

计算空间框架结构固有频率 的波阵迭代法^①

刘龙泉
(建筑工程系)

摘 要 本文将波前法技术与逆幂法解特征值问题的迭代法相结合,用以计算空间框架结构的固有频率和周期,大大节省了计算机内存,编制了计算机程序,且给出了计算实例。

关键词 空间框架结构,固有频率,计算机内存

1 波阵迭代法

结构自由振动的微分方程为:

$$MU'' + KU = 0 \quad (1)$$

设 $U = Ye^{i\omega t}$

Y 为基本振幅, ω 为固有频率,将其代入(1)式得

$$\begin{aligned} KY &= \lambda MY \\ \lambda &= \omega^2 \end{aligned} \quad (2)$$

用逆幂法解特征值问题(2)的基本运算是每次迭代解一列方程组:

$$\begin{aligned} KY_{s+1} &= MX_s \\ X_{s+1} &= k_{s+1} Y_{s+1} \end{aligned} \quad (3)$$

式中: k 是正定对称阵,表示结构刚度矩阵, k_{s+1} 是适当的规范化因子, M 是质量矩阵, X_s 为第 s 次迭代试向量, Y_{s+1} 为第 $s+1$ 次解向量。

对于大型结构,联立方程(3)的规模是相当大的,这样不宜在中小型计算机上运行。本文采用波前法技术和外存容量来解决内存容量不足的问题。

联立方程(3)可写成:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n k_{ij} Y_{s+1, j} &= B_i \\ B_i &= \sum_{j=1}^n M_{ij} X_j \\ (i=1, 2, 3, \dots, n) \end{aligned} \quad (4)$$

对于求解方程(4),常规的高斯法是变量在矩阵中由上至下消元的,它要等到所有元素汇集后才能进行,对于大型结构,需要的内存容量是相当大的。

^①本文1990年1月10日收到

波阵法是不同于其它方法就在于, 只要对结构点有贡献的元素迭加完毕, 就可进行消元工作, 而不必等到所有元素组集后才能进行。

消元完成后, 该结点退出波阵, 接着迭加组集下一元素, 始此迭加与消元交替进行, 整个过程不形成, 也不贮存总刚度矩阵, 而所形成的回代信息又可转入外存。

事实上, 用波阵法求解时所形成的具有正定对称稀疏的系数矩阵的平衡方程为

$$\sum_{i=1}^{IWO} k_{ij} Y_i = B_j \quad (5)$$

(i=1, 2, 3, IWO)

式中: IWO 为波阵宽, $IWO \ll n$

n 为结构的总自由度

因此在内存中只需要存贮比总刚度矩阵小得多的波前刚度矩阵, 大大节省了计算机内存, 扩大了解题能力。

本文回代信息和质量矩阵全部转入硬盘, 每次迭代从外存中取出回代信息和质量矩阵。

2 单元分析

对于层、跨较大的空间框架结构, 当采用普通有限元法计算结构的动力问题时, 由于自由度很大, 因此需要的内存容量也很大, 但用采用波阵迭代法分析, 不但节省存贮单元, 且能得到较满意的结果。

2.1 局部坐标系中的单元分析

如图 1 所示, 一空间杆单元, 选局部坐标系时, 取纵轴形心轴为 \bar{x} 轴, 横截面形心主轴分别为 \bar{y} 和 \bar{z} 轴, \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} 轴符合右手定则, 这样单元在 \bar{XY} 面内的位移与在 \bar{XZ} 面内的位移是彼此独立的。

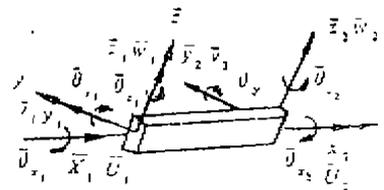


图 1

设杆件横截面面积为 A , 在 \bar{XY} 面的抗弯刚度为 $EI_{\bar{y}}$, 线刚度为 $i_{\bar{y}} = EI_{\bar{y}} / l$, 在 \bar{xz} 面内的抗弯刚度为 $EI_{\bar{z}}$, 线刚度为 $i_{\bar{z}} = EI_{\bar{z}} / l$, 抗扭刚度为 CJ 。

