

贴壁式直墙环状衬砌的解析解*

孙仁博 卢平

(建筑工程系)

摘要 本文将贴壁式直墙环状衬砌视为由圆环壳、位于内侧及外侧的弹性地基圆筒壳三个子结构构成的组合结构。用复变函数方法,导出了在衬砌自重、竖向及水平围岩压力作用下,圆环壳的复变方程及其解。用柱壳理论,导出了弹性地基圆筒壳的基本方程及其解。然后,根据变形、内力协调,将它们组装成环状衬砌。文中导出了对这种衬砌进行工程计算所需要的全部公式,给出了数值例题,并初步讨论了衬砌几何参数变化对其受力性能的影响。

关键词 圆环壳,贴壁式衬砌,地下结构

在地下工程中,有时采用平面如图1示的衬砌。当岩柱很小、稳定性差时,往往不留岩柱,做成穹顶衬砌;当岩柱半径远大于外、内环墙半径之差时,可视为普通衬砌。对于这两种情况,工程上均有可行的设计计算方法^[1]。当不属于上述情况时,便为本文讨论的环状衬砌。

环状衬砌是由圆环壳、内环墙及外环墙构成的组合结构。它的计算,至今为止,尚未见到有关的文献,是一个值得探讨的问题。

本文主要讨论在衬砌自重、竖向及水平围岩压力作用下,这种衬砌的静力计算。计算中,认为环状衬砌中心的岩柱是稳定的;同时考虑到施工时一般难以保证环壳部分的回填质量,没有计入这个区域的弹性抗力作用,环墙区的弹性抗力,采用了局部变形理论。文中,将环状衬砌划分为圆环壳、内环墙及外环墙三个子结构,先用解析法讨论各子结构的计算,再引入子结构间的协调关系,进行整体分析。

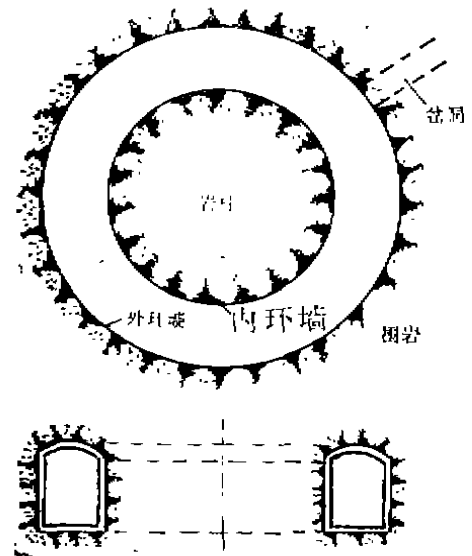


图1 环状衬砌示意图

* 本文属国家自然科学基金与建设部城乡建设科学技术基金联合资助项目。

本文于1990年11月6日收到。

1 圆环壳的计算

圆环壳（简称为环壳）的几何尺寸、坐标、荷载、内力及位移如图2示。在环状衬砌的径向截面上，环壳截面的中线为一圆弧，其中心角为 $\varphi_2 - \varphi_1$ （ φ 角的正向规定，如图2示）。

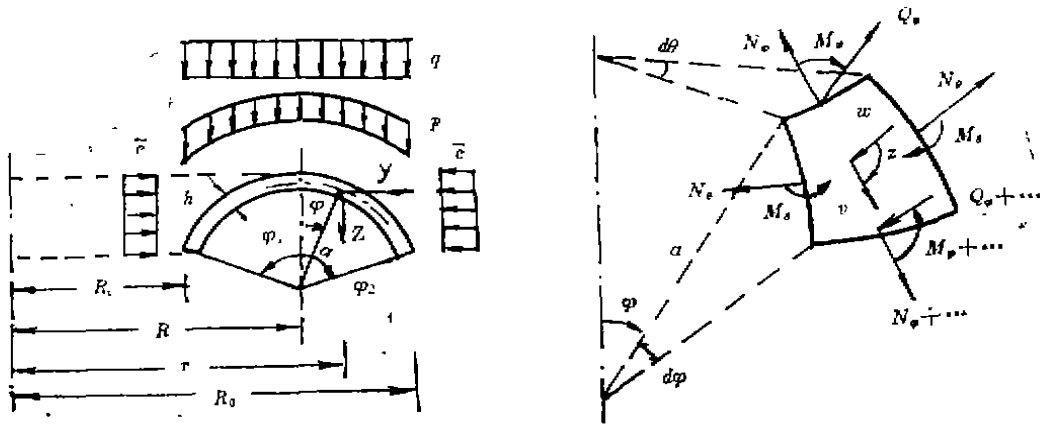


图2 环壳的尺寸、坐标、荷载、内力位移规定

1.1 基本方程式

在Love-Kirchhoff假设下，由文[1]~[3]可以得到在自重、竖向及水平围岩压力下，轴对称环壳的复变量方程为：

$$\begin{aligned}
 & G \frac{d^2 V}{d\varphi^2} - \alpha \cos\varphi \frac{dV}{d\varphi} + i 2k \sin\varphi \cdot V \\
 & = \frac{4k^2}{\alpha} \left\{ (Q_0 + Fa) \cos\varphi + i \frac{aG^2}{2k} \left[(2 + \mu) p a \sin\varphi + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + (3 + \mu) (q - \bar{e}) a \sin\varphi \cos\varphi - \bar{e} \cos\varphi \right] \right\} \quad (1) \\
 & G = 1 + \nu \sin\varphi \quad k \approx \sqrt{3(1 - \mu^2)} \frac{\alpha a}{h} \\
 & F = p(a \cos\varphi - \varphi - \alpha) + q \left(\frac{\alpha \cos 2\varphi}{4} - \sin\varphi - \frac{\alpha}{4} \right)
 \end{aligned}$$

式中 $\alpha = a/R$ ， μ ——材料的泊松比， Q_0 —— $\varphi = 0$ 处的剪力 Q_φ ，其余符号见图2。用(1)式 V 的实部 $R_e V$ 和虚部 $I_m V$ 来表示的内力、经线切线转角 χ 、径向位移 Y 和竖向位移 Z 为：

$$\begin{aligned}
 N_\varphi & = -m_1 I_m V + m_2 (Q_0 + Fa) \\
 N_\theta & = m_3 G \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{I_m V}{G} \right) - m_2 (Q_0 + Fa) \\
 & \quad - a(p \cos\varphi + q \cos^2\varphi + \frac{\bar{e}}{\alpha} G \sin\varphi)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_s &= m_6 G \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{R_e V}{G} \right) - \frac{\mu m_6}{1-\mu} R_e V \\
 M_\theta &= \mu m_6 G \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{R_e V}{G} \right) - \frac{m_6}{1-\mu} R_e V \\
 Q_s &= m_7 I_n V + m_8 (Q_0 + F\alpha) \\
 \chi &= m_4 R_e V \\
 Y &= v \cos \varphi - w \sin \varphi = \frac{aG}{Eh\alpha} (N_\theta - \mu N_s) \\
 Z &= v \sin \varphi + w \cos \varphi \\
 &= Z_0 - \frac{a}{Eh} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left[\frac{\cos \varphi}{\alpha G} R_e V - (N_s - \mu N_\theta) \sin \varphi \right] d\varphi
 \end{aligned} \tag{2}$$

