

# 机器人手端位姿误差模型及重复定位 精度优化综合

肖鹏东 张荣瑞

(机电系)

**摘要** 本文在综合考虑关节间隙及伺服定位误差对机器人手端位姿误差影响的前提下,推导了误差模型。并在此基础上,进行了重复定位精度的优化综合。进行优化时,分别考虑了三种情况:1)以关节间隙量及伺服定位偏差值最大作为单目标函数;2)以手端典型轨迹误差波动最小作为单目标函数;3)综合以上两种情况作为多目标函数。文中对以上三种情况进行了分析,最后针对“重庆一号”机器人进行了数值计算。

**关键词** 机器人, 误差模型, 精度优化

影响机器人重复定位精度的是随机性误差,其中关节间隙及伺服定位误差是重要的影响因素,这些影响又无法应用控制软件对其直接进行补偿,因而必须将该两项误差值控制在合理的范围内,以保证机器人在整个工作空间内重复定位精度满足要求。本文在综合考虑关节间隙及伺服定位误差对机器人手端位姿误差影响的前提下,针对“重庆一号”喷漆机器人,应用最优化方法,根据所推出的误差模型,对各关节间隙量及伺服定位最大偏差值进行了合理的分配。

## 1 误差模型

### 1.1 考虑关节间隙时的误差模型

对于关节式机器人,由于其回转副总是存在运动副间隙,因此在运动过程中必将产生偏转和位移,而其具体的方向与大小取决于受力情况,是随机的。本文主要考虑间隙最大时对机器人手端位姿误差的影响。

设置坐标系 $O_i X_i Y_i Z_i$ 及 $O_i' X_i' Y_i' Z_i'$ ,前者为 $i$ 构件处于理想位置时固连的坐标系,后者为偏转后固连的坐标系,原点 $O_i$ 与 $O_i'$ 重合,选择在构件关节中心点,如图1所示。

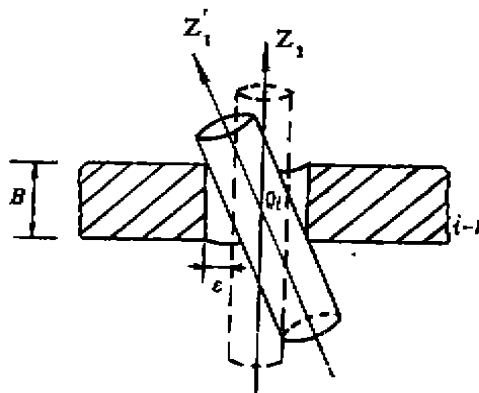


图 1 关节间隙示意

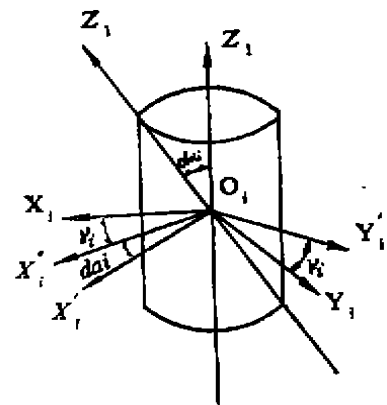


图 2 误差圆柱示意

$Z_i'$  轴位于绕  $Z_i$  轴回转所生成的误差圆柱上，如图 2 所示。

偏转角  $da_i$  为：

$$da_i = \frac{2\epsilon_i}{B_i} \tag{1}$$

其中  $\epsilon_i$  与  $B_i$  分别为  $i$  关节之间隙及轴承厚度。

$\gamma_i$  表示坐标系  $O_i' X_i' Y_i' Z_i'$  的  $Y_i'$  轴相对于坐标系  $O_i X_i Y_i Z_i$  的  $Y_i$  轴绕  $Z_i$  轴的转角。构件  $i$  偏转后，坐标系  $O_i' X_i' Y_i' Z_i'$  的  $Z_i'$  轴相当于绕单位矢量  $\vec{Y}_i'$  转  $da_i$  角。 $\vec{Y}_i'$  的方向余弦为  $(\sin\gamma_i, \cos\gamma_i, 0)$ 。

