$$

$$\langle g_h,\ q_h'\rangle=\int_{\Gamma_h}g_h(y)q_h'(y)d_0y$$

我们利用(Q_h')来作误差估计。据有限元中熟知的结论，有

$$\left\|q-\tilde{q}_h\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}\leqslant C\left\{\left\|g-\tilde{g}_h\right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}+\inf_{\tilde{q}_h'\in\tilde{V}_h}\left[\left\|q-\tilde{q}_h'\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sup_{W_h\in\tilde{V}_h}\frac{|b(\tilde{q}_h',W_h)-b_h(\tilde{q}_h',W_h)|}{\left\|W_h\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}}\right]\right\}\leqslant C\left\{\left\|g-\tilde{g}_h\right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}+\right.$$

$$\left.\left\|q-r_hq\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}+\sup_{W_h\in\tilde{V}_h}\frac{|b(r_hq,W_h)-b_h(r_hq,W_h)|}{\left\|W_h\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}}\right\}\tag{7}$$

其中$\tilde{q}_h=q_h\circ\psi^{-1}$，$\tilde{V}_h=\psi(V_h)$，$r_h$是$L^2(\Gamma)$至$\tilde{V}_h$的投影算子。由于[4]

$$\left\|q-r_hq\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}\leqslant ch^{\frac{3}{2}}\left\|q\right\|_{H^2(\Gamma)}\tag{8}$$

故只须估计(7)式中的最后一项。为此，先把$b_h(\cdot,\cdot)$转换成Γ上的积分，得

$$b_h(r_hq,\ W_h)=\frac{-1}{4\pi}\int_{\Gamma}\int_{\Gamma}r_hq(x)W_h(y)\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial^2}{\partial n_{hx}\partial n_{hy}}\frac{e^{ik|\psi^{-1}(x)-\psi^{-1}(y)|}}{|\psi^{-1}(x)-\psi^{-1}(y)|}J(\psi^{-1}(x))J(\psi^{-1}(y))d_0xd_0y$$

其中$J(\psi^{-1})$是ψ^{-1}的Jacobi行列式。然后再把下面的差写成两项：

$$b(r_hq,\ W_h)-b_h(r_hq,\ W_h)=R_1+R_2$$

$$R_1=\frac{-1}{4\pi}\int_{\Gamma}\int_{\Gamma}r_hq(x)W_h(y)\frac{\partial^2}{\partial n_x\partial n_y}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}[1-J(\psi^{-1}(x))J(\psi^{-1}(y))]d_0xd_0y$$

$$R_2=\frac{-1}{4\pi}\int_\Gamma\int_\Gamma r_h q(x)W_h(y)\Big[\frac{\partial^2}{\partial n_x\partial n_y}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial n_x\partial n_y}\frac{e^{ik|\psi^{-1}(x)-\psi^{-1}(y)|}}{|\psi^{-1}(x)-\psi^{-1}(y)|}\Big]\cdot J(\psi^{-1}(x))J(\psi^{-1}(y))d_0xd_0y$$

在 R_1 中，由于 $[1-J(\psi^{-1}(x))J(\psi^{-1}(y))]$ 正是 Γ 与 Γ_h 上的面积元素之差，它有上界 ch^2。[4] 注意到双线性形式 $b(\cdot,\cdot)$ 在 $H^{\frac12}(\Gamma)\times H^{\frac12}(\Gamma)$ 上连续，有

$$|R_1|\leqslant ch^2\|r_hq\|_{H^{\frac12}(\Gamma)}\|W_h\|_{H^{\frac12}(\Gamma)} \tag{9}$$

关于 R_2，由于有

$$\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}=\frac{1}{|x-y|}+ik+O(|x-y|^3)$$

故只须对 $\frac{\partial^2}{\partial n_x\partial n_y}\frac{1}{|x-y|}-\frac{\partial^2}{\partial n_x\partial n_y}\frac{1}{|\psi^{-1}(x)-\psi^{-1}(y)|}$ 进行估计。而有以下的结果[9]：

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial n_x\partial n_y}\frac{1}{|x-y|}-\frac{\partial^2}{\partial n_{hx}\partial n_{hy}}\frac{1}{|\psi^{-1}(x)-\psi^{-1}(y)|}\right|$$

$$=\left|\frac{(n_x,n_y)}{|x-y|^3}-3\frac{(x-y,n_x)(x-y,n_y)}{|x-y|^5}-\frac{(n_{hx},n_{hy})}{|\psi^{-1}(x)-\psi^{-1}(y)|^3}+\right.$$

$$\left.+3\frac{(\psi^{-1}(x)-\psi^{-1}(y),n_{hx})(\psi^{-1}(x)-\psi^{-1}(y),n_{hy})}{|\psi^{-1}(x)-\psi^{-1}(y)|^5}\right|\leqslant\frac{ch^2}{|x-y|^3}$$