式中 E ——材料的弹性模量， Z_0 —— $\varphi = \varphi_0$ 处的 Z 值，而

$$\begin{aligned}
 m_1 &= -\frac{\alpha m_8}{2k}, & m_2 &= \frac{\alpha + \sin \varphi}{G^2}, & m_3 &= -\frac{1}{2kG} \\
 m_4 &= -\frac{1}{Eh\alpha G}, & m_5 &= -\frac{\alpha m_8}{2k}, & m_6 &= -\frac{1-\mu}{G} \alpha m_8 \cos \varphi \\
 m_7 &= -m_1 \operatorname{tg} \varphi & m_8 &= \frac{\cos \varphi}{G^2}
 \end{aligned}$$

1.2 基本方程的解

基本方程的解由齐次解 V_h ，与 Q_0 有关的特解 V_{pQ} 及与外荷载 p ， q 和 \bar{e} 有关的特解 V_{pp} 三部分组成，即

$$V = V_h + V_{pQ} + V_{pp} = R_e V + i I_m V \tag{3}$$

文[1]导得了 V_h 的两个线性无关的齐次解 V_1 及 V_2 和特解 V_{pQ} ，其形式为：

$$\begin{aligned}
 V_1 &= e^{\lambda \varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\varphi} \\
 V_2 &= e^{-\lambda \varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n C_n e^{-in\varphi} \\
 V_{pQ} &= \frac{4k}{\alpha} Q_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{4}$$

式中 $\lambda = \beta + ir$ ， β 与 r 为 α ， k 的函数，可以由(1)[4]查得，复数 C_n ， A_n 的递推公式为：

$$\begin{aligned}
 \frac{C_n}{C_{n-1}} &= \frac{-\left\{ k - \frac{ia}{2} [\lambda + i(n-1)] [\lambda + i(n-2)] \right\}}{(\lambda + in)^2 - \left\{ k - \frac{ia}{2} [\lambda + i(n+1)] [\lambda + i(n+2)] \right\} \frac{C_{n-1}}{C_n}}, & (n > 0) \\
 \frac{C_n}{C_{n+1}} &= \frac{k - \frac{ia}{2} [\lambda + i(n+1)] [\lambda + i(n+2)]}{(\lambda + in)^2 + \left\{ k - \frac{ia}{2} [\lambda + i(n-1)] [\lambda + i(n-2)] \right\} \frac{C_{n-1}}{C_n}}, & (n < 0)
 \end{aligned}$$

$$\left[k - \frac{i\alpha}{2}(\lambda - i)(\lambda - 2i) \right] \frac{C_{v-1}}{C_v} + \lambda^2 - \left[k - \frac{i\alpha}{2}(\lambda + i)(\lambda + 2i) \right] \frac{C_1}{C_0} = 0, \quad (n=0)$$

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{i \left[1 + i \frac{(n-1)(n-2)}{2k} \alpha \right]}{\frac{n^2}{k} - i \left[1 + i \frac{(n+1)(n+2)}{2k} \alpha \right] \frac{A_{n+1}}{A_n}}, \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$A_0 = -i$$

这里, 我们来求特解 V_{pp} , 设

$$\left. \begin{aligned} V_{pp} &= \frac{4k^2 a}{\alpha} \left[E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (D_n \sin n\varphi + E_n \cos n\varphi) \right] \\ D_n &= R_n + iI_n \quad (n=1, 2, 3, \dots) \\ E_n &= F_n + ik_n \quad (n=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

代(5)式入(1)式, 最后得求 D_n, E_n 的方程组为

$$(-\alpha + ik)D_1 = \frac{p\alpha}{2} \left(1 + i\alpha \frac{2+\mu}{k} \right)$$

$$\left[3\alpha E_2 - D_1 + ik(2E_0 - E_2) \right] = \frac{p}{2} \left[1 + i\alpha(1 + 0.75\alpha^2) \frac{2+\mu}{k} \right]$$

$$(-3\alpha D_2 - E_1 + ikD_2) = -p\alpha - \frac{q\alpha}{8} (1 - i2\alpha \frac{3+\mu}{k}) - i \frac{\bar{e}}{2k} \left(1 + \frac{7+2\mu}{4} \alpha^2 \right)$$

$$\begin{aligned} \left[6\alpha E_3 - 4D_2 + ik(E_1 - E_3) \right] &= -\frac{4p}{3} - \frac{q}{2} \left[1 - i\alpha(2 + \alpha^2) \frac{3+\mu}{4k} \right] \\ &\quad - i \frac{\bar{e}\alpha}{8k} \left[4 + (3+\mu)(2 + \alpha^2) \right] \end{aligned}$$

$$\left[-6\alpha D_3 - 4E_2 + ik(D_3 - D_1) \right] = \frac{p\alpha}{2} \left(1 - i\alpha \frac{2+\mu}{k} \right)$$

$$\left[u_3 E_4 - 9D_3 - t_3 E_2 + ik(E_2 - E_4) \right] = p \left(\frac{3}{4} - i\alpha^3 \frac{2+\mu}{8k} \right)$$

$$\left[-u_3 D_4 - 9E_3 + t_3 D_2 + ik(D_4 - D_2) \right] = \frac{q\alpha}{8} \left(1 - i2\alpha \frac{3+\mu}{k} \right) + i \frac{\bar{e}\alpha^2}{8k} (7 + 2\mu)$$

$$\left[u_4 E_5 - 16D_4 - t_4 E_3 + ik(E_3 - E_5) \right] = -\frac{8p}{15} + i \frac{\bar{e} - q}{16k} (3 + \mu) \alpha^3$$

$$\left[u_n E_{n+1} - n^2 D_n - t_n E_{n-1} + ik(E_{n-1} - E_{n+1}) \right] = (-1)^{n+1} \frac{2np}{n^2 - 1}, \quad (n \geq 5)$$

$$\left[-u_n D_{n+1} - n^2 E_n + t_n D_{n-1} + ik(D_{n+1} - D_{n-1}) \right] = 0, \quad (n \geq 4)$$

$$u_n = 0.5(n+1)(n+2)\alpha, \quad t_n = 0.5(n-1)(n-2) \quad (n \geq 3)$$

将(4)、(5)式代入(3)式, 整理后, 得

$$\begin{aligned}
 R_n V &= B_1 C_1 - B_2 C_2 + B_3 C_3 + B_4 C_4 + Q_0 k_1 \sum_{n=1}^{\infty} J_n \sin n \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \\
 &\quad + k_2 \left[F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (R_n \sin n \varphi + F_n \cos n \varphi) \right] \\
 I_m V &= B_2 C_1 + B_1 C_2 - B_4 C_3 + B_3 C_4 + Q_0 k_1 \sum_{n=1}^{\infty} G_n \sin n \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \\
 &\quad + k_2 \left[k_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (I_n \sin n \varphi + K_n \cos n \varphi) \right] \\
 k_1 &= \frac{4k}{\alpha}, \quad k_2 = k, ka
 \end{aligned} \tag{6}$$

