重	庆	銉	筑	Ē.	程	亗	院	坣	报	
		~~~~				- T	1/14		10	

第13卷第2期	JOURNAL OF CHONGQING INSTITUTE OF	Vol.13	No.2
1991 年6月	ARCHITECTURE AND ENGINEERING	June	1991

# 开洞地基与框架结构相互作用的耦合分析法

## 罗济章 刘正保

(重庆建筑工程学院) (南阳大学)

摘 要 本文采用有限元和边界元的耦合方法探讨了开洞地基与上部结构的相 互作用。开洞地基用边界元法,上部结构用有限元法,以两部分交接面上的位移协调 和力的平衡条件作为耦合分析的条件,对二维弹性问题在电子 计算 机 SIEMENS 7570C 上编制了通用程序。文中计算了两个工程实例,并与该两工程按常规法计算 的结果,以及现场观测情况作了比较,表明在较软弱的开洞地基中考虑相互作用影 响的必要性。

关键词 有限元法,边界元法,开洞地基,耦合分析,框架结构

引 言

本文将位于地表上的地面结构称为上部结构,有浅埋地下洞室的地基称为开洞地基。

由于位于岩石地层的城市建设中,常会遇到历史上遗留下来的浅埋洞室,或因利用地下 空间欲新建或扩建地下洞室,而造成地面建筑与地下洞室的相互干扰,有时甚至造成工程病 害。原因可能是多方面的,但在计算方法上采用常规的将上部结构与开洞 地基 分别独立计 算,按静力平衡条件,通过荷载传递相互联系在一起的问题在于:并未保证两者在界面间的 变形协调关系。显然,这与实际情况不符。实际上应将两者视为不可分割的整体,按共同工 作进行分析,考虑其间的相互作用,不仅保证各部份的静力平衡条件,还应保证它们在界面 上的位移连续条件。

国内外学者已对上部结构与地基的共同作用的研究取得了许多成果,但对有浅埋洞室的 地基与上部结构的相互作用的研究似不如前者。本文则是在前人成果的基础上,根据当前城 市建设中所遇到的问题,试图用有限元与边界元的耦合方法对上述问题进行初步探索和分 析,为城市建设提供参考。

本文1990年8月27日收到。

## 1 基本假设和计算模型

2

现假定:(1)地面建筑在纵向较长,将其简化为平面杆系结构;(2)开洞地基为均质各向同性弹性体,受力状态属平面应变问题;(3)地下洞室的纵轴很长且与地面框架的结构平面垂直。

计算模型可根据不同的加载途径,将上下两部份的相互作用分成两种情况:

(1) 先开洞后建房情况(图1)



基本物性、洞室的位置和大小形状有 关外,而且还因建房前洞室已先形

成,围岩在初始应力作用下已经发生

图2 先建房后挖洞计算模型

附加应力

应力重分布,故相互作用又与应力重分布后的地基应力状态有关。

(2) 先建房后挖洞情况(图2)

这里除与前述的因素有关外,还与地基的初始应力状态有关。可视为图中三种情况的迭 加。

以上两种情况,当划定的地基边界足够远时,可认为两侧及底部边界近似满足位移为零 的约束条件。

## 2 上部结构的有限元子结构法

无论杆系、平面或空间结构,均可离散成许多一维、二维或三维单元的组合体,分别在 局部坐标下建立单元刚度矩阵,再转换成整体坐标下的单元刚度矩阵,并集合成总刚度矩 场,于是有

$$[K]{\delta} = {P}$$
(1)

其中,[K]为结构总刚度矩阵, $\{\delta\}$ 为节点位移列阵, $\{P\}$ 为节点荷载列阵。

子结构的划分是任意的,可以是一部份单元或某一个单元。但对每一个子结构均可得到 其平衡方程为

$$[K_c]{u_c} = \{P_c\}$$
(2)

其中,  $[K_o]$  为含边界杆件刚度在内的总体刚度矩阵,  $\{u_o\}$  是含边界节点位移在内的节点位移列阵,  $\{P_o\}$ 是含边界节点荷载在内的节点荷载列阵。

用分块矩阵的形式将式(2)中与子结构内部自由度有关的元素和与边界自由度有关的 元素分开,并以下标;表示内部自由度,下标 b表示边界自由度,则式(2)可写成

$$\begin{pmatrix} K_{ii} & K_{ib} \\ K_{bi} & K_{bb} \end{pmatrix} \begin{cases} u_i \\ u_b \end{cases} = \begin{cases} P_i \\ P_b \end{cases}$$
(3)

子结构的分析可分三步进行:

第一步 边界节点受到人为约束时的分析。因边界节点受到人为约束,则 $\{u_b^{(1)}\}=0$ ,  $\{P_i^{(1)}\}=\{P_i\}$ 。此时,相应的式(3)成为

