

复杂体型筒体结构的变分解法

李正良 税国辉 冯翼然

(建筑工程系)

摘要 本文应用连续化方法将任意多边形的框筒、核心筒看作是由正交异性板组成的悬臂箱形梁。根据空间薄壁结构理论并考虑剪力滞后效应建立了统一的位移场表达式,然后应用能量变分原理建立了具有普遍意义的微分方程组,根据微分方程理论求得了解析解,并给出了一个算例。

关键词 筒体结构,薄壁理论,变分原理,剪力滞后效应

自从最早的筒体结构(美国芝加哥1963年建造的43层 Dewitt Chestnut 公寓)问世以来,筒体结构的体型发生了从简单到复杂的变化,并且日益趋于高耸,从而带来了计算上的困难。如果采用有限元法进行分析,工作量十分巨大,所费代价高,且往往受到计算机内存的限制。因而,对筒体结构的简化分析方法的研究是十分必要的。

迄今为止,国内外的学者们在这一方面作了不少努力,其成果之一就是采用连续化假定,即将框筒结构或带有连梁的核心筒结构简化为具有等效弹性性质的悬臂箱形梁,并忽略等效壁板在自身平面内的弯曲变形,进而采用近似法分析连续体的内力和位移,取得了令人满意的效果。

但这些方法还有待于推广到体型比较复杂的结构。本文正是针对这一不足,对复杂基底平面构成的复杂体型筒体结构的分析进行了研究。根据薄壁结构理论并考虑剪力滞后效应建立了筒体结构的位移场,然后应用变分原理来解决,实例计算表明,这种方法对筒体结构作初步设计时分析是十分有效的。

1 筒体结构的等效连续化模型

1.1 框筒结构的等效连续化模型

框筒结构的等效连续化模型可采用如图1所示的由正交异性板组成的悬臂箱形梁,其中角柱可看作加劲肋。本文假定每片梁柱体系的柱距相互不等,因而,每片正交异性板的弹性常数不一。

关于求等效弹性常数的方法,国内外的文献颇多,本文不予介绍。

第 i 片正交异性板的物理方程可表为:

$$\epsilon_{s_i} = \frac{\sigma_{s_i} - \mu_{s_i}^* \sigma_{z_i}}{E_{s_i}^*} \quad (1)$$

$$\epsilon_{z_i} = \frac{\sigma_{z_i} - \mu_{z_i}^* \sigma_{s_i}}{E_{z_i}^*} \quad (2)$$

$$\gamma_{sz_i} = \frac{\tau_{sz_i}}{G_{sz_i}} \quad (3)$$

式中, s 代表切向, z 代表纵向。

不考虑梁的轴向变形,即令 $\epsilon_{z_i} = 0$, 简化式 (1)、(2) 并整理可得

$$\sigma_{z_i} = E_i \epsilon_{z_i} \quad (4)$$

其中,

$$E_i = \frac{E_{z_i}^*}{1 - \mu_{s_i}^* \mu_{z_i}^*}$$

1.2 核心筒结构的等效连续化模型

核心筒在每个楼层开有门洞, 门洞的上方设有连系梁把两侧板连接起来, 在用连续化方法分析时, 可将连系梁的作用化为等效的正交异性板。

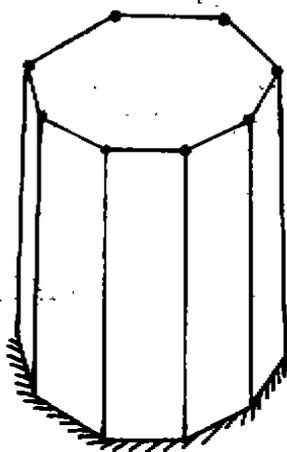


图1 框筒连续化模型

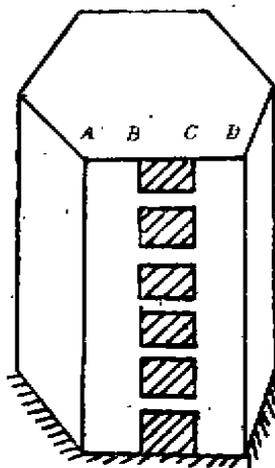


图2 核心筒连续化模型

图2中有连系梁的壁板 AD 可看作是由 AB , BC , CD 三块板组成, 其中 BC 为正交异性板, 其余二板则是各向同性板。如核心筒的平面图形是 n 边形, 则本文在处理问题时可将它看作是一平面为 $n+2$ 边形的结构。