式中 $C_1 \sim C_4$ 为新引入的待定实常数。而

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \tilde{f}_1 d_1 - \tilde{f}_2 d_2, & d_1 &= e^{-\beta} (\sigma_2^{-\varphi}) \cos I \varphi, \\
 B_2 &= \tilde{f}_1 d_2 + \tilde{f}_2 d_1, & d_2 &= e^{-\beta} (\sigma_2^{-\varphi}) \sin I \varphi \\
 B_3 &= \tilde{g}_1 d_3 + \tilde{g}_2 d_4, & d_3 &= e^{-\beta} (\sigma_1^{-\varphi}) \cos I \varphi, \\
 B_4 &= \tilde{g}_1 d_4 - \tilde{g}_2 d_3, & d_4 &= e^{-\beta} (\sigma_1^{-\varphi}) \sin I \varphi, \\
 \tilde{f}_1 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (p_n \cos n \varphi - q_n' \sin n \varphi) \\
 \tilde{f}_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} (p_n' \sin n \varphi + q_n \cos n \varphi) \\
 \tilde{g}_1 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (p_n \cos n \varphi + q_n' \sin n \varphi) \\
 \tilde{g}_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (q_n \cos n \varphi - p_n' \sin n \varphi) \\
 p_n &= 0.5(a_n + a_{-n}), \quad q_n = 0.5(b_n + b_{-n}), \quad p_n' = p_n - a_{-n}, \quad q_n' = q_n - b_{-n} \\
 a_0 &= 2, \quad b_0 = 0, \\
 a_n &= a_{n-1} R_n^{(1)} - b_{n-1} I_n^{(1)}, \quad b_n = b_{n-1} R_n^{(1)} + a_{n-1} I_n^{(1)}, \quad (n=1, 2, \dots) \\
 R_n^{(1)} &= \frac{K_{n1} K_{n3} + K_{n2} K_{n4}}{K_{n3}^2 + K_{n4}^2}, \quad I_n^{(1)} = \frac{K_{n2} K_{n3} - K_{n1} K_{n4}}{K_{n3}^2 + K_{n4}^2} \\
 K_{n1} &= -k - \alpha \beta (m - 1.5), \quad K_{n2} = 0.5 \alpha [\beta^2 - (m - 1)(m - 2)] \\
 K_{n3} &= \beta^2 - m^2 - R_{n+1}^{(1)} [k + \alpha \beta (m + 1.5)] - 0.5 \alpha I_{n+1}^{(1)} [\beta^2 - (m + 1)(m + 2)] \\
 K_{n4} &= 2m\beta - I_{n+1}^{(1)} [k + \alpha \beta (m + 1.5)] + 0.5 \alpha R_{n+1}^{(1)} [\beta^2 - (m + 1)(m + 2)] \\
 &\quad m = n + I
 \end{aligned}$$

若在 $R_n^{(1)}, I_n^{(1)}$ 中, 取 $[k, \alpha, \beta, I] = -[k, \alpha, \beta; I]$, 便用于计算 a_{-n}, b_{-n} , 这时

$R_{n+1}^{(1)}, I_{n+1}^{(1)}$ 变为 $R_{-n-1}^{(1)}, I_{-n-1}^{(1)}$, 而

$$a_{-n} = a_{-n+1} R_{-n}^{(1)} - b_{-n+1} I_{-n}^{(1)}, \quad b_{-n} = b_{-n+1} R_{-n}^{(1)} + a_{-n+1} I_{-n}^{(1)}$$

(6)式中的 J_n 及 G_n 分别为:

$$\begin{aligned} J_1 &= \tilde{I}_1, & G_1 &= -\tilde{R}_1, \\ J_n &= J_{n-1}\tilde{R}_n - G_{n-1}\tilde{I}_n, & G_n &= J_{n-1}\tilde{I}_n + G_{n-1}\tilde{R}_n, \quad (n=2, 3, \dots) \\ \tilde{R}_n &= \frac{K_{n6}K_{n6} + K_{n7}}{K_{n6}^2 + K_{n7}^2}, & \tilde{I}_n &= \frac{K_{n6} - K_{n6}K_{n7}}{K_{n6}^2 + K_{n7}^2}, \quad (n=1, 2, \dots) \\ K_{n6} &= -\frac{(n-1)(n-2)}{2k}\alpha, & K_{n6} &= \frac{n^2}{k} + \frac{(n+1)(n+2)}{2k}\alpha\tilde{R}_{n+1} + \tilde{I}_{n+1} \\ K_{n7} &= \frac{(n+1)(n+2)}{2k}\alpha\tilde{I}_{n+1} - \tilde{R}_{n+1} \end{aligned}$$

1.3 内力及位移表达式

将(6)式的 $R_n V$ 及 $I_n V$ 代入(2), 我们可以得到环壳的内力和位移计算公式为:

$$\begin{aligned} N_r &= m_1(B_2 C_1 + B_1 C_2 - B_4 C_3 + B_3 G_4) + Q_0 \left[m_2 + k_1 m_1 \sum_{n=1}^{\infty} G_n \sin n \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ &+ m_2 F_0 + k_2 m_1 \left[k_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (I_n \sin n \varphi + K_n \cos n \varphi) \right] \quad (8)_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_\theta &= (m_3 B'_2 - m_1 B_2) C_1 + (m_3 B'_1 - m_1 B_1) C_2 - (m_3 B'_4 - m_1 B_4) C_3 + \\ &+ (m_3 B'_3 - m_1 B_3) C_4 + Q_0 \left\{ -m_2 + k_1 \sum_{n=1}^{\infty} G_n \left[m_3 n \cos n \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right. \right. \\ &\left. \left. - m_1 \sin n \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\} - \alpha \left[m_2 F_0 + (p + q \cos \varphi) \cos \varphi + \frac{e}{\alpha} G \sin \varphi \right] \\ &+ k_2 \left\{ -m_1 K_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(m_3 n I_n - m_1 K_n) \cos n \varphi - (m_3 n K_n + m_1 I_n) \sin n \varphi \right] \right\} \quad (8)_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_r &= (m_5 B'_1 + m_6 B_1) C_1 - (m_5 B'_2 + m_6 B_2) C_2 + (m_5 B'_3 + m_6 B_3) C_3 \\ &+ (m_5 B'_4 + m_6 B_4) C_4 + Q_0 k_1 \sum_{n=1}^{\infty} J_n \left[m_5 n \cos n \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right. \\ &+ m_6 \sin n \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \left. \right] + k_2 \left\{ m_5 F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(m_5 n R_n + m_6 F_n) \cos n \varphi \right. \right. \\ &\left. \left. + (-m_5 n F_n + m_6 R_n) \sin n \varphi \right] \right\} \quad (8)_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_\theta &= (\mu m_5 B'_1 - m_6 B_1) C_1 - (\mu m_5 B'_2 - m_6 B_2) C_2 + (\mu m_5 B'_3 - m_6 B_3) C_3 \\ &+ (\mu m_5 B'_4 - m_6 B_4) C_4 + Q_0 k_1 \sum_{n=1}^{\infty} J_n \left[\mu m_5 n \cos n \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right. \\ &\left. - m_6 \sin n \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right] + k_2 \left\{ -m_6 F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\mu m_5 n R_n - m_6 F_n) \cos n \varphi \right. \right. \\ &\left. \left. - (\mu m_5 n F_n + m_6 R_n) \sin n \varphi \right] \right\} \quad (8)_4 \end{aligned}$$

$$Q_p = m_7(B_2C_1 + B_1C_2 - B_4C_3 + B_3C_4) + Q_0 \left[m_2 + k_1 m_7 \sum_{n=1}^{\infty} G_n \sin n \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ + m_8 F a + k_2 m_7 \left[K_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (I_n \sin n \varphi + K_n \cos n \varphi) \right] \quad (8)_5$$

$$\chi = m_4(B_1C_1 - B_2C_2 + B_3C_3 + B_4C_4) + Q_0 k_1 m_4 \sum_{n=1}^{\infty} J_n \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \\ + k_2 m_4 \left[F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (R_n \sin n \varphi + F_n \cos n \varphi) \right] \quad (8)_6$$