2.1.1 位移函数

$$\bar{u} = [1 - \bar{x}/l, \bar{x}/l] \quad [\bar{u}_1, \bar{u}_2]^T$$

$$\bar{\theta}_x = [1 - \bar{x}/l, \bar{x}/l] \quad [\bar{\theta}_{x1}, \bar{\theta}_{x2}]^T$$

$$\bar{V} = [1, \bar{x}, \bar{x}^2, \bar{x}^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/l^2 & -2/l & 3/l^2 & -1/l \\ 2/l^3 & 1/l^2 & -2/l^3 & 1/l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_{x1} \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_{x2} \end{Bmatrix}$$

$$\bar{w} = [1, \bar{x}, \bar{x}^2, \bar{x}^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3/l^2 & 2/l & 3/l^2 & 1/l \\ 2/l^3 & -1/l^2 & -2/l^3 & -1/l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{\theta}_{x1} \\ \bar{w}_2 \\ \bar{\theta}_{x2} \end{Bmatrix}$$

2.1.2 确定应变与端点位移的转换矩阵[B]

$$\text{梁的扭转应变: } v = r \frac{d\bar{\theta}_x}{d\bar{x}} = [-\bar{r}/l, \bar{r}/l] \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_{x1} \\ \bar{\theta}_{x2} \end{Bmatrix}$$

$$\text{式中: } \bar{r} = \sqrt{\bar{y}^2 + \bar{z}^2}$$

$$\text{梁的线应变: } \epsilon_x = \frac{d\bar{u}}{d\bar{x}} - \bar{y} \frac{d^2 \bar{v}}{d\bar{x}^2} - \bar{z} \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2}$$

即

$$\epsilon_x = \left[-1/l, (6/l^2 - 12\bar{x}/l^3) \bar{y}, (-4/l + 6\bar{x}/l^2) \bar{z}, \right. \\ (6/l^2 - 12\bar{x}/l^3) \bar{z}, (4/l - 6\bar{x}/l^2) \bar{y}, 1/l, \\ (12\bar{x}/l^3 - 6/l^2) \bar{y}, (6\bar{x}/l^2 - 2/l) \bar{z}, \\ \left. (12\bar{x}/l^3 - 5/l^2) \bar{z}, (2/l - 6\bar{x}/l^2) \bar{y} \right]$$

$$[\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{\theta}_{x1}, \bar{w}_1, \bar{\theta}_{x1}, \bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{\theta}_{x2}, \bar{w}_2, \bar{\theta}_{x2}]^T$$

$$\text{设 } f_1(\bar{x}) = -1/l, \quad f_2(\bar{x}) = 4/l - 6\bar{x}/l^2,$$

$$f_3(\bar{x}) = 2/l - 2\bar{x}/l^2, \quad f_4(\bar{x}) = 6/l^2 - 12\bar{x}/l^3$$

则

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & f_4 \bar{y} & -f_2 \bar{z} & f_4 \bar{z} & f_2 \bar{y} & -f_1 & 0 & -f_4 \bar{y} & -f_3 \bar{z} & -f_4 \bar{z} & f_3 \bar{y} \\ 0 & f_1 \bar{r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -f_1 \bar{r} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{u}_1, \bar{\theta}_{x1}, \bar{v}_1, \bar{\theta}_{x1}, \bar{w}_1, \bar{\theta}_{x1}, \bar{u}_2, \bar{\theta}_{x2}, \bar{v}_2, \bar{\theta}_{x2}, \bar{w}_2, \bar{\theta}_{x2}]^T$$

