

概周期过程周期初态的虚拟寻优法

李远树 段文泽

(重庆大学) (重庆建筑工程学院)

摘 要 概周期过程最优控制的核心是周期初态的寻优。本文提出一种虚拟寻优法,再配之以周期之间适当的状态连接,既大大减少了计算量和存贮量,又收到了较好的优化效果。水厂最优控制的仿真验证了本文方法的有效性。

关键词 概周期过程, 最优递阶控制, 周期初态, 水厂控制

1 问题的提出

现有的最优控制理论已能较好地解决一大类问题,文[1]的后效型微分动态规划又进一步解决了时延系统的最优控制。但是在实践中还存在一大类“概周期过程”,即过程的主要特征大致是周期重复的,而整个过程在时间上几乎可以无限延伸。其最优控制模型可表达为

$$\text{mod } 1 \quad \min J = \sum_{k=0}^{\infty} L[x(k)u(k)] \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad x(k+1) = f[x(k), u(k), u(k-1)] \quad (2)$$

$$\min x \leq x(k) \leq \max x \quad (3)$$

$$\min u \leq u(k) \leq \max u \quad (4)$$

模型中状态的初值 $x(0)$ 可人为设定,因而对它也需寻优。显然,以无穷远的时间或很长的时间作终端时间去研究最优控制都是不可能的,只能分别研究每个周期的最优控制问题。

如果问题是准确地周期重复的过程,则每个周期的最优初态必相等,例如对第 T 和 $T+1$ 个周期,有

$$x_T^*(0) = x_{T+1}^*(0) \quad (5)$$

这时,只需研究一个周期,用熟知的任何方法对周期初态寻优,同时附加一个约束条件

$$x_T(N) = x_T^*(0) \quad (6)$$

即周期末(N 时刻)状态与初态相等。考虑到(5)式,这就保证了下一周期的初态与上一周

期的末态相等,保证了过程的连续性。

概周期过程情况略异。例如,城市或工厂供水系统的供水量以24小时为周期大致地重复,但下一天和上一天相比,又多少存在差别。作为近似处理,仍对每个周期选择相同的初态,按上述办法处理也是可以的^{[1][4]},但是,对固定初态的条件,决策是“最优”了,换个条件,若周期初态允许选择,却又可得出“更优”的结果。这时,约束式(6)不必遵守,但应有

$$x_T(N) = x_{T+1}^*(0) \quad (7)$$

周期初态的寻优,可采用0.618法、变步长法或随机收缩法等,但都将耗费较长的计算时间,不利于实时控制。本文提出的虚拟寻优法,将更为有效。

在解决周期初态寻优后,应按mod 1并附加约束式(7)求解,这时遇到的困难是 $x_{T+1}^*(0)$ 还未得出。为求得 $x_{T+1}^*(0)$,必须提前两个周期进行预报(例如提前两天对供水量进行预报),作为寻优的根据。但提前时间长了,预报准确性就更差。本文采取的作法是先放弃约束式(7)去寻优,然后对前一周期的“尾部控制”进行修正,以此解决状态连接问题,保证约束式(7)实现。这种作法在理论上看来并不严密,但在实践上却更好地解决了预报不准问题,同时也使得mod 1的寻优变得更为容易。

下面将以水厂最优协调控制问题为背景引入本文方法。

2 水厂最优协调控制模型

水厂最优协调控制的任务是在水网对各水厂作出最优负荷分配决策^[2],从而确定了水厂运转指令(出口压头及流量)之后,再考虑取水与送水泵站的协调,充分利用清水池的贮水作用对用电负荷调峰,使水厂运转成本最低。有别于文[1],现考虑每个周期可选择不同的最优初态,问题模型列写如下:

$$\text{mod 2} \quad J[u(\cdot)] = \min_{u(k)} \left\{ R[x(N) - x(0)]^2 + \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{H_0(k)}{\hat{\eta}_1(k)} u(k) - \frac{\hat{Q}(k)}{\hat{\eta}_2(k)} x(k) \right] \beta(k) \right\}, \quad k=0, 1, \dots, N-1 \quad (8)$$

$$\text{s.t.} \quad x(k+1) = x(k) + \left[\frac{T-\tau}{T} u(k) + \frac{\tau}{T} u(k-1) - \hat{Q}(k) \right] \frac{T}{S(k)} \quad (9)$$