$$Y = (m_9 B'_2 + m_{10} B_2) C_1 + (m_9 B'_1 + m_{10} B_1) C_2 - (m_9 B'_4 + m_{10} B_4) C_3 + \\ + (m_9 B'_3 + m_{10} B_3) C_4 + Q_0 \left\{ m_{11} + k_1 \sum_{n=1}^{\infty} G_n \left[m_9 n \cos n \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + m_{10} \sin n \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\} + m_{11} F a - \frac{a^2 G}{E h \alpha} (p \cos \varphi + q \cos^2 \varphi + \frac{e}{\alpha} G \sin \varphi) \\ + k_2 \left\{ m_{10} K_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(m_9 n I_n + m_{10} K_n) \cos n \varphi \right. \right. \\ \left. \left. - (m_9 n K_n - m_{10} I_n) \sin n \varphi \right] \right\} \quad (8)_7$$

$$Z = Z_0 + \tilde{Z}_1 C_1 + \tilde{Z}_2 C_2 + \tilde{Z}_3 C_3 + \tilde{Z}_4 C_4 + \tilde{Z}_Q Q_0 + \tilde{Z}_p \quad (8)_8$$

$$\tilde{Z}_1 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} (m_{12} B'_2 + m_{13} B_2 + m_{14} B_1) d\varphi, \quad \tilde{Z}_2 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} (m_{12} B'_1 + m_{13} B_1 - m_{14} B_2) d\varphi$$

$$\tilde{Z}_3 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} (-m_{12} B'_4 - m_{13} B_4 - m_{14} B_3) d\varphi, \quad \tilde{Z}_4 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} (m_{12} B'_3 + m_{13} B_3 + m_{14} B_4) d\varphi$$

$$\tilde{Z}_Q = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left\{ m_{15} + k_1 \sum_{n=1}^{\infty} \left[m_{12} n G_n \cos n \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) + (m_{13} G_n + m_{14} J_n) \sin n \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\} d\varphi$$

$$\tilde{Z}_p = \int_{\varphi_0}^{\varphi} m_{16} d\varphi + k_2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left\{ m_{13} K_0 + m_{14} F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(m_{12} n I_n + m_{13} K_n + m_{14} F_n) \cos n \varphi \right. \right. \\ \left. \left. - (m_{12} n K_n - m_{13} I_n - m_{14} R_n) \sin n \varphi \right] \right\} d\varphi$$

在(8)₁~(8)₈式中, 有

$$B'_1 = A_1 d_1 - A_2 d_2, \quad A_1 = \beta + \sum_{n=1}^{\infty} (S_{n1} \sin n \varphi - S_{n2} \cos n \varphi),$$

$$B'_2 = A_2 d_1 + A_1 d_2, \quad A_2 = \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} (S_{n3} \sin n \varphi - S_{n4} \cos n \varphi),$$

$$B'_3 = A_3 d_3 + A_4 d_4, \quad A_3 = -\beta + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (S_{n1} \sin n \varphi + S_{n2} \cos n \varphi),$$

$$B'_4 = A_3 d_4 - A_4 d_3, \quad A_4 = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (S_{n3} \sin n \varphi + S_{n4} \cos n \varphi)$$

$$S_{n1} = -n p_n - \beta q'_n - \gamma p'_n, \quad S_{n2} = n q'_n - \beta p_n + \gamma q_n,$$

$$\begin{aligned}
 S_{r3} &= -nq_n + \beta p'_n - Iq'_n, & S_{r4} &= -np'_n - \beta q_n - Ip_n, \\
 m_2 &= -\frac{a}{2kEh\alpha}, & m_{10} &= -(1+\mu)\frac{aG}{Eh\alpha}m_1, \\
 m_{11} &= -(1+\mu)\frac{aG}{Eh\alpha}m_2, & m_{12} &= -\frac{\mu a}{Eh}m_3\sin\varphi, \\
 m_{13} &= \frac{a}{Eh}(1+\mu)m_1\sin\varphi, & m_{14} &= -\frac{a\cos\varphi}{Eh\alpha G}, \\
 m_{15} &= \frac{a}{Eh}(1+\mu)m_2\sin\varphi, \\
 m_{16} &= m_{15}Fa + \frac{\mu a^2\sin\varphi}{Eh}\left[(p+q\cos\varphi)\cos\varphi + \frac{e}{\alpha}G\sin\varphi\right]
 \end{aligned}$$

2 内环墙的计算

内环墙的尺寸、坐标、荷载、内力及位移的规定如图3示。图中 k_0 及 k_d 分别为围岩弹性抗力系数及墙底岩基抗力系数。 V_i 、 H_i 及 M_i 为内环墙与环壳间的相互作用力，可以由(8)

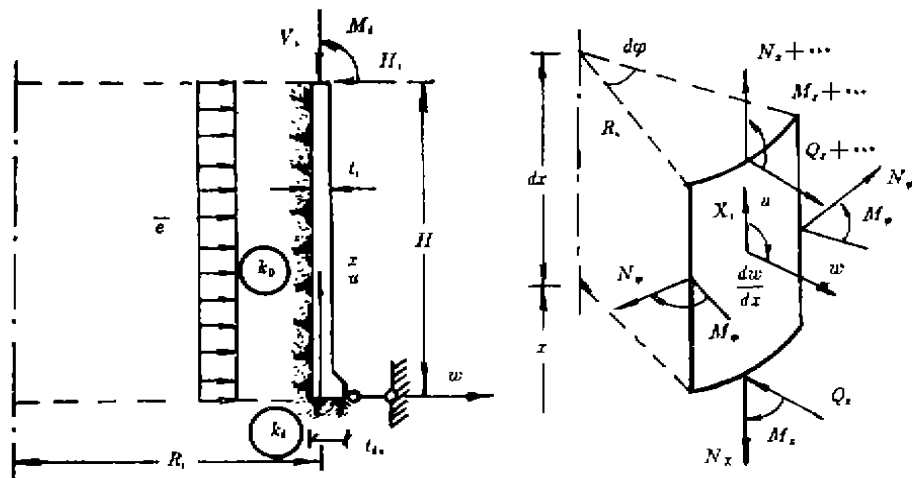


图3 内环墙的尺寸、坐标、荷载、内力及位移规定

式算得，并用环壳中的待定常数 $C_1 \sim C_4$ 和 Q_0 表示为：

$$\left. \begin{aligned}
 H_i &= [Q_\varphi \sin\varphi - N_\varphi \cos\varphi]_{\varphi=\varphi_1} = \sum_{j=1}^4 h_{ij}C_j + h_{i0}Q_0 + h_{ip} \\
 V_i &= [Q_\varphi \cos\varphi + N_\varphi \sin\varphi]_{\varphi=\varphi_1} = \sum_{j=1}^4 v_{ij}C_j + v_{i0}Q_0 + v_{ip} \\
 M_i &= [M_\varphi]_{\varphi=\varphi_1} = \sum_{j=1}^4 m_{ij}C_j + m_{i0}Q_0 + m_{ip}
 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

内环墙的平衡方程及弹性方程分别为：

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_x}{dx} + X_i &= 0, & \frac{dM_x}{dx} - Q_x &= 0, \\ \frac{dQ_x}{dx} - \frac{N_\varphi}{R_i} + \bar{e} - k_0 w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{Et_i}{1-\mu^2} \left(\frac{du}{dx} + \mu \frac{w}{R_i} \right), & M_x &= \frac{M_\varphi}{\mu} = -D \frac{d^2 w}{dx^2}, \\ N_\varphi &= \frac{Et_i}{1-\mu^2} \left(\frac{w}{R_i} + \mu \frac{du}{dx} \right), & D &= \frac{Et_i^3}{12(1-\mu^2)} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