$$\binom{K_{ii} \quad K_{ib}}{K_{bi} \quad K_{bb}} \left\{ \begin{array}{c} u_i^{(1)} \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} P_i \\ P_b^{(1)} \end{array} \right\}$$

$$(4)$$

展开上式,可分别得到当边界节点受到人为约束时,由于子结构上荷载所引起的内部节点位  $8 \{u_i^{(1)}$ 和边界节点反力  $\{P_b^{(1)}\}$ ,为

$$\{u_i^{(1)}\} = [K_{ii}]^{-1}\{P_i\}$$
(5)

$$\{P_b^{(1)}\} = (K_{b_i})(K_{i_i})^{-1}\{P_i\}$$
(6)

第二步 边界节点上人为约束完全解除时的分析。因荷载影响已在第一步中考虑,故 $\{P_{i}^{(2)}\}=0, \{u_{b}^{(2)}\}=\{u_{b}\}$ 。此时,相应的式(3)成为

$$\binom{K_{ii} \quad K_{ib}}{K_{bi} \quad K_{bb}} \left\{ \frac{u_i^{(2)}}{u_b} \right\} = \left\{ \frac{0}{P_b^{(2)}} \right\}$$
 (7)

展开上式,可分别得到由于边界节点的实际位移所引起的内部节点位移 {u/2,为

$$\{u_i^{(2)}\} = -(K_{ii})^{-1}(K_{ib})\{u_b\}$$
(8)

以及当子结构的边界发生实际位移  $\{u_b\}$ 时所引起的边界节点反力,即等效边界荷 载  $\{P_b^{(2)}\}$ 为

$$\{P_{b}^{(2)}\} = (K_{b}^{*})\{u_{b}\}$$
(9)

其中, [K*] 为等效边界刚度, 即

$$(K_b^{\bullet}) = (K_{bb}) - (K_{bi})(K_{ii})^{-1}(K_{ib})$$
(10)

第三步 送加前两步结果便得到子结构的实际位移和实际内力。子结构的内部节点实际 位移为  $\{P_b\} = \{P_b^{(1)}\} + \{P_b^{(2)}\}$ 

$$\{u_i\} = \{u_i^{+1}\} + \{u_i^{+2}\}$$
  
=  $[K_{ii}]^{-1}\{P_i\} - [K_{ii}]^{-1}[K_{ib}]\{u_b\}$  (11)

故等效边界荷载为

$$\{P_{b}^{(2)}\} = \{P_{b}\} - \{P_{b}^{(1)}\}$$
$$= \{P_{b}\} - (K_{b_{i}})(K_{i_{i}})^{-1}\{P_{i}\}$$
(12)

将上式代入式(9)得边界刚度方程为

$$(K_b^*)\{u_b\} = \{P_b\} - (K_{b_i})\{K_{i_j}\}^{-1}\{P_i\}$$
(13)

子结构的求解过程,实质上是刚度层层凝聚,荷载层层传递和层层反算的过程(图3)。当分析某一重子结构时,令它与下一重子结构的共同边界点受到人为约束,但与前一重子结构的共同边界点受到人为约束,但与前一重子结构的共同边界点被放松。

## 3 开洞地基的边界元法

边界单元法是将偏微分方程的定解问题化为边界 积 分 方 程 来求解,实际上是求解相应偏微分方程定解问题的边界积分方程 的一种数值解法。如果把开洞地基视为带孔洞的半无限弹性平面

问题,由弹性力学可知,所求得的变形状态必须满足弹性力学基本方程和边界条件,并且这些方程的解存在时,若不考虑刚体位移,则解是唯一的。在弹性力学中,开尔文(Kelvin)解对边界积分方程的导出及求解过程将起到重要作用,它实质上就是弹性力学平衡微分方程(Navier)的基本解。为方便计,开尔文解就是求无限大弹性体中,在 p 点 作用一分量大小均为1的集中力 e_i,而在 g 点点产生的位移,即

$$u_{i}^{*}(p,q) = U_{ii}(p,q)e_{i}$$
 (14)

式中,  $U_{ii}(p,q)$  表示在 $p \leq x_i$  方向作用一单位集中力时, 在 $q \leq x_i$  方向产生的位移, 表达 式为