由于各向同性板是正交异性板的一种特殊情况 ($E_{s_i} = E_z = E$, $\mu_{s_i} = \mu_{z_i} = \mu$), 故核心

筒和框筒可采用同一连续化模型，由具有不同弹性性质的正交异性板组成的带有加劲肋的任意多边形的悬臂箱形梁（对于核心筒，加劲肋的面积 $A_{ci} = 0$ ）。

2 复杂体型筒体结构的位移场

2.1 薄壁结构的几何方程

薄壁结构的几何方程的表达式是

$$\begin{cases} \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \gamma_{sz} = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{cases} \quad (6)$$

其中， v 是切向位移， w 是纵向位移。

2.2 薄壁结构的位移表达式

根据薄壁结构理论，箱形薄壁结构的切向，法向及纵向位移可表为（文献(7)）：

$$v = -\xi(z)\sin\alpha(s) + \eta(z)\cos\alpha(s) + \varphi(z)\rho_0(s) \quad (7)$$

$$u = \xi(z)\cos\alpha(s) + \eta(z)\sin\alpha(s) + \varphi(z)\rho_n(s) \quad (8)$$

$$w = \omega_0(z) - \xi'(z)x(s) + \eta'(z)y(s) - \theta(z)\hat{\omega}_0(s) \quad (9)$$

其中， $\xi(z)$ ， $\eta(z)$ 分别是断面剪切中心沿 x 和 y 方向的位移， φ 是断面绕剪切中心的扭转角， α 为断面上任意点的法线与 x 轴的正向间的夹角， ρ_0 与 ρ_n 为从扭转中心到断面上任意点的切线与法线的垂距， $\hat{\omega}_0(s)$ 表示箱形闭口断面相对于剪切中心的扇性坐标。 $\theta(z)$ 是一待定函数。图 3 所示。

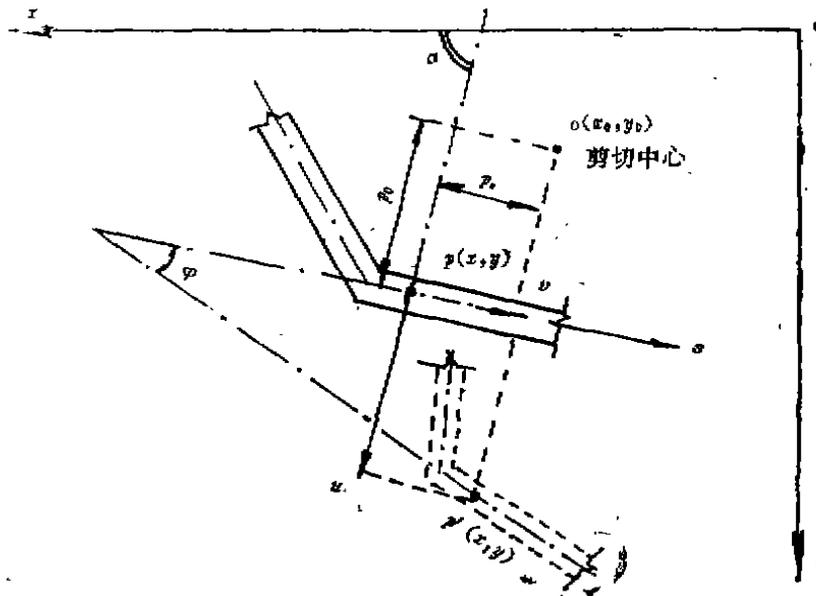


图 3 箱形薄壁的截面变形

2.8 筒体结构的位移场

筒体结构存在着剪力滞后现象-由于梁柱的变形引起的纵向应力的变化。因此，必须对薄壁结构的位移模式（9）进行修正，因为它与纵向应力 σ_z 存在着直接关系：

$$\sigma_z = E \varepsilon_z = E_t \frac{\partial w}{\partial z}$$

为此，定义广义函数：

$$\omega_j^*(s) = \begin{cases} 0 & s \leq s(j-1) \\ \omega(s) & s(j-1) < s < s(j) \\ 0 & s \geq s(j) \end{cases}$$