另外，容易证明（参阅[9]）$\left\{\int_\Gamma\int_\Gamma\frac{|q(x)-q(y)|^2}{|x-y|^3}d_0xd_0y\right\}^{\frac12}$ 是 $H^{\frac12}(\Gamma)$ 中与通常范数等价的范数，于是有

$$|R_2|\leqslant ch^2\left|\int_\Gamma\int_\Gamma\frac{r_hq(x)W_h(y)}{|x-y|^3}d_0xd_0y\right|\leqslant ch^2\|r_hq\|_{H^{\frac12}(\Gamma)}\|W_h\|_{H^{\frac12}(\Gamma)} \tag{10}$$

将式(9)与(10)综合，得到

$$\left|b(\widetilde{q}_h',W_h)-b_h(\widetilde{q}_h',W_h)\right|\leqslant ch^2\|\widetilde{q}_h'\|_{H^{\frac12}(\Gamma)}\|W_h\|_{H^{\frac12}(\Gamma)} \tag{11}$$

由积分算子 A 的强椭圆性可推知双线性形式 $b(\cdot,\cdot)$ 的 $H^{\frac12}(\Gamma)$ 一椭园性，再加上 (11) 式可推得双线性形式 $b_h(\cdot,\cdot)$ 的 V_h 一椭园性。这不但说明问题 (Q_h') 及 (Q_h) 有唯一解，也是我们应用式(7)的依据。

最后，将式(7)，(8)及(11)式综合，即得到

定理 2　设 q 及 q_h 分别是问题(Q)及问题(Q_h)的解，$q\in H^2(\Gamma)$，则

$$\|q-\widetilde{q}_h\|_{H^{\frac12}(\Gamma)}\leqslant c\left\{\|g-\widetilde{g}_h\|_{H^{-\frac12}(\Gamma)}+h^{\frac32}\|q\|_{H^2(\Gamma)}+h^2\|q\|_{H^{\frac12}(\Gamma)}\right\}$$

最后须得说明，本文的讨论是在 $I_mk>0$ 的条件下进行的，这是为了保证原问题 (N) 解

的存在唯一性，如果 $I_m k=0$，k 是非零实数(由于它在 Helmholtz 方程中以平方形式出现，可假设它为正数)，则内问题可能出现特征值。另外，证明原问题(N)解的存在唯一性，目前广泛使用两种方法。一种是证明其对应变分形式是适当 Sobolev 空间一椭圆的，从而由著名的 Lax-Milgram 定理得到；另一种是本文使用的方法，利用拟微分算子理论。

作者谨向祝家麟教授表示感谢。在本文撰写和完善的过程中，他提供了很好的意见和建议。

参 考 文 献

1 R.E.Kleinman & G.F.Roach. SIAM Review, 16, No2(1974), 214~236

2 R.E.Kleinman & R.Kress. IMA Journal of Applied Mathematics, 31(1983), 79~90

3 J.Giroire. Rapport Inferne, No 40(1978). Centre de Mathematiquess Appliqees -Ecold polytechnique

4 祝家麟. 椭圆边值问题的边界积分方程法，四川省计算数学学会暑期讲学班讲义，核工业部五八五所印，1983.7.

5 W.Jager, Math. Zeitschr, 102(1967), 62~88

6 G.C.Hsiao & W.L.Wendland. Journal Integral Equation, 3(1981), 299~315

7 M.Costabel & E.P.Stephan. J. Math. Anal Appl, 106(1985), 367~413

8 G.I.Eskin. Transl of Math.Mon.American Mathematics Society, 52, Providence Rhode Island(1981)

9 J.Giroire & J.C.Nedelec. Math.Comput, Vol32, No144 (1978.10), 973~990

10 J.c.Nedelec. Integral Equations and Operator Theory, Vol.5(1982), 562~572

(编辑：姚国安)

A BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR THE NEUMANN PROBLEM OF HELMHOLTZ EQUATION BY USE OF A DOUBLE LAYER POTENTIAL IN $\mathbf{R}^3$

Jin Chaosong

(Department of Natural Science)

ABSTRACT This paper presents a new numerical solution for Neumann problem of Helmholtz equation in $\mathbf{R}^3$. The expression of the solution for this problem is obtained by use of a double layer potential and it leads to a Fredholm boundary integral equation of the first kind. Then, the existence and unicity of the integral equation which is equivalent to the boundary value problem are obtained in a suitable Sobolev space. Finally, a variational form which is equivalent to the integral equation is applied to the construction of a finite element method and the error estimate is given.

KEY WORDS potential, Sobolev spaces, boundary integral equation, pseudo-differential operators, boundary element method