由微分变换关系<sup>[6]</sup>：

$$\begin{aligned} dT &= T(\text{Trans}(dx, dy, dz)\text{Rot}(\vec{f}, da) - I) \\ &= T \cdot \delta T \end{aligned} \tag{2}$$

则，

$$\delta T = \begin{vmatrix} 0 & -f_z da & f_y da & dx \\ f_z da & 0 & -f_x da & dy \\ -f_y da & f_x da & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{3}$$

此时，

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\gamma_i \\ \cos\gamma_i \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

再考虑坐标原点相对于理想坐标系在径向的漂移（即位移），

$$\Delta X = \epsilon_i \cdot \cos\gamma_i, \quad \Delta Y = \epsilon_i \cdot \sin\gamma_i \tag{5}$$

则，

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_i \cdot \cos\gamma_i \\ \epsilon_i \cdot \sin\gamma_i \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

故可得坐标系间的微分变换关系为:

$$\delta_i^{-1} T^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos\gamma_i \cdot d\alpha_i & e_i \cdot \cos\gamma_i \\ 0 & 0 & -\sin\gamma_i \cdot d\alpha_i & e_i \cdot \sin\gamma_i \\ -\cos\gamma_i \cdot d\alpha_i & \sin\gamma_i \cdot d\alpha_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

### 1.2 考虑伺服定位误差时的误差模型

机器人各关节一般都采用伺服电机驱动,经谐波减速器减速,而这种装置不可避免地存在着运动误差,现按极限误差进行分析。

考虑回转副的情况,设 $d\theta_i$ 是关节 $i$ 转角 $\theta_i$ 之运动误差,则知微分变换关系为:

$$\delta_i^{-1} T^2 = \begin{pmatrix} 0 & -d\theta_i & 0 & 0 \\ d\theta_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

### 1.3 综合考虑关节间隙与伺服定位误差

将(7), (8)两式合并,可得微分变换矩阵:

$$\delta_i^{-1} T = \begin{pmatrix} 0 & -d\theta_i & \cos\gamma_i \cdot d\alpha_i & e_i \cdot \cos\gamma_i \\ d\theta_i & 0 & -\sin\gamma_i \cdot d\alpha_i & e_i \cdot \sin\gamma_i \\ -\cos\gamma_i \cdot d\alpha_i & \sin\gamma_i \cdot d\alpha_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\text{则:} \quad d_i^{-1} T = d_i^{-1} T \cdot \delta_i^{-1} T \quad (10)$$

$$\text{由:} \quad {}^0_N T + d_N {}^0 T = ({}^0_1 T + d_1 {}^0 T)({}^1_2 T + d_2 {}^1 T) \dots ({}^{N-1}_N T + d_N {}^{N-1} T) \quad (11)$$

忽略高阶微分量,有:

$$d_N {}^0 T = \sum_{i=1}^N ({}^0_1 T \dots d_i^{-1} T \dots {}^{N-1}_N T) \quad (12)$$

此即为考虑关节间隙及伺服定位误差时的机器人手端位姿误差模型。

### 1.4 “重庆一号”机器人手端位姿误差模型

由(10), (12)两式可知:

$$d_N {}^0 T = {}^0_1 T \cdot \delta_1 {}^1 T \cdot {}^1_2 T + {}^0_2 T \cdot \delta_2 {}^2 T \cdot {}^2_3 T + {}^0_3 T \cdot \delta_3 {}^3 T \cdot {}^3_4 T \\ + {}^0_4 T \cdot \delta_4 {}^4 T \cdot {}^4_5 T + {}^0_5 T \cdot \delta_5 {}^5 T \quad (13)$$

其中各变换矩阵 ${}^i_j T$ 之值参见文献[4],此处从略。

机器人手端再现的最大位置偏差为:

$$r = \sqrt{DX^2 + DY^2 + DZ^2} \quad (14)$$

其中 $DX$ ,  $DY$ ,  $DZ$ 分别为由(13)式定出的沿 $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ 三个方向的位置偏差,如图3所示长方体区域为偏差范围。