$$u_{\min} \leq u(k) \leq u_{\max} \quad (10)$$

$$x_{\min} \leq x(k) \leq x_{\max} \quad (11)$$

其中: $x(N)$ 与 $x(0)$ 为本周期末时刻和初时刻的清水池水位, R 为很大的正数,因此目标函数的第一项是一个惩罚项,它使约束 $x(N) = x(0)$ 得到满足。引入这一约束的目的是考虑到过程的概周期特性,应有

$$x_T(0) \approx x_{T+1}(0) \quad (12)$$

故

$$x_T(N) \approx x_T(0) \quad (\text{过程连续性}) \quad (13)$$

$H_0(k)$ 为取水泵站静扬程, $u(k)$ 为其出口流量, 作协调控制量, $\hat{\eta}_1(k)$ 是对其总效率的估值, $\hat{Q}(k)$ 是对送水泵站供水量的预测, $x(k)$ 为清水池水位, 是协调控制中的状态变量, $\hat{\eta}_2(k)$ 是送水泵站总效率的估值, $\beta(k)$ 为电价函数, 是分段常值函数, T 为采样周期, τ 为送水泵站到清水池的纯滞后时间, $S(k)$ 为清水池横截面。

(8)式要求一个周期中运行费用最小, (9)式是清水池运动方程, 其中考虑了净水过程纯滞后 τ 的影响, (10) (11)式为物理约束。模型与文(1)模型主要不同之处在于没有要求周期初始状态 $x(0)$ 为常值, 因而需要寻优。

3 周期初态的虚拟寻优法

想要回避专门采用另外的寻优法对初态寻优, 设想将控制时刻向前拓展到 $k = -1$ 时刻, 在这一时刻, 系统在控制作用 $u(-1)$ 与 $u(-2)$ 的作用下, 状态由 $x(-1)$ 转移至 $x(0)$ 。我们的目的是要造成 $x(0)$ 的合理变化并在变化中寻优, 为此, 可将 $u(-2)$ 固定在上一周期得出的值上, 只是引入一个虚拟控制 $u(-1)$ 变化即可。 $x(0)$ 的合理变化表现为两点: 一是它应能在 x_{min} 与 x_{max} 之间取值; 二是应遵守运动方程(9), 以使算法递推公式保持一致性。考虑到上述各点, 我们定义:

1) $u(-1)$ 为无约束变量, 以便 $x(0)$ 能产生合理变化。这又是允许的, 因为它是虚拟变量;

$$2) \quad x(0) = x(-1) + \left[\frac{T-\tau}{T}u(-1) + \frac{\tau}{T}u(-2) - \hat{Q}(-1) \right] \frac{T}{S},$$

$$3) \quad x(-1) = \frac{1}{2} (x_{min} + x_{max});$$

$$\hat{Q}(-1) = \hat{Q}'(N-1) \quad (\hat{Q}'(N-1) \text{为上一周期的值})。$$

引入虚拟控制后, mod 2 变为

$$\text{mod 3} \quad J[u(\cdot)] = \min_{u(k)} \left\{ R[x(N) - x(0)]^2 + \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{H_0(k)}{\hat{\eta}_1(k)} u(k) - \frac{\hat{Q}(k)}{\hat{\eta}_2(k)} x(k) \right] \beta(k) \right\}, \quad k = -1, 0, 1, \dots, N-1 \quad (14)$$

$$\text{s.t.} \quad x(k+1) = x(k) + \left[\frac{T-\tau}{T}u(k) + \frac{\tau}{T}u(k-1) - \hat{Q}(k) \right] \frac{T}{S(k)} \quad (15)$$

$$u_{min} \leq u(k) \leq u_{max}, \quad k = -1, 0, 1, \dots, N-1 \quad (16)$$

$$x_{min} \leq x(k) \leq x_{max}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (17)$$