$$U_{ij}(p,q) = \frac{1}{8\alpha\pi G(1-\nu)r^{\alpha-1}} \left\{ (3-4\nu)\delta_{ij}((\alpha-2)\ln r + \alpha - 1) + r_{ij}r_{ij} \right\}$$
(15)

利用物理方程,几何方程和斜面上的应力计算公式可得到相应的面力,其表达式为

$$\tau_i^{\bullet}(p,q) = T_{ij}(p,q)e_i \tag{16}$$

式中,  $T_{ij}(p,q)$  表示在 $p \leq x_i$  方向作用一单位集中力时, 在 $q \leq x_j$  方向产生的面力, 表达 式为

$$T_{ij}(p,q) = \frac{-1}{4a\pi(1-\nu)r^{\alpha}} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[ (1-2\nu)\delta_{ij} + \beta r_{j}r_{j} \right] - (1-2\nu)(n_{j}r_{j} - n_{i}r_{j}) \right\}$$
(17)

现在,可利用 Betti 互换定理和开尔文解来导出弹性体内部位移与边界位移、面力及弹性体体力之间的积分关系,即Somigliana 位移公式,为



子结构求解过程

图 3

其中,  $\Gamma$ 为区域 $\Omega$ 的边界,  $p,q \in \Omega$ ,  $Q \in \Gamma$  (见图4)。 由几何方程、物理方程及 Somigliana 位移公式可导出相应的弹 性体内部应力与边界位移、面力及弹性体体力之间的积分关系, 即 Somigliana 应力公式,为

$$\sigma_{ij}(p) = \int_{\Gamma} P_k(Q) D_{ijk}(p,Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} u_k(Q) S_{ijk}(p,Q) d\Gamma(Q) \qquad (19)$$

$$+ \int_{\Omega} b_k(q) D_{ijk}(p,q) d\Omega(q) \qquad (19)$$

其中,  $p,q \in \Omega$ ,  $Q \in \Gamma$ 

$$D_{ijk}(p,Q) = \frac{1}{4a\pi(1-\nu)r^{a}} [(1-2\nu)(\delta_{ik}r_{,j}+\delta_{jk}r_{,i}-\delta_{ij}r_{,k})+\beta r_{,i}r_{,j}r_{,j}k]$$
(20)  

$$S_{ijk}(p,Q) = \frac{G}{2a\pi(1-\nu)r^{\beta}} \left\{ \beta \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k}+\nu(\delta_{ik}r_{,j}+\delta_{jk}r_{,i}) -\gamma r_{,i}r_{,j}r_{,k}] +\beta \nu(n_{i}r_{,j}r_{,k}+n_{j}r_{,i}r_{,k}) +(1-2\nu)(\beta n_{k}r_{,i}r_{,j}+n_{j}\delta_{ik}+n_{i}\delta_{jk}) -(1-4\nu)n_{k}\delta_{,j} \right\}$$
(21)

以上各式中, E为弹性模量, v 为泊松比, G 为剪切模量, 即G=E/2(1+v), r 为荷载作用 点到域内任一点的距离, n 表示边界点的法向量, n; 为法向量在下标为; 方向的分量, 即方 向余弦,且有

$$r_{i} = \frac{\partial r}{\partial x_{i}} = \frac{r_{i}}{r}, \qquad \frac{\partial r}{\partial n} = n_{1}r_{i},$$
$$a = 1 \quad \beta = 2 \quad \gamma = 4$$

对二维问题 i,j,k=1,2 对三维问题 *i*,*j*,*k*=1,2,3 α=2 β=3 γ=5

根据 Somigliana 位移公式。并利用矢量位的性质便可建立边界积分方程,为

$$C_{ij}(P)u_{j}(P) + \int_{\Gamma} u_{j}(Q)T_{ij}(P,Q)d\Gamma(Q)$$