且 $\omega_j[s(j-1)] = \omega_j[s(j)]$

$$\text{及} \quad \frac{d\omega_j^*(s)}{ds} = \begin{cases} 0 & s \leq s(j-1) \\ \omega_j'(s) & s(j-1) < s < s(j) \\ 0 & s \geq s(j) \end{cases}$$

其中， $s(j) = \sum_{n=1}^j s_n$ 且 s_n 表示多边形框筒的第 n 个边的边长， $s(j)$ 也表示第 j 根角柱的

弧线坐标。显然， $s_j = s(j) - s(j-1)$ 。如图 4 所示。

不难看出， $\omega_j^*(s)$ 虽然是定义在整个区间 $[0, s(m)]$ 上的函数，但只有在区间 $[s(j-1), s(j)]$ 不为零，也就是 $\omega_j(s)$ 是定义在第 j 块壁板上的函数，根据式（7），（8），（9）作相应的修改，本文将下列表达式作为复杂体型筒体结构的位移场：

$$v = \sum_{l=1}^3 \psi_l(z) v_l(s) \quad (10)$$

$$u = \sum_{l=1}^3 \psi_l(z) u_l(s) \quad (11)$$

$$w = \sum_{l=1}^3 f_l(s) g_l(z) + \sum_{i=1}^m \theta_i(z) \omega_i^*(s) \quad (12)$$

其中， m 为多边形的边数， $v_l(s)$ ， $u_l(s)$ ， $(l=1, 2, 3)$ 是彼此线性无关的已知函数，显然 $v_l(s)$ ， $u_l(s)$ 可以不是唯一的，例如根据式（7），（8）可分别取为：

$$v_1 = -\sin \alpha(s), \quad v_2 = \cos \alpha(s), \quad v_3 = \rho_0(s)$$

$$u_1 = \cos \alpha(s), \quad u_2 = \sin \alpha(s), \quad u_3 = \rho_n(s)$$

而 $f_l(s)$ 可根据式（9）取为如下：

$$f_1 = 1, \quad f_2 = x, \quad f_3 = y$$

由于 $\omega_j^*(s)$ 的特殊性，以上的位移场均满足连续性条件，包括纵向应变 $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$ 也是连续的，这样就可保证变形的协调性。

根据物理方程及几何方程得出应力场：

$$\sigma_{zi} = E_i \frac{\partial w}{\partial z} = E_i \left(\sum_{l=1}^3 f_l g_l' + \omega_i \theta_l' \right) \quad (13)$$

$$\tau_{zs_i} = G_i \left(\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = G_i \left[\sum_{l=1}^3 (f_l' g_l + \psi_l' v_l) + \omega_l' \theta_l \right] \quad (14)$$

$$\sigma_{ci} = E \sum_{l=1}^3 g_l' f_l[s(i)] \quad (15)$$

式中， σ_{ci} 表示第 i 根角柱的正应力。 E 为角柱的弹性模量此外角柱的正应变为：

$$e_{ci} = \sum_{l=1}^3 g_l' f_l[s(i)] \quad (16)$$

由式 (13) 可看出：只要取 ω_i 为 s 的二次或三次函数就能反映筒体结构的翼缘及腹板的剪力滞后特性，式 (13) 可反映如下的规律：

$$\sigma_z = \text{梁理论值} \left(E_i \sum_{l=1}^3 f_l g_l' \right) + \text{抛物线修正} (E_i \omega_i \theta_l')$$