积分(10)式，并引入墙项条件 $(N_x)_{x=H} = -V_i$ ，得

$$N_x = -V_i + X_i(H-x) \quad (12)$$

代(12)式入(11)式，得

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\mu w}{R_i} - \frac{(1-\mu^2)[V_i + X_i(x-H)]}{Et_i} \quad (13)$$

代(13)式入(11)₃式，得

$$N_\varphi = \frac{Et_i}{R_i} w - \mu[V_i + X_i(x-H)] \quad (14)$$

然后，从(10)_{2,3}式消去 Q_x ，并将(11)₂式、(13)式代入，便可以得到内环墙的基本方程式为：

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{1}{D_i} \left(\frac{Et_i}{R_i^2} + k_0 \right) w = \frac{\bar{e}}{D_i} + \frac{\mu[V_i + X_i(x-H)]}{D_i R_i} \quad (15)$$

求解(15)式，并将所得到的 w 代入(13)、(14)式，再用(11)₂、(10)₂式计算 M_x 、 Q_x 。其最后结果为：

$$\left. \begin{aligned} N_x &= -V_i - X_i(x-H), \\ N_\varphi &= \frac{Et_i}{R_i} w - \mu[V_i + X_i(x-H)] \\ M_x &= \frac{M_\varphi}{\mu} = 2\lambda_i^2 D_i (C_{i1} f_2 - C_{i2} f_1 - C_{i3} f_4 + C_{i4} f_3) \\ Q_x &= 2\lambda_i^3 D_i [C_{i1}(f_3 + f_4) + C_{i2}(f_3 - f_4) + C_{i3}(f_2 - f_1) + C_{i4}(f_2 + f_1)] \\ u &= -k_{i1}(Q_x + \bar{e}x) + C_{i5} - \left(\frac{\mu k_{i1}}{R_i} + \frac{1-\mu^2}{Et_i} \right) [V_i + X_i \left(\frac{x}{2} - H \right)] x \\ w &= C_{i1} f_1 + C_{i2} f_2 + C_{i3} f_3 + C_{i4} f_4 + \frac{k_{i1}}{\mu} \left\{ \bar{e} R_i + \mu[V_i + X_i(x-H)] \right\} \\ \frac{dw}{dx} &= \lambda_i [C_{i1}(f_4 - f_3) + C_{i2}(f_4 + f_3) + C_{i3}(f_1 + f_2) + C_{i4}(f_1 \\ &\quad - f_2)] + k_{i1} X_i \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i^4 &= \frac{1}{4D_i} \left(\frac{Et_i}{R_i^2} + k_0 \right), & D_i &= \frac{Et_i^3}{12(1-\mu^2)} \\ f_1 &= Ch\xi_i \cos \xi_i, & f_2 &= Sh\xi_i \sin \xi_i, & f_3 &= Ch\xi_i \sin \xi_i, \\ f_4 &= Sh\xi_i \cos \xi_i, & \xi_i &= \lambda_i x, & k_{i,1} &= \frac{\mu}{4D_i \lambda_i^4 R_i} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

(16)式中的积分常数 $C_{i,1} \sim C_{i,6}$ ，由剩下的五个边界条件来确定，它们是：

(1)、墙顶处内环墙与环壳的内力协调，即

$$[M_x, Q_x]_{x=H} = [M_i, -H_i];$$

(2)、墙底无水平位移， $(w)_{x=0} = 0$ ；

(3)、在墙底处，内环墙与岩基间的转角及竖向变形协调，即

$$\left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=c} = \frac{1}{k_d I_{d_i}} [N_x e_{d_i} - M_x]_{x=c}$$

$$(u)_{x=0} = \frac{1}{k_d I_{d_i}} (N_x)_{x=c} + \frac{e_{d_i}}{k_d I_{d_i}} [N_x e_{d_i} - M_x]_{x=0}$$

$$I_{d_i} = \frac{t_{d_i}^3}{12}, \quad e_{d_i} = \frac{t_{d_i} - t_i}{2}$$

将(16)式代入上述五个边界条件，并注意到(9)式后，便可以得到求诸积分常数的五个方程式，它们为：

$$\left. \begin{aligned} f_{20} C_{i,1} - f_{10} C_{i,2} - f_{40} C_{i,3} + f_{30} C_{i,4} - k_{i,5} \left(\sum_{j=1}^4 m_{ij} C_j + m_{iQ} Q_0 \right) &= k_{i,5} m_{i,p} \\ (f_{30} + f_{40}) C_{i,1} + (f_{30} - f_{40}) C_{i,2} + (f_{20} - f_{10}) C_{i,3} + (f_{20} + f_{10}) C_{i,4} \\ + k_{i,6} \left(\sum_{j=1}^4 h_{ij} C_j + h_{iQ} Q_0 \right) &= -k_{i,6} h_{i,p} \\ C_{i,1} + k_{i,1} \left(\sum_{j=1}^4 v_{ij} C_j + v_{iQ} Q_0 \right) &= k_{i,1} (X_i H - v_{i,p}) - k_{i,2} \bar{e} \\ \frac{2\lambda_i^2 D_i}{k_d I_{d_i}} C_{i,2} - \lambda_i (C_{i,3} + C_{i,4}) - k_{i,3} \left(\sum_{j=1}^4 v_{ij} C_j + v_{iQ} Q_0 \right) &= k_{i,1} X_i + k_{i,3} (v_{i,p} - X_i H) \\ \frac{2\lambda_i^2 D_i e_{d_i}}{k_d I_{d_i}} C_{i,2} + \frac{\mu}{2\lambda_i R_i} (C_{i,4} - C_{i,3}) - C_{i,5} - k_{i,4} \\ \cdot \left(\sum_{j=1}^4 v_{ij} C_j + v_{iQ} Q_0 \right) &= -k_{i,4} (X_i H - v_{i,p}) \\ k_{i,2} = \frac{k_{i,1} R_i}{\mu}, & k_{i,3} = -\frac{e_{d_i}}{k_d I_{d_i}}, & k_{i,4} = \frac{1}{k_d t_{d_i}} + k_{i,3} e_{d_i} \\ k_{i,5} = \frac{1}{2\lambda_i^2 D_i}, & k_{i,6} = 2\lambda_i k_{i,2} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式中 $f_{10} \sim f_{40}$ 为 $x=H$ 时，按(17)式计算的 $f_1 \sim f_4$ 值。

3 外环墙的计算

外环墙的尺寸、坐标、荷载、内力及位移的规定如图 4 示。图中 k_0 及 k_d 与内环墙的意义相同。 V_0 、 H_0 及 M_0 为外环墙与环壳间的相互作用力，可以由(8)式算得，仍用环壳中的待