$$= \int_{\Gamma} P_{i}(Q)U_{ij}(P,Q)d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} b_{j}(q)U_{ij}(P,q)d\Omega(q)$$
(22)

式中,  $q \in \Omega, P, Q \in \Gamma$ 。当P点处于光滑边界时, $C_{ii}(P) = \frac{1}{2} \delta_{ij}$ , P点处于角点时, $C_{ij}(P)$ 是

一个与P点处边界状况有关的常数,经对角点作适当处理后,就可避免直接求 $C_{ij}(P)$ 。 将边界离散成一系列的边界单元,并选择适当的形函数,则边界积分方程(22)的矩阵

形式为  $(H){u} = (G){P} + {B}$ 

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$$

5

式中,〔H〕、〔G〕分别为位移和面力影响系数,矩阵{B}为体力项,均为已知量。岩边界节 点上一部分位移分量和面力分量已知,则式(23)就是一个以边界节点上其余未知位移和面 力分量为未知量的线性代数方程组。求得边界上的位移和面力分量后,便可利用Somigliana 位移和应力公式,得到弹性体内任一点的位移及应力分量。

## 4 有限元与边界元的耦合分析

图 5 所示上部结构采用有限元法,开洞地基采用边界元法,两部份组成的相互作用系统的耦合分析必须保证在它们的共同边界上的内力平衡和位移协调。为简化计,开洞地基可取

一有限域来考虑,若划定的边界足够远时,可认为两侧及底部边界近似满足位移为零的条件。设 $\Omega_1$ 为有限元域, $\Omega_2$ 为边界元区域, $\Gamma_1$ 为两部份的共同边界, $\Gamma_2$ 为 $\Omega_2$ 的非共同边界。

在有限元区域中取地基梁为最后一重 子结构,类似于式(.3)得到求解地基梁 的基本方程为

$$\begin{pmatrix} K_{ii} & K_{ib} \\ K_{bi} & K_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_i \\ P_b \end{pmatrix}$$
(24)

式中,下标;表示地基梁中与边界元部份 的独立自由度,下标 b表示地基梁中与边 界元部份进行耦合的自由度。

求解边界元部份的基本方程,可将式 (23)进行分块处理,分解出与有限元不

相联系的边界未知量和需要进行耦合的边界未知量,则

$$\begin{pmatrix} H_{BB} & H_{BI} \\ H_{IB} & H_{II} \end{pmatrix} \begin{cases} u_B \\ u_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{BB} & G_{BI} \\ G_{IB} & G_{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_B \\ P_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_B \\ B_I \end{pmatrix}$$
(25)

式中, 下标 *I* 表示边界元区域中与有限元部份不相联系的边界未知量, 下标*B* 表示边界元区域中与有限元部份需进行耦合的边界未知量。

在共同划分单元时,应使有限元部份的地基梁的节点与边界元部份的节点一一重合,两 部份在共同边界上应满足位移连续条件。

$$\{\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{b}}\} = \{\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{B}}\} \tag{26}$$

注意到有限元部份的转角自由度 θ 是与边界元部份相互独立的,可将 θ 作为有限元子结构(地基梁)的内部自由度,通过子结构法的等效边界刚度及等效边界荷载将 θ 的贡献传递 到地基部份。对式(24)经凝聚处理,可得到地基梁的边界刚度方程为

$$(K_b^{\bullet})\{u_b\} = \{P_b\} - (K_{b_i})(K_{i,i})^{-1}\{P_i\}$$
(27)

在应用两部份在共同边界上的平衡条件时,应注意到式(24)中的{P₆}表示有限元的等效节



图5 开洞地基与上部结构相互作用系统