这与国内外的文献及试验结果是完全类似的。因此，本文提出的位移场是比较合理的。

关于弯曲情况下的多边形框筒的腹板与翼缘可定义如下：

若第 i 块壁板与通过几何形心主惯性轴 x （与所受横向力 P 垂直的轴）不相交，则称之为翼缘，否则称之为腹板。如图 4 所示。

在弯曲的情况下，我们可选取 $\omega_i(s)$ 如下：

翼缘：

$$\omega_i(s) = 1 - \left(\frac{x'}{s_i/2} \right)^2 \quad (17)$$

腹板：

$$\omega_i(s) = x'^3 - \frac{1}{4} s_i^2 x' \quad (18)$$

上式中， x' 轴的方向与 s 的方向一致，而与 x' 轴相对应的 y' 则垂直于 x' 轴， $x'oy'$ 坐标的原点设在第 i 块壁板的中间，如图 4 所示。

在扭转的情况下，没有翼缘与腹板之分，可选取 $\omega_i(s)$ 如下：

$$\omega_i(s) = x'^3 - \frac{1}{4} s_i^2 x'$$

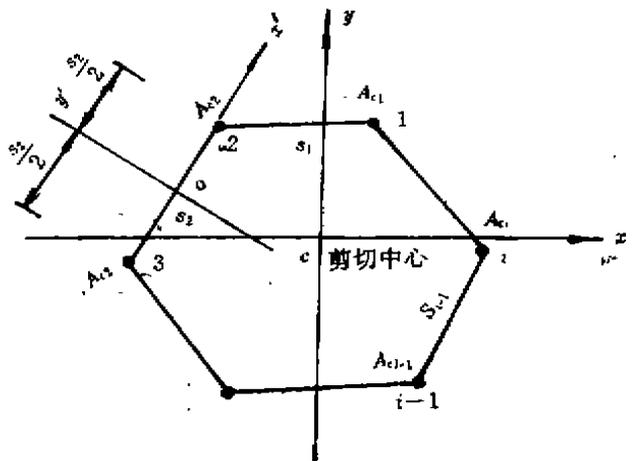


图 4 弧线坐标及腹板和翼缘示意图

3 能量泛函、变分原理及微分方程组的建立

根据上述所建立的应力场，筒体结构的应变能可表为

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H \sum_{i=1}^m \left[\int_{A_i} \left(\frac{\sigma_{zi}^2}{E_i} + \frac{\tau_{zsi}^2}{G_i} \right) dA + \frac{\sigma_{ci}^2}{E} A_{ci} \right] dz \quad (19)$$

设 $\vec{p}(z)$ 为单位面积的荷载矢量。其沿纵向、切向及法向的分量分别为 \bar{p}_z , \bar{p}_s , \bar{p}_n 。

假定筒体结构的顶端 ($z=H$) 存在着面力矢量 $\vec{p}(s)$ ，其纵向、切向、法向的分量为 \bar{p}_{zs} , \bar{p}_{zs} , \bar{p}_{zn} 。

假定筒体结构的底部 ($z=0$) 地基是刚性的，则位移分量 v , u , w 在该处均为零，因而，底部的面力矢量不作功。

因此，外力所作的功为：

$$U = - \int_0^H \left[\int_s \bar{p}_z w ds + \int_s \bar{p}_s v ds + \int_s \bar{p}_n u ds \right] dz - \int_0^H \left[\int_A \left(\bar{p}_{zs} \frac{\partial w}{\partial z} + \bar{p}_{zs} \frac{\partial v}{\partial z} + \bar{p}_{zn} \frac{\partial u}{\partial z} \right) dA \right] dz \quad (20)$$

故所求能量泛函为：

$$\Pi = V + U = \int_0^H F(g_j, \theta_i, \psi_j, z) dz \quad (j=1,2,3, i=1,2,\dots,m) \quad (21)$$