$$x(-1) = \frac{1}{2} (x_{min} + x_{max}) \quad (18)$$

$$u(-2) = u'(N-2) \quad (19)$$

其中, $u'(N-2)$ 为上一周期已得出的控制量。

mod 3 的求解可采用文[1]的后效型微分动态规划并与推广的正则化方法^[3]配合使用。这样,在对整个周期的最优控制寻优过程中,周期初态的最优值就自然地解决了。如果求解问题mod 3 需15分钟, $N=24$, 则用于初态寻优的时间只有 $15/25=0.6$ 分。设用0.618法对 $x(0)$ 寻优需进行10次迭代才能达到相同精度, 则将花去 $10 \times 15=150$ 分用于最优控制决策, 比初态不寻优时多了 $9 \times 15=135$ 分, 这在实际应用中是难以接受的。实际上需要的迭代次数还多于10次。利用虚拟寻优法时增加的贮存量只有 $u(-2)$, $u(-1)$, $x(-1)$, $Q(-1)$ 及 $x(0)$, 与0.618法一样, 增加的贮存量很少。

4 周期之间的状态连接

如果前后周期的负荷指令相同, 而且系统及环境特性未发生变化, 则前后两周期的最优控制和最优状态都相同, 从而有

$$x_T^*(0) = x_{T-1}^*(0) = x_{T-1}^*(N)$$

最优状态轨线在两周期交接处正好满足水位状态连续变化的要求。这时, 不需作任何修正。否则

$$x_T^*(0) \neq x_{T-1}^*(0) = x_{T-1}^*(N)$$

这时必须对前一运行周期的最优控制进行修正, 使状态满足连续变化的要求。实际上, 相邻两周期的最优初态相差不大, 只需对前一周期的“尾部控制”作少许修正即可。修正按以下三条原则进行:

- 1) 修正后的控制与状态应满足相应的状态方程和约束;
- 2) 前一周期末状态等于后一周期最优状态初值;
- 3) 当 $x_{T-1}^*(N) > x_T^*(0)$ 时, 考虑到应少抽水进入清水池, “尾部控制”应处于高电价段; 而当 $x_{T-1}^*(N) < x_T^*(0)$ 时, 在低电价段。

按上述原则连接, 用虚拟寻优法求得的最优状态轨线, 使最优控制在周期交接处具有可实现性, 同时还可实现用水负荷在相邻周期之间的有效分配。虽然这种连接方法具有经验性而缺乏严格的理论根据, 但由于修正量本身并不大, 所以结果仍是接近最优的。

5 仿真实验

前文已提到, 在解决概周期过程优化决策时, 一种方案是将周期初态固定在一个值上^[4], 另一方案则是利用虚拟寻优法对周期初态寻优。仿真实验的目的是比较两种方法取得的效果, 并将两者与恒水位控制进行比较。

实例: 某水厂的取水泵站和送水泵站均有6Sh-9A和10Sh-9型水泵各两台, 清水池截面积 $S=400000 \text{ dm}^2$, 池深4m, 泵站能力为 $30 \text{ l/s} \sim 440 \text{ l/s}$, 管网要求两天中的输出流量和压力如表1。取水泵站静扬程 $H_0=35 \text{ m}$, 电价时段函数

$$\beta(k) = \begin{cases} 0.1 \text{ 元/千瓦} \cdot \text{时}, & 0 \leq k < 6, 18 \leq k < 24; \\ 0.2 \text{ 元/千瓦} \cdot \text{时}, & 6 \leq k < 18 \end{cases}$$

采样周期 $T=1 \text{ h}$, 水位下限1m, 固定初态时, 清水池初始水位 $x_0(0)=3 \text{ m}$ 。

表 1

$K(h)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$Q_1(l/s)$	208	188	181	183	183	187	188	232	277	301	320	304
$Q_2(l/s)$	258	288	241	213	193	190	188	202	227	261	320	344
$K(h)$	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
$Q_1(l/s)$	294	300	293	286	280	278	280	290	283	233	225	203
$Q_2(l/s)$	374	350	303	286	252	270	291	300	323	293	275	263

$H = \text{const} = 34m$, Q_1, Q_2 为第一和第二天流量

取 $\eta_1(k) = \eta_2(k) = 0.9$

- 1) 令周期状态初值 $x(0) = x_0(0) = 3m$, 对 mod 2 的协调问题求解, 得最优控制 $u^*(k)$ 及状态轨线 $x^*(k)$ 如图 1 曲线 1;
- 2) 用虚拟寻优法对初始状态寻优, 按照 mod 3 求解, 得 $u^*(k)$ 与 $x^*(k)$ 如图 1 曲线 2;
- 3) 用恒水位控制方式, 取 $x(k) = 3m$, 则 $u^*(k)$ 与 $x^*(k)$ 如图 1 曲线 3.