手端位姿误差计算程序框图如图4所示。

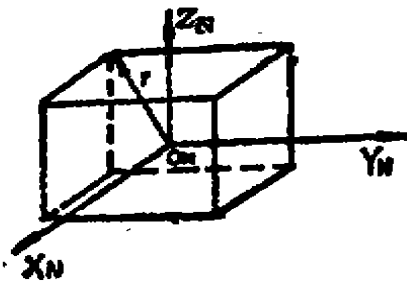


图3 机器人手端再现位置偏差范围

## 2 重复定位精度优化综合

### 2.1 基准位姿选取

对机器人进行精度优化综合时，必须合理地选择一基准位姿，保证以这个基准位姿进行优化综合时，可以使机器人在整个工作空间内满足重复定位精度的要求。

目前，常用的精度综合基准位姿有以下几种，

- 1) 最大重复定位误差所在位姿；
- 2) 出现概率最大的位姿；
- 3) 宽容重复定位误差最大位姿。

本文采用出现概率最大的位姿作为优化基准。

### 2.2 目标函数

通常在满足给定重复定位精度的前提下，应尽量增大关节间隙量及伺服定位偏差值，这样在机器人制造安装时可以降低加工精度的要求，便于安装并且给关节的灵活转动带来好处，另外还有利于控制系统的设计。

从机器人工作质量和工作稳定性考虑，总希望机器人手端在其运动轨迹上的误差波动越小越好。

根据以上两点要求，本文提出三个优化目标函数，

- 1) 以关节间隙量及伺服定位偏差值最大作为单目标函数；
- 2) 以轨迹误差波动最小作为单目标函数；
- 3) 综合以上两种情况作为多目标函数。

以下分别建立其数学模型。

#### 2.2.1 以关节间隙量及伺服定位偏差值最大作为单目标函数 $F_1$

采用各关节间隙量 $e_i$ 及伺服定位偏差 $\Delta\theta_i$ 的倒数来表示其精度的高低，表达形式为：

$$\min F_1(e_1, e_2, \dots, e_N, \Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_N) = \min \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{e_i} + \frac{1}{\Delta\theta_i} \right) \quad (15)$$

约束条件分为关节间隙最小值约束、伺服定位系统定位误差最小值约束及重复定位精度约束三种。

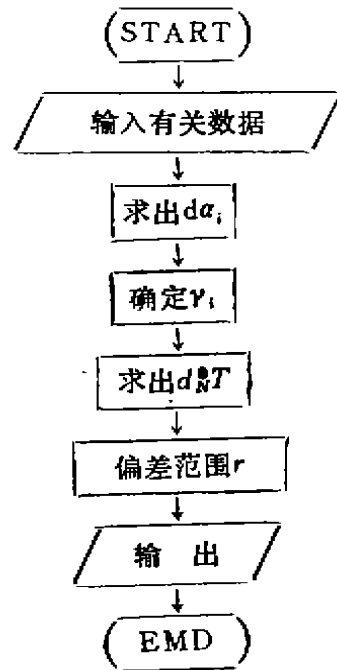


图4 手端位姿误差计算框图

由于关节装配、润滑的要求, 以及关节转动灵活的必要条件, 关节间隙量不能低于某一最小值,

$$\begin{aligned} g_1 &= e_1^* - \varepsilon_1 \leq 0 \\ g_2 &= e_2^* - \varepsilon_2 \leq 0 \\ &\vdots \\ g_N &= e_N^* - \varepsilon_N \leq 0 \end{aligned} \quad (16)$$

由于伺服系统可达精度的限制, 则存在约束, 可用伺服系统定位偏差 $\Delta\theta_i$ 表示为:

$$\begin{aligned} g_{N+1} &= \Delta\theta^* - \Delta\theta_1 \leq 0 \\ g_{N+2} &= \Delta\theta^* - \Delta\theta_2 \leq 0 \\ &\vdots \\ g_{2N} &= \Delta\theta^* - \Delta\theta_N \leq 0 \end{aligned} \quad (17)$$

重复定位精度的约束条件为:

$$g_{2N+1} = r(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N, \Delta\theta_1, \dots, \Delta\theta_N) - R \leq 0 \quad (18)$$