式中，

$$F(g_j, \theta_i, \psi_j, z) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left[\int_{A_i} \left(\frac{\sigma_{zi}^2}{E_i} + \frac{\tau_{zsi}^2}{G_i} \right) dA + \frac{\sigma_{ci}^2}{E} A_{ci} \right] - \left[\int_s (\bar{p}_z w + \bar{p}_s v + \bar{p}_n u) ds + \int_A \left(\bar{p}_{zs} \frac{\partial w}{\partial z} + \bar{p}_{zs} \frac{\partial v}{\partial z} + \bar{p}_{zn} \frac{\partial u}{\partial z} \right) dA \right] \quad (22)$$

式 (21) 是含有有一阶导数的具有多个因变量的泛函，由此导得的欧拉-拉格朗日方程是：

$$\frac{\partial F}{\partial g_j} - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial F}{\partial g_j'} \right) = 0 \quad (j=1,2,3) \quad (23)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_i} - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial F}{\partial \theta_i'} \right) = 0 \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (24)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \psi_j} - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial F}{\partial \psi_j'} \right) = 0 \quad (j=1,2,3) \quad (25)$$

将式 (22) 代入以上三式，并将相应的应力场及位移场表达式代入，即可得关于 g_j , ψ_j ($j=1, 2, 3$) 和 θ_i ($i=1, 2, \dots, m$) 的微分方程组。

由式 (23) 和式 (24) 得出的微分方程组可合写成如下的矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g'' \\ \theta'' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ \theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \psi' + \begin{bmatrix} A_{101} \\ A_{02} \end{bmatrix} = 0 \quad (26)$$

其中：

$$\begin{bmatrix} g'' \\ \theta'' \end{bmatrix} = [g''_1, g''_2, g''_3, \theta''_1, \dots, \theta''_m]^T$$

$$\begin{bmatrix} g \\ \theta \end{bmatrix} = [g_1, g_2, g_3, \theta_1, \dots, \theta_m]^T$$

$$\psi' = [\psi'_1, \psi'_2, \psi'_3]^T$$

而

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11}^i & a_{12}^i & a_{13}^i \\ a_{21}^i & a_{22}^i & a_{23}^i \\ a_{31}^i & a_{32}^i & a_{33}^i \end{bmatrix}$$

且

$$a_{k_i}^i = \sum_{j=1}^m \left\{ E_i \int_{A_i} f_k f_j dA + E f_k [s(i)] f_j [s(i)] A_{0i} \right\} \quad (k=1,2,3, j=1,2,3)$$

显然 $a_{k_i}^i = a_{j_k}^i$ ，故 A_{11} 为实对称矩阵。

$$A_{12} = \begin{bmatrix} a_{11}^i & a_{12}^i \dots a_{1m}^i \\ a_{21}^i & a_{22}^i \dots a_{2m}^i \\ a_{31}^i & a_{32}^i \dots a_{3m}^i \end{bmatrix}$$

且

$$a_{j_i}^i = E_i \int_{A_i} \omega_i f_j dA \quad (i=1,2, \dots, m, j=1,2,3)$$

$$A_{21} = A_{12}^T$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} a_{11}^i & & 0 \\ & a_{22}^i & \\ 0 & & a_{mm}^i \end{bmatrix}$$

且

$$a_{ii}^i = E_i \int_{A_i} \omega_i^2 dA \quad (i=1,2, \dots, m)$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} b_{11}^i & b_{12}^i & b_{13}^i \\ b_{21}^i & b_{22}^i & b_{23}^i \\ b_{31}^i & b_{32}^i & b_{33}^i \end{bmatrix}$$

$$b_{k_i}^i = \sum_{j=1}^m G_i \int_{A_i} f'_k f'_j dA \quad (k=1,2,3, j=1,2,3)$$