因此

$$[B] = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & f_4 \bar{y} & -f_2 \bar{z} & f_4 \bar{z} & f_2 \bar{y} & -f_1 & 0 & -f_4 \bar{y} & -f_3 \bar{z} & -f_4 \bar{z} & f_3 \bar{y} \\ 0 & f_1 \bar{r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -f_1 \bar{r} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.1.3 单元刚度阵

$$\text{由 } [\bar{K}]^e = \int_V [B]^T [E]^e [B] dV \text{ 与 } [E]^e = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \text{ 得}$$

$$[\bar{K}]^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12I_y}{l^3} & 0 & 0 & \frac{6I_x}{l} & 0 & 0 & -\frac{12I_x}{l^3} & 0 & 0 & \frac{6I_z}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 4I_y & -\frac{6I_z}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2I_y & \frac{6I_x}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6I_z}{l} & \frac{12I_y}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6I_z}{l} & -\frac{12I_x}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6I_x}{l} & 0 & 0 & 4I_x & 0 & 0 & -\frac{6I_x}{l} & 0 & 0 & 2I_x \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{12I_x}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{6I_z}{l} & 0 & 0 & \frac{12I_x}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{6I_z}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 2I_y & -\frac{6I_z}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 4I_y & \frac{6I_x}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6I_z}{l} & -\frac{12I_y}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6I_z}{l} & \frac{12I_x}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6I_z}{l} & 0 & 0 & 2I_x & 0 & 0 & -\frac{6I_z}{l} & 0 & 0 & 4I_x \end{bmatrix} \cdot \rho$$

2.1.4 单元一致质量矩阵

一致质量矩阵为 $[\bar{M}] = \int_V \rho f^T f dV$ 式中, ρ 为质量密度

$$\int_V \rho f^T f dV = \begin{bmatrix} \frac{Al}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Al}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6I_y}{5l} & 0 & 0 & \frac{I_x}{10} & 0 & 0 & -\frac{6I_z}{5l} & 0 & 0 & \frac{I_z}{10} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2I_y}{15}l & -\frac{I_z}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{I_z}{30} & \frac{I_y}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{I_z}{10} & \frac{6I_y}{5l} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{I_z}{10} & -\frac{6I_z}{5l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_x}{10} & 0 & 0 & \frac{2I_x}{15}l & 0 & 0 & -\frac{I_x}{10} & 0 & 0 & -\frac{I_z}{30} \\ \frac{Al}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Al}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6I_x}{5l} & 0 & 0 & -\frac{I_x}{10} & 0 & 0 & \frac{6I_x}{5l} & 0 & 0 & -\frac{I_x}{10} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{I_z}{30} & -\frac{I_z}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2I_y}{15}l & \frac{I_y}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I_x}{10} & -\frac{6I_z}{5l} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_x}{10} & \frac{6I_x}{5l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_z}{10} & 0 & 0 & -\frac{I_x}{30}l & 0 & 0 & -\frac{I_x}{10} & 0 & 0 & \frac{2I_x}{15}l \end{bmatrix} \cdot \rho$$

$$\int_V \rho f_v^T f_v dV = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_y I}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_x I}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13Al}{35} & 0 & 0 & \frac{11Al^2}{210} & 0 & 0 & \frac{9Al}{70} & 0 & 0 & -\frac{213Al^2}{420} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11Al^2}{210} & 0 & 0 & \frac{Al^3}{105} & 0 & 0 & \frac{13Al^2}{420} & 0 & 0 & -\frac{Al^3}{140} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_y I}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_x I}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9Al}{70} & 0 & 0 & \frac{13Al^2}{420} & 0 & 0 & \frac{13Al}{35} & 0 & 0 & \frac{11Al^2}{210} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{13Al^2}{420} & 0 & 0 & -\frac{Al^3}{140} & 0 & 0 & -\frac{11Al^2}{210} & 0 & 0 & \frac{Al^3}{105} \end{bmatrix} \cdot \rho$$

$$\int_V \rho f_v^T f_w dV = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_y I}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_x I}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Al^3}{105} & -\frac{11Al^2}{210} & 0 & 0 & 0 & -\frac{Al^3}{140} & -\frac{13Al^2}{420} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{11Al^2}{210} & \frac{13Al}{35} & 0 & 0 & 0 & \frac{13Al^2}{420} & \frac{9Al}{70} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9I_x I}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_x I}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{Al^3}{140} & \frac{13Al^2}{420} & 0 & 0 & 0 & \frac{Al^3}{105} & \frac{11Al^2}{210} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{13Al^2}{420} & \frac{9Al}{70} & 0 & 0 & 0 & \frac{11Al^2}{210} & \frac{13Al}{35} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \rho$$