其中 $R$ 为要求达到的机器人手端位置重复定位精度。

### 2.2.2 以手端运动轨迹误差波动最小作为单目标函数 $F_2$

误差波动最小主要指, 使机器人手端在直角坐标系内的典型运动轨迹上的误差波动最小。一般将轨迹离散为 $m$ 段, 以 $r_k$ 表示在节点 $k$  ( $k=0, \dots, m$ ) 上的重复定位误差, 并取给定重复定位精度 $R$ 作为比较基准, 这样, 在满足误差波动最小的同时, 又使各节点处的重复定位误差尽量靠近 $R$ 值, 因而使各关节间隙精度与伺服定位精度提高不是太多, 表达形式为:

$$\min F_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N, \Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \dots, \Delta\theta_N) = \min \sum_{k=0}^m (r_k - R)^2 \quad (19)$$

约束条件除包含(16), (17)外, 还包括重复定位精度约束条件:

$$\begin{aligned} g_{2N+(k+1)} &= r_k(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N, \Delta\theta_1, \dots, \Delta\theta_N) - R \leq 0 \\ &(k=0, 1, \dots, m) \end{aligned} \quad (20)$$

### 2.2.3 综合考虑以上两种情况的多目标函数

目标函数 $F_1$ 与 $F_2$ 反映了各自不同的要求, 其对应的关节间隙量和伺服系统定位偏差的分配可能不同。为了综合反映以上两个目标的要求, 采用综合目标函数 $F$ 。

由理想点法<sup>[6]</sup>建立统一目标函数如下:

$$\min F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N, \Delta\theta_1, \dots, \Delta\theta_N) = C_1 \left( \frac{F_1 - F_1^*}{F_1^*} \right)^2 + C_2 \left( \frac{F_2 - F_2^*}{F_2^*} \right)^2 \quad (21)$$

其中 $F_1^*$ ,  $F_2^*$ 分别为前两种单目标函数所得的最优值;  $C_1$ ,  $C_2$ 为加权系数, 由设计人员按对(2.2.1)和(2.2.2)中单目标的重要程度预先给定数值, 优先者取大值。

### 2.3 设计变量初始值的选取

机器人各关节间隙 $\varepsilon_i$ 初值, 根据机械零件中滑动轴承间隙计算经验公式确定:

$$\varepsilon_i = 0.004d_i + 0.008 \quad (22)$$

其中 $d_i$ 表示关节 $i$ 回转轴直径。

伺服定位偏差 $\Delta\theta_i$ 初值的选取由伺服驱动系统中位置检测元件的分辨率 $P_i$ 确定:

$$\Delta\theta_i = \frac{1}{2}P_i \quad (i = 1, N) \quad (23)$$

该综合问题是含有大量约束条件的多变量非线性规划问题，本文采用复合形法寻优，程序框图如图 5 所示。

### 3.4 实例

本文作者针对“重庆一号”机器人，在满足重复定位精度的要求下，对各关节间隙量及伺服定位偏差的最优分配进行了数值计算。

“重庆一号”机器人有关数据参见文献[4]，此处从略。

取精度综合基准位姿为：

$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$
0	1.1345	-1.5708	0	0

典型运动轨迹取为直线。

关节间隙量最小值： $\varepsilon_i^* = 0.1\text{mm}(i = 1, 5)$

伺服定位偏差最小值： $\Delta\theta^* = 0.45 \times 10^{-4}\text{rad}$

重复定位精度指标： $R = 4\text{mm}$

初值的选取

$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon_3$	$\varepsilon_4$	$\varepsilon_5$
0.25	0.20	0.20	0.15	0.15
$\Delta\theta_1$	$\Delta\theta_2$	$\Delta\theta_3$	$\Delta\theta_4$	$\Delta\theta_5$
$1.0 \times 10^{-4}$	$0.8 \times 10^{-4}$	$0.8 \times 10^{-4}$	$0.5 \times 10^{-4}$	$0.5 \times 10^{-4}$

以  $F_1$  为单目标函数优化结果

$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon_3$	$\varepsilon_4$	$\varepsilon_5$
0.2933	0.2014	0.1911	0.1522	0.1431
$\Delta\theta_1$	$\Delta\theta_2$	$\Delta\theta_3$	$\Delta\theta_4$	$\Delta\theta_5$
$0.9421 \times 10^{-4}$	$0.8977 \times 10^{-4}$	$0.8811 \times 10^{-4}$	$0.7654 \times 10^{-4}$	$0.7329 \times 10^{-4}$