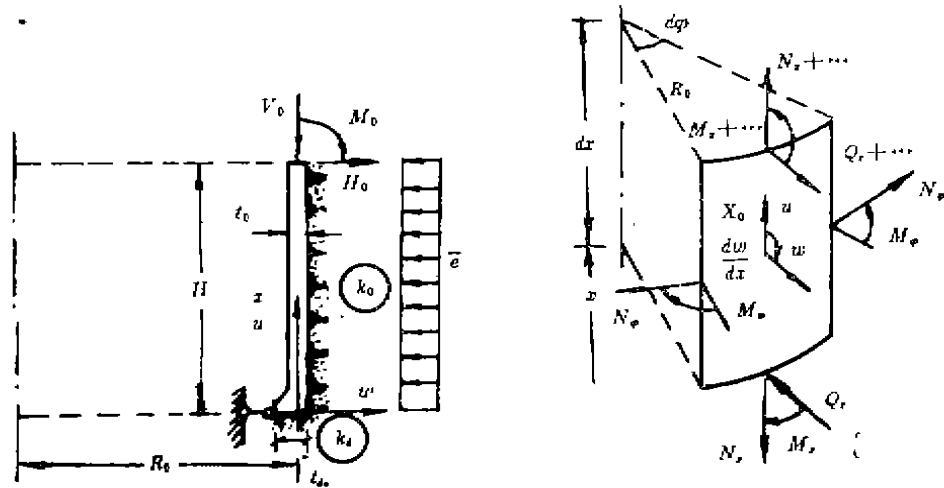


图 4 外环墙尺寸、坐标、荷载、内力及位移的规定

定常数 $C_1 \sim C_4$ 和 Q_0 表示为：

$$\left. \begin{aligned} H_0 &= [Q_x \sin \varphi - N_x \cos \varphi]_{x=r_2} = \sum_{j=1}^4 k_{0j} C_j + k_{00} Q_0 + k_{0p} \\ V_0 &= [-Q_x \cos \varphi - N_x \sin \varphi]_{x=r_2} = \sum_{j=1}^4 v_{0j} C_j + v_{00} Q_0 + v_{0p} \\ M_0 &= (M_x)_{x=r_2} = \sum_{j=1}^4 m_{0j} C_j + m_{00} Q_0 + m_{0p} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

按照与内环墙相同的步骤，可以得到外环墙的计算公式。推导表明，内环墙用的(16)式仍然可以用于外环墙，但须将部分参数作如下变换： $[\lambda_i, \xi_i, D_i, t_i, t_{di}, R_i, X_i, V_i, H_i, M_i, C_{01} \sim C_{06}, f_1 \sim f_4, \bar{e}] \rightarrow [\lambda_0, \xi_0, D_0, t_0, t_{d0}, R_0, X_0, V_c, H_0, M_0, C_{01} \sim C_{06}, g_1 \sim g_4, -\bar{e}]$ 。除图 4 及(19)式已定义了的参数外，其余新参数的计算公式为：

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0^4 &= \frac{1}{4D_0} \left(\frac{Et_0}{R_0} + k_0 \right), & D_0 &= \frac{Et_0}{12(1-\mu^2)} \\ g_1 &= Ch\xi_0 \cos \xi_0, & g_2 &= Sh\xi_0 \sin \xi_0, & g_3 &= Ch\xi_0 \sin \xi_0 \\ g_4 &= Sh\xi_0 \cos \xi_0, & \xi_0 &= \lambda_0 x \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

这时，确定积分常数 $C_{01} \sim C_{06}$ 的五个边界条件，物理意义与内环墙相同，其表达形式为：

$$\begin{aligned}
 [M_x, Q_x]_{x=H} &= [-M_0, H_0] \\
 \left[w, \frac{dw}{dx} \right]_{x=0} &= \left[0, \frac{1}{k_d I_{d0}} (N_x e_{d0} + M_x)_{x=0} \right] \\
 (u)_{x=0} &= \frac{1}{k_d t_{d0}} (N_x)_{x=0} + \frac{e_{d0}}{k_d I_{d0}} [N_x e_{d0} + M_x]_{x=0} \\
 e_{d0} &= \frac{t_{d0} - t_0}{2}, \quad I_{d0} = \frac{t_{d0}^3}{12}
 \end{aligned} \tag{21}$$

将外环的有关表达式代入(21)式, 便可以得到类似于(18)式的方程组, 为

$$\begin{aligned}
 &g_{20} C_{01} - g_{10} C_{02} - g_{40} C_{03} + g_{30} C_{04} + k_{05} \left(\sum_{j=1}^4 m_{0j} C_j + m_{0Q} Q_0 \right) \\
 &= -k_{05} m_{0p} \\
 &(g_{30} + g_{40}) C_{01} + (g_{30} - g_{40}) C_{02} + (g_{20} - g_{10}) C_{03} \\
 &+ (g_{20} + g_{10}) C_{04} - k_{06} \left(\sum_{j=1}^4 h_{0j} C_j + h_{0Q} Q_0 \right) = k_{06} h_{0p} \\
 &C_{01} + k_{01} \left(\sum_{j=1}^4 v_{0j} C_j + v_{0Q} Q_0 \right) = k_{01} (X_0 H - v_{0p}) + k_{02} \bar{e} \\
 &\frac{2\lambda_0^2 D_0}{k_d I_{d0}} C_{02} - \lambda_0 (C_{03} + C_{04}) + k_{03} \left(\sum_{j=1}^4 v_{0j} C_j + v_{0Q} Q_0 \right) \\
 &= k_{01} X_0 - k_{03} (v_{0p} - X_0 H) \\
 &\frac{2\lambda_0^2 D_0 e_{d0}}{k_d I_{d0}} C_{02} + \frac{\mu}{2\lambda_0 R_0} (C_{03} - C_{04}) + C_{05} + k_{04} \left(\sum_{j=1}^4 v_{0j} C_j \right. \\
 &\left. + v_{0Q} Q_0 \right) = k_{04} (X_0 H - v_{0p}) \\
 &k_{01} = \frac{\mu}{4D_0 \lambda_0^2 R_0}, \quad k_{02} = \frac{k_{01} R_0}{\mu}, \quad k_{03} = \frac{e_{d0}}{k_d I_{d0}} \\
 &k_{04} = \frac{1}{k_d t_{d0}} + k_{03} e_{d0}, \quad k_{05} = \frac{1}{2\lambda_0^2 D_0}, \quad k_{06} = 2\lambda_0 k_{02}
 \end{aligned} \tag{22}$$

式中 $g_{10} \sim g_{20}$ 为 $x=H$ 时, 按(20)式计算的 $g_1 \sim g_4$ 值。

4 环壳与内、外环墙间的变形协调

环壳与内、外环墙间的内力协调, 在讨论环墙的计算时, 已通过引入墙顶外力 V_i, H_i, M_i 及 V_0, H_0, M_0 予以考虑。这里, 再讨论它们之间的变形协调。根据我们的规定, 在环壳与环墙交界处, 环壳和环墙的位移正方向如图 5 示。如果不考虑交界处环壳中线与环墙中线间的微小偏心, 其变形协调条件为:

$$[w_i, \theta_i, w_0, \theta_0, u_i - u_0] = [Y_i, \chi_i, Y_0, \chi_0, Z_0 - Z_i] \tag{23}$$

这里的 Z_0 是指环壳在外墙墙顶处的竖向位移 Z , 而不是(2)式中的 Z_0 。如果需要考虑环壳中线与环墙中线间的偏心, 可以根据实际情况, 写出与(23)式相近的变形协调条件, 这时, (9)₃, (19)₃ 式也应适当修正。

我们用(16)式, 取 $x=H$, 可以得到(23)式左端的 w_i, u_i 及 $\theta_i = \left(\frac{dw}{dx} \right)_i$, 再把(16)式转