显然 $b_{k_i}^i = b_{j_k}^i$ ，故 B_{11} 为实对称矩阵。

$$B_{21} = B_{12}^T$$

$$B_{22} = \begin{bmatrix} b_{11}^i & & 0 \\ & b_{22}^i & \\ 0 & & b_{mm}^i \end{bmatrix}$$

$$b_{ii}^i = G_i \int_{A_i} \omega_i'^2 dA \quad (i=1,2, \dots, m)$$

$$B_{12} = \begin{bmatrix} b_{11}^i & b_{12}^i \dots b_{1m}^i \\ b_{21}^i & b_{22}^i \dots b_{2m}^i \\ b_{31}^i & b_{32}^i \dots b_{3m}^i \end{bmatrix}$$

$$b_{j_i}^i = G_i \int_{A_i} \omega_i' f'_j dA \quad (j=1,2,3, i=1,2, \dots, m)$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} c_{11}^I & c_{12}^I & c_{13}^I \\ c_{21}^I & c_{22}^I & c_{23}^I \\ c_{31}^I & c_{32}^I & c_{33}^I \end{pmatrix} \quad c_{i,k}^I = \sum_{j=1}^m G_j \int_{A_i} v_k f_j' dA \quad (k=1,2,3; j=1,2,3)$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} c_{11}^I & c_{12}^I & c_{13}^I \\ c_{21}^I & c_{22}^I & c_{23}^I \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m1}^I & c_{m2}^I & c_{m3}^I \end{pmatrix} \quad c_{i,k}^I = G_i \int_{A_i} v_k \omega_i' dA \quad (i=1,2,\dots,m; k=1,2,3)$$

$$A_{01} = \begin{pmatrix} a_{01}^I \\ a_{02}^I \\ a_{03}^I \end{pmatrix} \quad a_{0j}^I = \sum_{i=1}^m \int_{S_i} \bar{p}_i f_j ds = \int_S \bar{p}_i f_j ds \quad (j=1,2,3)$$

$$A_{02} = \begin{pmatrix} a_{01}^I \\ a_{02}^I \\ a_{0m}^I \end{pmatrix} \quad a_{0i}^I = \int_{S_i} \bar{p}_i \omega_i dA \quad (i=1,2,\dots,m)$$

同理，式 (25) 可写为：

$$C^T Q' + D \psi'' + D_0 = 0 \quad (27)$$

其中，

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} \quad d_{Kj} = \sum_{i=1}^m G_i \int_{A_i} v_K v_j dA \quad (K=1,2,3; j=1,2,3)$$

显然， $d_{Kj} = d_{jK}$ ，即 D 为实对称矩阵。

$$D_0 = \begin{pmatrix} d_{10} \\ d_{20} \\ d_{30} \end{pmatrix} \quad d_{i0} = \int_S (\bar{p}_i v_i + \bar{p}_i \omega_i) ds \quad (i=1,2,\dots,m)$$

在筒体结构的底部 ($z=0$)，假定地基是刚性的，故该处的位移是给定的且为零，因此，其边界条件可表为：

$$g_j|_{z=0} = 0 \quad (j=1,2,3) \quad (28)$$

$$\theta_i|_{z=0} = 0 \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (29)$$

$$\psi_j|_{z=0} = 0 \quad (j=1,2,3) \quad (30)$$

在顶端，可采用由变分原理导出的边界条件：

$$\frac{\partial F}{\partial g_j'} \Big|_{z=H} = 0 \quad (j=1,2,3) \quad (31)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_i'} \Big|_{z=H} = 0 \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (32)$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \psi_j} \right|_{z=H} = 0 \quad (j=1,2,3) \tag{33}$$

将 F 的表达式代入式 (31), (32) 并整理可写成。

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ \theta \end{bmatrix} \Big|_{z=H} = R_0 \tag{34}$$

其中

$$R_0 = \begin{bmatrix} R_{10} \\ R_{20} \end{bmatrix} \quad \text{且} \quad R_{10} = \begin{bmatrix} r_{10}^1 \\ r_{20}^1 \\ r_{30}^1 \end{bmatrix} \quad r_{k0}^1 = \int_A \bar{p}_{iz} f_K dA \quad (k=1,2,3)$$

及

$$R_{20} = \begin{bmatrix} r_{10}^2 \\ r_{20}^2 \\ \vdots \\ r_{m0}^2 \end{bmatrix} \quad r_{j0}^2 = \int_A \bar{p}_{iz} \omega_j dA \quad (j=1,2,\dots,m)$$