以  $F_2$  为单目标函数优化结果

$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon_3$	$\varepsilon_4$	$\varepsilon_5$
0.1925	0.1711	0.1523	0.1019	0.1022
$\Delta\theta_1$	$\Delta\theta_2$	$\Delta\theta_3$	$\Delta\theta_4$	$\Delta\theta_5$
$0.6937 \times 10^{-4}$	$0.6011 \times 10^{-4}$	$0.5933 \times 10^{-4}$	$0.4728 \times 10^{-4}$	$0.4832 \times 10^{-4}$

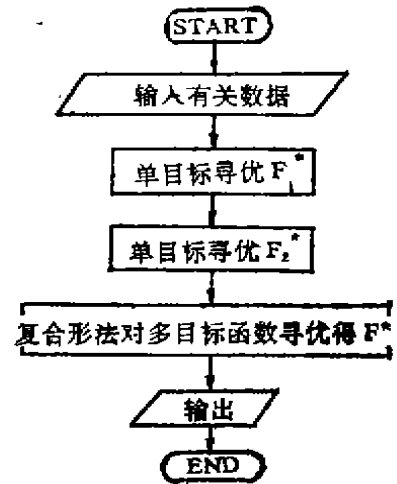


图 5 多目标优化程序框图

以 $F$ 为多目标函数优化结果

$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$\epsilon_3$	$\epsilon_4$	$\epsilon_5$
0.2134	0.1865	0.1733	0.1211	0.1132
$\Delta\theta_1$	$\Delta\theta_2$	$\Delta\theta_3$	$\Delta\theta_4$	$\Delta\theta_5$
$0.7381 \times 10^{-4}$	$0.6586 \times 10^{-4}$	$0.6174 \times 10^{-4}$	$0.4968 \times 10^{-4}$	$0.5174 \times 10^{-4}$

### 3 结 论

本文综合考虑关节间隙和伺服定位误差,对机器人手端位姿误差进行分析,所推误差模型与实际接近。采用最优化方法对关节间隙量和伺服定位偏差值进行合理的分配,所得结果对机器人设计、制造及理论分析都有一定的参考价值。通过本文分析,可得如下结论:

- 1) 优化结果表明关节间隙量和伺服定位偏差值最大的要求与误差波动最小的要求是相互矛盾的,以理想点法建立的多目标函数较好地解决了这个矛盾。
- 2) 机器人各关节配合精度及伺服系统的选取,应以多目标优化结果为依据。

#### 参 考 文 献

- 1 仇时雨. 空间六杆机构的误差分析及考虑公差和间隙的多目标优化综合. 北京航空学院学报, 1983, 2
- 2 黄宇中. 机器人重复定位精度优化综合. 上海交通大学学报, 1988, 4
- 3 Lee-chi Yu. The Positioning Accuracy of Industrial Robots. 6TH. Intl. Conference on Industrial Robot Tech. 1980
- 4 肖鹏东. "重庆一号"机器人路径规划及机构精度分析. 重庆建筑工程学院硕士论文, 1989
- 5 余俊. 最优化方法及其应用. 华中工学院出版社, 1984
- 6 吴广玉. 机器人工程导论. 哈尔滨工业大学出版社, 1988

(编辑: 刘家凯)

## THE ERROR ANALYSIS OF ROBOT ARM'S POSITION AND POSTURE AND OPTIMUM DISTRIBUTION UNDER THE REQUIREMENT OF REPEATABLE ACCURACY

Xiao Pengdong Zhang Rongrui  
(Dept. of Mechanical and Electrical Engineering)

**ABSTRACT** In this paper, the error model is got while the influence of the joint interval and the servo systems positioning error of robot is considered. The optimum distribution of repeatable accuracy is presented under each of the three situations. They are: the single objective fun-

ction of the maximum of the joint interval value and the servo system's error(I), the single objective function of the minimum of the error wave of the robot arm's typical trajectory(II) and the multiobjective function under the consideration of both (I) and (II) as (III). At last, the numerical calculation is presented in connection with 'Chongqing-I' painting robot.

**KEY WORDS** robot, error model, accuracy optimum