换为外环墙的公式,用来计算 w_0, u_0 及 θ_0 , 这些值均为待常数 $C_{i1} \sim C_{i8}$ (或 $C_{01} \sim C_{08}$)、 $C_1 \sim C_4$ 及 Q_0 的函数。另外, 由(8)₆₋₈式, 取 $\varphi = \varphi_1$ 得 Y_1, X_1 及 Z_1 , 取 $\varphi = \varphi_2$ 得 y_0, x_0 及 Z_0 , 它们为 $C_1 \sim C_4$ 及 Q_0 的函数, 于是我们可以把(23)式的右端表达成为:

$$Y_1 = \sum_{j=1}^4 y_{1j} C_j + y_{1Q} Q_0 + y_{1p}$$

$$X_1 = \sum_{j=1}^4 x_{1j} C_j + x_{1Q} Q_0 + x_{1p}$$

$$Y_0 = \sum_{j=1}^4 y_{0j} C_j + y_{0Q} Q_0 + y_{0p}$$

$$X_0 = \sum_{j=1}^4 x_{0j} C_j + x_{0Q} Q_0 + x_{0p}$$

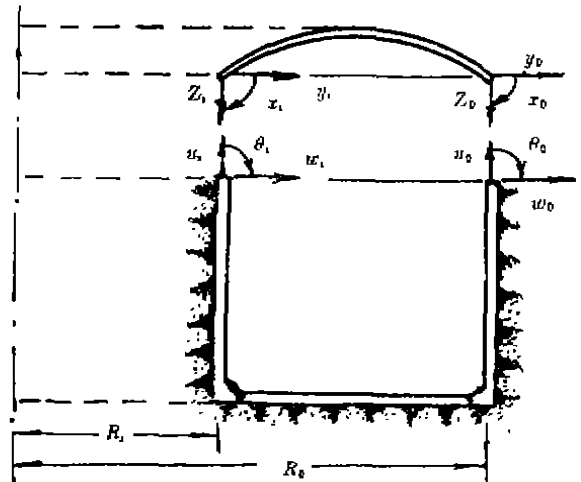


图 5 环壳与环墙交界处的位移正向

$$Z_0 - Z_1 = \sum_{j=1}^4 z_j C_j + z_Q Q_0 + z_p$$

将环墙及环壳在其交界处的上述各位移值, 代入(23), 经整理后, 便得到以下描写变形协调的五个方程式:

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{j=1}^4 \left[f_{10} C_{1j} + (k_{11} v_{1j} - y_{1j}) C_j \right] + (k_{11} v_{1Q} - y_{1Q}) Q_0 = y_{1p} - k_{11} v_{1p} - k_{12} \bar{e} \\ & \lambda_1 \left\{ (f_{40} - f_{30}) C_{11} + (f_{40} + f_{30}) C_{12} + (f_{10} + f_{20}) C_{13} + (f_{10} - f_{20}) C_{14} \right\} \\ & - \sum_{j=1}^4 x_{1j} C_j - x_{1Q} Q_0 = x_{1p} - k_{11} X_1 \\ & \sum_{j=1}^4 \left[g_{20} C_{0j} + (k_{01} v_{0j} - y_{0j}) C_j \right] + (k_{01} v_{0Q} - y_{0Q}) Q_0 = y_{0p} - k_{01} v_{0p} + k_{02} \bar{e} \\ & \lambda_0 \left\{ (g_{40} - f_{30}) C_{01} + (g_{40} + f_{30}) C_{02} + (g_{10} + g_{20}) C_{03} \right. \\ & \left. + (g_{10} - g_{20}) C_{04} \right\} - \sum_{j=1}^4 x_{0j} C_j - x_{0Q} Q_0 = x_{0p} - k_{01} X_0 \\ & - k_{17} \left\{ (f_{30} + f_{40}) C_{11} + (f_{30} - f_{40}) C_{12} + (f_{20} - f_{10}) C_{13} + (f_{20} \right. \\ & \left. + f_{10}) C_{14} \right\} + C_{15} + k_{07} \left\{ (g_{30} + g_{40}) C_{01} + (g_{30} - g_{40}) C_{02} + (g_{20} \right. \\ & \left. - g_{10}) C_{03} + (g_{20} + g_{10}) C_{04} \right\} - C_{06} + \sum_{j=1}^4 (k_{08} v_{0j} - k_{18} v_{1j} - z_j) C_j + \\ & (k_{08} v_{0Q} - k_{18} v_{1Q} - z_Q) Q_0 = z_p - k_{08} \left(v_{0p} - \frac{X_0 H}{2} \right) + k_{18} \left(v_{1p} - \frac{X_1 H}{2} \right) \\ & + (k_{11} + k_{01}) H \bar{e} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式中

$$k_{i7} = \frac{\mu}{2\lambda_i R_i}, \quad k_{i8} = \left(\frac{\mu k_{i1}}{R_i} + \frac{1-\mu^2}{Et_i} \right) H$$

$$k_{o7} = \frac{\mu}{2\lambda_o R_o}, \quad k_{o8} = \left(\frac{\mu k_{o1}}{R_o} + \frac{1-\mu^2}{Et_o} \right) H$$

至此为止, 我们导出了计算贴壁式直墙环状衬砌的全部公式。应用时, 先由边界条件方程(18)、(22)及变形协调方程(24), 求出 $C_{i1} \sim C_{i5}$, $C_{o1} \sim C_{o5}$, $C_1 \sim C_4$ 及 Q_0 等15个待定量。再用(8)式计算环壳的内力及位移; 用(16)式及其类似的公式, 计算内、外环墙的内力及位移。须说明, 在我们的示例中, 计算(8)₀时取 $\varphi_0 = \varphi_1$, 并采用了数值积分法来求其值。

5 示例及其分析

应用本文公式, 我们编制了计算程序, 进行了数值计算。作为示例, 输入的计算参数为:

材料的弹性模量 $E = 25.5 \text{ GPa}$, 泊松比 $\mu = 1/6$, 容重 25 kN/m^3 , 竖向围岩压力 $q = 20 \text{ kN/m}^2$, 水平围岩压力 $\bar{e} = 4 \text{ kN/m}^2$, 围岩弹性抗力系数 $k_0 = 2.5 \text{ GN/m}^3$, 岩基弹性抗力系数 $k_d = 2.5 \text{ GN/m}^3$, 衬砌的半径 $R = 30 \text{ m}$, 数值积分精度 10^{-8} 。

环壳的圆弧半径 $a = 10 \text{ m}$, 厚度 $h = 0.2 \text{ m}$, $\varphi_2 = -\varphi_1 = 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ$, 齐次解的特征系数 $\beta = 4.182284$, $T = 0.530808$, 输出11个截面的计算结果。

内、外环墙的高度 $H = 6 \text{ m}$, 厚度 $t_i = t_o = 0.2 \text{ m}$, 墙底扩基宽度 $t_{di} = t_{do} = 0.2 \text{ m}$, 输出11个截面的计算结果。

计算表明, 在本示例中环壳齐次解及与 Q_0 有关的特解, 取级数前15项其精度已足够了, 但与荷载有关的特解应取至级数的前20项。在图6中, 给出了主要计算结果, 计算时取环壳齐次解及与 Q_0 有关的特解的级数为前20项, 荷载特解的级数为前40项。上述最少级数项的结果, 与之相比, 相对误差位移一般小于1%, 个别达2%, 内力一般小于1%, 个别数值很小的量可达7%左右。可见解的级数收敛良好。计算表明, 与自重有关的特解的收敛性远不如其它级数项, 因此, 对于以自重为主要荷载的环状衬砌, 荷载特解的级数应取较多的项数, 才能保证计算精度。另外, (8)₃式数值积分的精度, 不能大于 10^{-7} , 否则, 相关的变形协调条件不能保证。在本示例中, 我们校核了所有的内力及变形协调条件, 校核了环壳的整体竖向平衡, 都是完全满足的, 没有相对误差。