式 (33) 则可写成

$$C^T Q \Big|_{z=H} + D \psi' \Big|_{z=H} = F_0 \tag{35}$$

其中

$$F_0 = \begin{bmatrix} f_{10} \\ f_{20} \\ f_{30} \end{bmatrix} \quad f_{k0} = \int_A (\bar{p}_{iz} v_K + \bar{p}_{zn} u_K) dA \quad (k=1,2,3)$$

将式 (27) 积分一次可得

$$\psi' = -D^{-1} C^T Q - D^{-1} \left(\int_0^z D_0 dz + C^* \right) \tag{36}$$

其中, C^* 为积分常数, 其阶为 3。

将上式代入式 (26) 可得:

$$A Q'' - (B - CD^{-1} C^T) Q + CD^{-1} (D_0^* + C^*) + A_0 = 0 \tag{37}$$

其中, $D_0^* = \int_0^z D_0 dz$

$$Q = [g_1, g_2, g_3, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m]^T$$

$$Q'' = [g_1'', g_2'', g_3'', \theta_1'', \theta_2'', \dots, \theta_m'']^T$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad A_0 = \begin{bmatrix} A_{01} \\ A_{02} \end{bmatrix}$$

式 (37) 是二阶线性微分方程组, 其边界条件由式 (28), (29), (30) 及式 (34), (35) 组成, 其中式 (28), (29) 又可写成

$$Q \Big|_{z=0} = 0 \tag{38}$$

而式 (30) 可写成

$$\psi \Big|_{z=0} = 0 \tag{39}$$

4 微分方程组的解

考察式 (37) 的齐次形式

$$AQ'' - (B - CD^{-1}C^T)Q = 0 \quad (40)$$

并命 $Q_i = r(\alpha \operatorname{sh}Kz + \beta \operatorname{ch}Kz)$ 代入上式有

$$[AK^2 - (B - CD^{-1}C^T)]r(\alpha \operatorname{sh}Kz + \beta \operatorname{ch}Kz) = 0$$

其中 r 是 $m+3$ 维列向量, α, β, K 均为常数, 由于 α, β 的任意性, 故 $\alpha \operatorname{sh}Kz + \beta \operatorname{ch}Kz \neq 0$, 从而有。

$$[AK^2 - (B - CD^{-1}C^T)]r = 0 \quad (41)$$

上式表明了, K^2 就是特征多项式

$$|AK^2 - (B - CD^{-1}C^T)| = 0$$

的特征值, 而 r 则为特征向量。

设特征多项式的根是 $K_1^2, K_2^2, K_3^2, \dots, K_{m+3}^2$, 由于 $A, (B - CD^{-1}C^T)$ 是实对称矩阵, 故 $K_i^2 (i=1, 2, \dots, m+3)$ 均为实数, 对应于这 $m+3$ 个特征值的特征向量为 $r_i (i=1, 2, \dots, m+3)$ 。

引进矩阵 $R = [r_1, r_2, \dots, r_{m+3}]$, 并考虑到 $K_i^2 \leq 0$ 的情况, 根据微分方程理论, 得出式 (37) 的齐次解为:

$$Q_i = R\phi_i \quad (42)$$

其中, $\phi_i = [a_1(z), a_2(z), \dots, a_{m+3}(z)]^T$, T 为转置, 且

$$\text{当 } K_i^2 > 0 \text{ 时, } a_i(z) = \alpha_i \operatorname{sh}K_i z + \beta_i \operatorname{ch}K_i z$$

$$\text{当 } K_i^2 = 0 \text{ 时, } a_i(z) = \alpha_i + \beta_i z$$

$$\text{当 } K_i^2 < 0 \text{ 时, } a_n(z) = \alpha_n \sin \bar{K}_n z + \beta_n \cos \bar{K}_n z$$