点荷载,而式(25)中的{*P*_B}则表示地基分布反力在边界节点位置的值, 故应将边界的分布 反力转化为等效集中力。为此, 令

$$\{\widetilde{P}_B\} = [M]\{P_B\}$$
(28)

其中,  $\{\widetilde{P}_B\}$ 为转换后的边界节点集中力; (M)为将分布反力转换为节点集中力的转换矩阵, 可按虚功原理导出, 它与单元的形函数 $\phi_1$ ,  $\phi_2$ 有关, 并由单元转换矩阵(m); 送加而成。单元转换矩阵的表达式为

$$(m)^{i} = \begin{cases} \int_{\Gamma_{i}} \phi_{1}^{2} d\Gamma & 0 & \int_{\Gamma_{i}} \phi_{1} \phi_{2} d\Gamma & 0 \\ 0 & \int_{\Gamma_{i}} \phi_{1}^{2} d\Gamma & 0 & \int_{\Gamma_{i}} \phi_{1} \phi_{2} d\Gamma \\ \int_{\Gamma_{i}} \phi_{1} \phi_{2} d\Gamma & 0 & \int_{\Gamma_{i}} \phi_{2}^{2} d\Gamma & 0 \\ 0 & \int_{\Gamma_{i}} \phi_{1} \phi_{2} d\Gamma & 0 & \int_{\Gamma_{i}} \phi_{2}^{2} d\Gamma \end{cases}$$
(29)

当采用线性单元时,若单元;的长度为1,则

$$(m)^{i} = \frac{l_{i}}{6} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$
(30)

由节点力的平衡条件知

$$\{P_b\} = -(M)\{P_B\}$$
(31)

将上式代入地基梁的边界刚度方程(27)中得

$$\{P_B\} = -(M)^{-1}((K_b^{\bullet})\{u_b\} + (K_{b_i})(K_{i_j})^{-1}\{P_i\})$$
(32)

再将式(26)及(32)代入式(25)中,经整理后,则可得到耦合分析的最终求解方程为

$$\begin{pmatrix} H_{BB} + G_{BB}M^{-1}K_{b}^{\bullet} & H_{BI} \\ H_{IB} + G_{IB}M^{-1}K_{b}^{\bullet} & H_{II} \end{pmatrix} \begin{cases} u_{B} \\ u_{I} \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{BB} & G_{BI} \\ G_{IB} & G_{II} \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{B}^{\bullet} \\ P_{I} \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{B} \\ B_{I} \\ \end{pmatrix}$$
(33)

其中

$$\{P^{\bullet}\} = -(M)^{-1}(K_{b_i})(K_{i_i})^{-1}\{P_i\}$$
(34)

若不计体力影响,则式(33)中体力项{B}=0,此时计算更为简化。

由方程 (33) 便可以从已知的边界条件先求出共同边界上的 u_B 及 非共同边界上的未知 量,而后代回式 (32) 得到共同边界上的应力 P_B,即基底反力。于是边界元区域的全部边 界节点的位移和面力均已求出,从而可以利用前述的 Somigliana 位移和应力公式求出地基 内任一点处的位移和应力。对基础和上部结构进行反算时,"可将共同边界上的u_B 作为最后一 重子结构 (基础)的边界条件,逐层反算,问题便得到解决。

对于先建房后挖洞情况,可按图 2 等号右边的三种图式分别算出各图结果后迭加,即可 得出该情况的实际结果。

#### 5 工程算例

本文所述的耦合分析, 对二维弹性问题用 FORTRAN 语言编写了 电算程序,并在 SIEMENS 7570C 机上实现。以下是两个工程算例:

图 6 为某市位于闹市区附近的某工程断面。本例在其它条件相同时,对给定的地 例1 基刚度,选取不同埋置深度进行计算,并与常规法的计算结果进行比较。计算结果见图7~10.