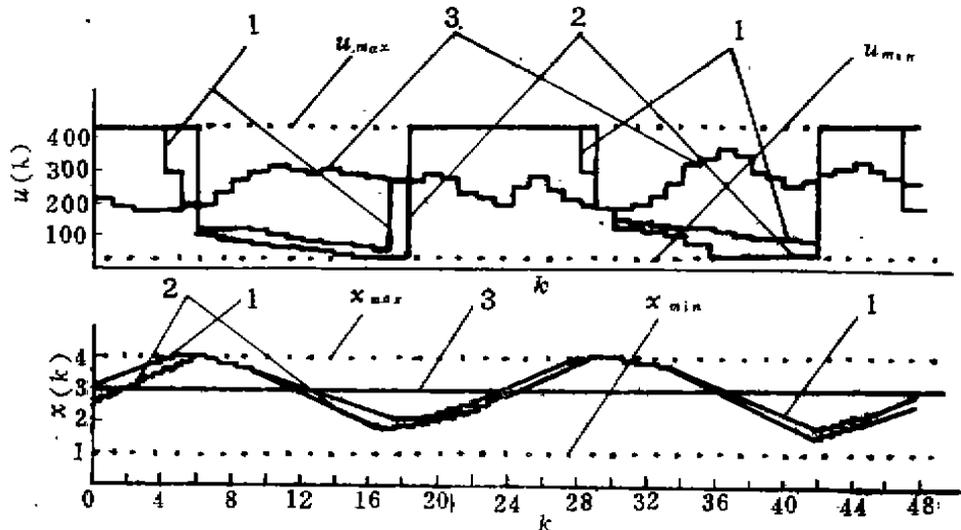


图 1 各种协调算法仿真对比

对应以上三种情况, 性能指标与节能率如表 2 所示 (以恒水位方案为基准作比较)。

仿真结果分析:

1) 由图 1 可见, 算法考虑的问题越是全面, 控制越是接近于砰一砰控制, 清水池的调节作用越大。 $x(k)$ 的平均值在波动幅度较大又不溢池的情况下, 尽量保持较高的数值, 以减轻送水泵站的压力负担。

表 2

指 标	方 法		
	固定初态	初态寻优	恒水位
性能指标	131123	128388	151960
节能率	15.89%	18.35%	0

2) 将 $x(0)$ 固定, 实质上是给优化问题引入了多余的约束, 给性能指标带来很大损失, 可从表2得见。

3) 在仿真研究中, 对多个不同的初始控制 $\bar{u}(k)$, 几种协调算法都能得出唯一最优解。其实, 最优解存在的唯一性取决于问题本身的凸性, 是可以证明的(略)。

4) 由于采用虚拟寻优法, 初态寻优比固定初态只增加极少计算量, 与前面分析是一致的。

由此可见, 用虚拟寻优法解决初态寻优问题, 在大大提高节能效果的同时, 只增加极少的计算工作量与存储量。

参 考 文 献

- 1 段文泽、杨少林. 后效型微分动态规划及其应用. 第五届全国电气自动化学术年会论文集, 1990
- 2 段文泽、刘士荣. 大规模供水系统的动态最优递阶控制. 系统工程理论与实践, 1990, 10(6)
- 3 D.H.Jacobson and J.L.Speyer. Necessary and Sufficient condition for singular Control Problem, A limit Approach. J.Math.Anal. Appl., Vol.34, 1971
- 4 段文泽、杨少林. 水厂最优节能递阶控制. 重庆建筑工程学院学报, 1990, 12(3)

(编辑: 刘家凯)

A FICTITIOUS CONTROL METHOD FOR OPTIMIZATION OF APPROXIMATE PERIOD PROCESS

Li Yuanshu

(Chongqing University)

Duan Wenze

(Chongqing Institute of Architecture and Engineering)

ABSTRACT The main problem in optimal control of approximate period process is the optimization of periodic initial state. A fictitious control method is advanced in this paper. In combination with the link method of states between two periods, this method not only gives a quite good optimal result, but also reduces the quantity to be computed and stored. The simulation of optimal control in a water plant shows the availability of this method.

KEY WORDS approximate periodic process, optimal hierarchical control, periodic initial state, water plant control