由图6可知, 当 $\varphi_2 = 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ$ (相应的衬砌跨度 $R_o - R_i = 2a \sin \varphi_2 = 10.000 \text{ m}, 12.856 \text{ m}, 15.321 \text{ m}$), 环壳的 N_z , 环墙的 N_z 随 φ_2 角的增加而变大, 且内环墙区略大于外环墙区。环壳的 M_z 及 Z 的变化规律略带对称性; Q_z 略带反对称性。随着 φ_2 角的增大, 两端的负 M_z 逐步减少, 而顶部($\varphi = 0^\circ$ 处)区的正 M_z 略有减少; 外端的 Z 略有增加, 内端的 Z 变化很小, 顶部区的 Z 逐渐增大。由于围岩的约束及圆筒自身的受力特性的影响, 除薄膜内力及面内变形外, 环墙的弯曲效应基本上集中在墙顶附近, 其集中影响的区范围约为1/5墙高, 渡过该区后, 弯曲效应迅速衰减, 其弯曲效应可略而不计。计算表明, 就绝对值而言, 环壳的 N_z 约为 $N_z/3$, M_z 约为 $(1/2 \sim 1/10) M_z$ 。(值越小两者越接近), 环墙的 N_z 约为 $(1/6 \sim$

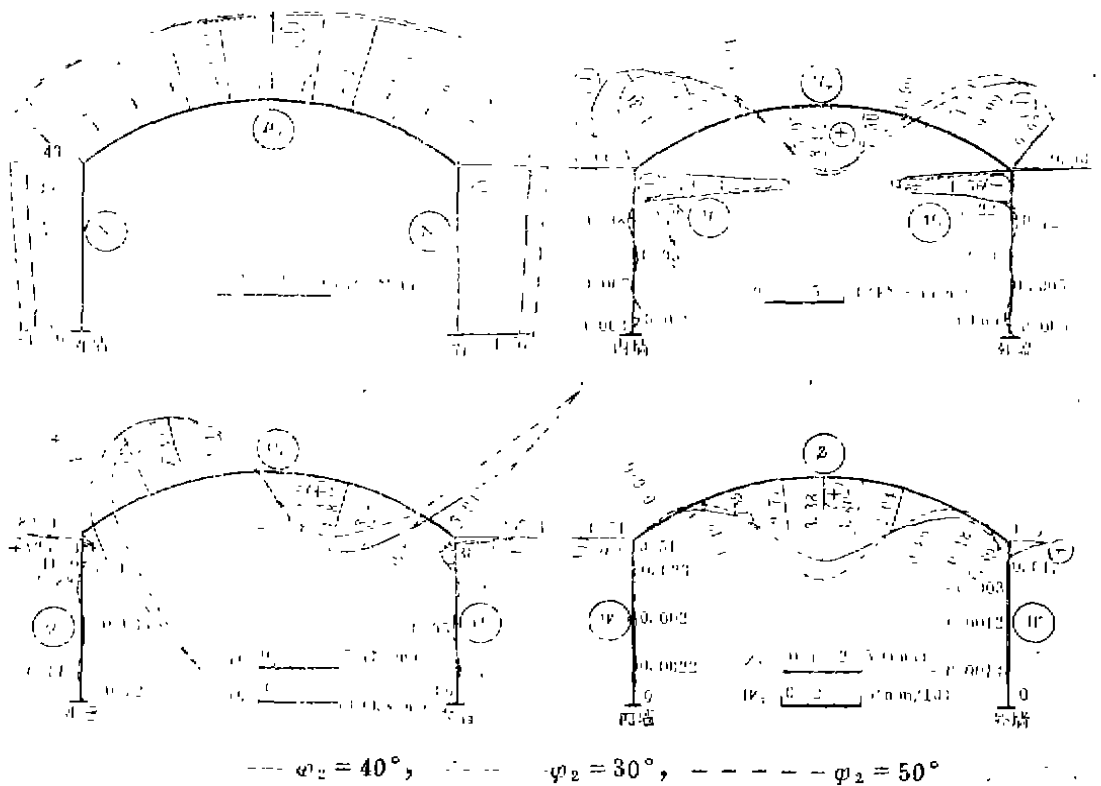


图6 示例主要计算结果

1/7) N_x 。我们对不同的 $\alpha = a/R$ 及改变环墙厚度作了一些计算, 发现 $\alpha = 0.05$ 时, 衬砌变形及内力的对称性更加明显。环墙厚度的增大, 将略减小环壳的弯曲效应, 而环墙顶端附近的集中效应更为明显。

最后须指出, 由于这种衬砌的环墙较为刚性, 在数值计算过程中, 某些中间参数的量级可能相差到 10^{12} 左右, 为了确保计算结果的可信度, 宜采用双精度数值运算。

6 结束语

环状衬砌是涉及到圆环壳及圆筒壳的组合结构, 其计算公式的推演过程比较繁冗, 本文从工程的角度出发, 重在说明原理、列出全部应用公式, 略去其推导。文中的圆环壳是以 [1] 为基础的, 只适用于 $\alpha = a/R < 1$ 的情形。

文中只涉及到地下工程中常见的自重、竖向及水平围岩压力三种荷载。其它轴对称荷载时的计算, 通过适当处理, 亦可得到解决。对于非轴对称荷载, 由于涉及到的圆环壳理论, 目前未见解决, 还不能讨论。

环状衬砌在什么条件下, 可以简化为普通直通道衬砌进行计算, 尚待通过大量计算分析后, 才能定论。就文中示例来看, 在 $\alpha = a/R < 0.05$ 时, 可作为这一简化条件。

参 考 文 献

- 1 钱伟长, 郑慧梁. 轴对称圆环壳的一般解, 应用数学和力学, 1, 3 (1980), 287-299
- 2 孙仁博, 王玳瑜, 侧压下圆环壳的准确解, 上海力学, 9, 2 (1988), 13-23

- 3 王玳瑜, 孙仁博, 邹定祺. 雪型荷载作用下圆环壳的弯曲问题. 应用力学学报. 4, 3 (1987), 77-88
- 4 邹定祺, 吴国平, 王玳瑜, 环壳Novozhilov's方程特性指数的补充计算, 重庆建筑工程学院学报, 8, 4 (1986), 21-29
- 5 W. Flugge, Stresses in Shell, Springer-Verlag, Berlin, 1960
- 6 重庆建筑工科大学等, 岩石地下建筑结构, 中国建筑工业出版社, 北京, 1982

(编辑: 徐维森)

ANALYTICAL SOLUTION OF RING SHELL LINING WITH ANNULARLY VERTICAL WALLS MADE CONTACT WITH SURROUNDING ROCK

Sun Renbo *Lu Ping*

(Department of Civil Engineering)

ABSTRACT In this paper, the ring shell lining with annularly vertical walls made contact with the surrounding rock is considered as a combination structure formed of ring shell, inner and outer annular barrels on elastic foundation. The complex equation and its solutions of ring shell under dead load of lining and vertical and horizontal surrounding rock pressures are derived by the method of complex function. The governing equation and its solution of the barrels on elastic foundation are also derived by theory of cylindrical shell. And then, the ring shell lining is assembled by the substructures by means of compatibility conditions of internal forces and deformations between them. In the paper, all formulas for the practical computation in engineering are derived, the numerical examples are given and the effects of the parameters of the lining on the work behaviours of lining also are discussed preliminarily

KEY WORDS ring shell, lining made contact with surrounding rock, underground structure