可不考虑相互作用的E—H关系曲线 图7

H-0关系的线



**例 2** 图11为另一工程的某断面。本例对于不同的地基刚度(*n* = *E*/*E*₀ = 1,1/5, 1/10, 1/20)的计算结果见图12~16。





## 6 结 束 语

本文用耦合法分析了两个先 开洞后建房的工程实例,并对按 常规法(不考虑共同作用)的计 算结果作了比较,表明在特定条 件下按常规法计算和耦合法分析 结果较接近。经过上述已建成的 常规法计算的两工程实地调查及 有关监测结果表明,工程自建成 以来,尚未发生异常现象。



经本文方法计算结果的分析 比较,有以下规律:¹

(1)对于本文给定的地下洞室和上部结构,当地基刚度很大时(如 E≥5000MPa),相 互作用的效应不明显,但对较软弱地基(如 E≤1000MPa),则应考虑相互作用影响。因此,在工程建设和使用过程中,应注意诸如地表水的排除,附近工程爆破等,以避免对地基 岩层的破坏影响。

(2) 与常规法比较,考虑相互作用时的影响使边柱轴力增大,内柱轴力减小,且有可能 使柱基处的弯矩改变符号。故在充分估计到这些情况后,应使结构具有足够的安全储备。

(3) 由于采用了线弹性模型,基础边缘出现较大的应力集中,这有可能超过地基介质的 屈服极限,引起地基反力重分布。此时,采用非线性地基模型更为合理。

(4) 当地基刚度较大时,基础变形较小,基础弯矩近似于倒梁法的结果。当地基较软弱时,基础中跨的负弯矩有可能完全消失。因此,在设计软弱地基上的基础并注意到实际存在的相互作用的影响时,应加强基础梁中跨底部的配筋。

(5) 地下洞室的不同埋置深度,对相互作用也有一定影响。一般说来,当其它条件一定时,埋深越浅,相互作用效应越显著,尤其对于软弱地基更是如此。但地基刚度较大时,相 互作用效应则不明显。

尽管耦合法对解决较复杂的问题是一种有效的数值方法,愈来愈为人们重视,但就本文 课题所涉及的地基模型(如弹性、弹塑性、粘弹性等)和计算模型(如二维、三维等),以 及支护效果等方面来看,尚有许多值得有待研究的内容。因此,本文仅是一个开始,文中不 妥和错误之处,望能批评指正。

### 参考文献

- 1 朱百里,曹名葆,魏道垛.框架结构与地基基础共同工作的数值分析。同济大学学报, 1981, 4
- 2 宰金珉,张问清,赵锡宏。高层空间剪力墙结构与地基共同工作三维问题的双重扩大子 结构法。有限元一有限层分析。建筑结构学报,1983,5
- 3 刘开国。地基一基础一框架体系相互作用的计算方法。建筑结构学报, 1981, 5

第2期

- 4 项玉寅,唐锦春.结构一基础一地基共同作用的有限元、边界元联合解法.工程力学, 1987,2
- 5 严 更,丁方明.边界元法基础.重庆大学出版社,1986,8
- 6 C.A.Brebbia. The Boundary Element Method for Engineers. Pentech Press, 1978
- 7 刘正保.浅埋地下洞室与上部结构相互作用的耦合方法及其工程应用.重庆建筑工程学院 研究生部,1989,6

(编辑:徐维森)

## COUPLING ANALYSIS METHOD FOR INTERACTION BETWEEN FOUNDATION WITH CAVERN AND FRAME STRUCTURE

## Luo Jizhang

(Chongqing Institute of Architecture and Engineering)

*Liu Zhengba*o (Nanyang University)

ABSTRACT In this paper, the interaction between foundation with cavern and frame structure is studied by the coupling methods of BEM and FEM. On the interface between the foundation and structure, the coupling analysis needs to satisfy both the condition of displacement compatibility and force equilibrum. A calculating program for two-dimensional problem is worked out in the computer, SIEMENS 7570C. Two engineering examples are calculated and the results are compared with those obtained by the comventional simplified method and with the observed results from the engieering structures. It indicates that it is necessary for the weak rock foundation with shallow cavern, in the buried depth, to take the interaction into account.

**KEY WORDS** finite element method, boundary element method, foundation with cavern, coupling analysis, frame structure