2.2 整体坐标系中的单元分析
单元坐标转换矩阵为

$$[T] = \begin{bmatrix} [l] & 0 \\ 0 & [l] \end{bmatrix}$$

$$[l] = \begin{bmatrix} l_{\bar{x}x} & 0 & l_{\bar{x}y} & 0 & l_{\bar{x}z} & 0 \\ 0 & l_{\bar{y}x} & 0 & l_{\bar{y}y} & 0 & l_{\bar{y}z} \\ l_{\bar{z}x} & 0 & l_{\bar{z}y} & 0 & l_{\bar{z}z} & 0 \\ 0 & l_{\bar{x}x} & 0 & l_{\bar{x}y} & 0 & l_{\bar{x}z} \\ 0 & l_{\bar{y}x} & 0 & l_{\bar{y}y} & 0 & l_{\bar{y}z} \\ 0 & l_{\bar{z}x} & 0 & l_{\bar{z}y} & 0 & l_{\bar{z}z} \end{bmatrix}$$

式中 l_{ij} 为局部坐标 \bar{i} 与整体坐标 j 之间共角的余弦。

$$\bar{i} = \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; j = x, y, z$$

单元刚度阵的转换关系。

$$[K]^e = [T]^T [\bar{K}]^e [T]$$

单元质量阵的转换关系

$$[M]^e = [T]^T [\bar{M}]^e [T]$$

3 算例分析

如图 2 所示框架结构, 梁截面 250×250 , 柱截面 500×600 , II 级钢筋混凝土并 300, 计算结果 (周期) 见下表:

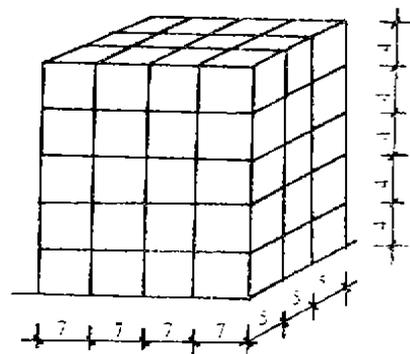


图 2

阶次	1	2	3	4	5
一般有限元方法	0.52	0.47	0.38	0.36	0.32
本方法	0.50	0.46	0.37	0.34	0.30
误差	3.6%	3.7%	4.2%	4.6%	6.9%

4 结论

本文采用波前法与迭代法相结合来计算空间框架结构的固有频率和周期。结果表明,

与一般有限元法计算非常接近,能满足工程要求。但前者由于不形成也不贮存总刚,因此所占内存较一般元法少得多,对于在小型机上计算大型空间框架结构的固有频率和周期是一种有效的方法。

参 考 文 献

- 1 谢始权,何福保,《弹性和塑性力学中的有限元集法》,机械工业出版社,1983北京
- 2 刘德贵等,《FORTRAN算法汇编》,国防工业出版社,1983,年第一版
- 3 胡海昌,《多自由度结构固有振动理论》,科学出版社,1987,北京
- 4 (日)产川隼人,《振动分析的有限元法》,地震出版社,1987,北京
- 5 英E.欣顿,P.R.J.欧文,《有限元程序设计》,新时代出版社,1984
- 6 王汝恒,动态子结构的简化凝聚方法及应用,重庆建工学院科技情报室,1988

(编辑:徐维森)

FREQUENCY CALCULATION OF SPACE FRAME STRUCTURE BY A WAVEFRONT AND AN ITERATED POWER METHOD

Liu Longquan

(Department of Civil Engineering)

ABSTRACT In this paper,the frequency of space frame structure is obtained by a wavefront and an iterated power method. The computer internal storage is greatly saved. The solution so obtained is quite in agreement with the finite solution.

KEY WORDS structure of space frame, frequency calculation, computer internal storage