这里 $\bar{K}_n = \sqrt{-K_n^2}$, $(i, j, n=1, 2, \dots, m+3)$

利用参数变易法的基本思想, 可得式 (37) 的特解为:

$$Q_0 = R\phi_{p0} \quad (43)$$

式中, $\phi_{p0} = [b_1(z), b_2(z), \dots, b_{m+3}(z)]^T$

$$\text{当 } K_i^2 > 0 \text{ 时 } b_i(z) = e_i(z) \operatorname{sh}K_i z$$

$$\text{当 } K_i^2 = 0 \text{ 时 } b_j(z) = e_j(z)$$

$$\text{当 } K_i^2 < 0 \text{ 时 } b_n(z) = e_n(z) \sin \bar{K}_n z$$

$$\text{且 } e_i(z) = \int \left[\frac{1}{(\operatorname{sh}K_i z)^2} \int \lambda_i(z) \operatorname{sh}K_i z \right] dz$$

$$e_j(z) = \int \int \lambda_j(z) dz dz$$

$$e_n(z) = \int \left[\frac{1}{(\sin \bar{K}_n)^2} \int \lambda_n(z) \sin \bar{K}_n z dz \right] dz$$

其中, $[\lambda_1(z), \lambda_2(z), \dots, \lambda_{m+3}(z)]^T = \lambda(z)$

而 $\lambda(z) = -R^{-1}A^{-1}CD^{-1}(D_0^* + C^*) - R^{-1}A^{-1}A_0$

因此, 微分方程组 (37) 的通解可表为

$$Q = R(\phi_p + \phi_{p0}) \tag{44}$$

当 Q 的表达式已知后, 代入方程 (36) 再积分一次可得到

$$\psi = -D^{-1}C^T R \int_0^z (\phi_p + \phi_{p0}) dz - D^{-1} \int_0^z D_0^* dz + C^* z + D^* \tag{45}$$

其中积分常数 $C^*, D^*, \alpha_i, \beta_i (i=1, 2, \dots, m+3)$ 可由式 (34)、(35)、(38)、(39) 定出, (常数 C^*, D^* 均为三维列向量)

5 算 例

图 5 是一八边形截面棱柱形筒体结构, 在顶部作用一集中荷载, 主要数据如下*:
 $\mu = 0.3, b/c = 1, A_c = 0, t = \text{常数}, h/b = 2, 4, 10.$

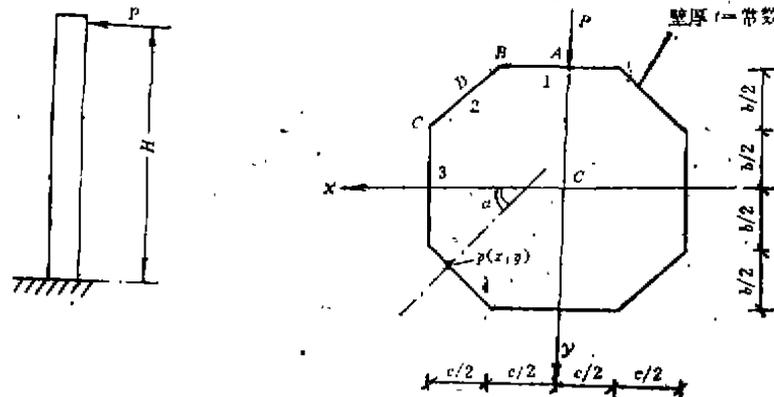


图 5 顶部荷载作用下正八边形筒体的计算

表 1 中列出了计算结果, 并列出了其它方法的计算结果, 以便加以比较。

表 1 为顶部荷载作用下八边形截面棱柱筒体结构的底部 ($z = 0$ 处) 的应力之比 σ_z/σ_b (σ_b 为梁理论计算值的最大值)

根据本文方法的分析, 参阅表 1, 笔者得到如下几点看法:

- 1) 本文方法能有效地反映筒体结构的剪力滞后效应。
- 2) 随着结构的高宽比 H/b 的增大, 本文方法的剪力滞后效应有所减弱, 这与有限元法、龙辛方法的结论是吻合的。
- 3) 与有限元法相比, 本文方法的剪力滞后效应偏大, 而龙辛方法的剪力滞后效应偏小。
- 4) 随着高宽比 H/b 的增大, 本文方法的精度有所提高, 且计算工作量不会增加, 对于高层建筑筒体结构的初步设计, 本文方法可作为参考。

表 1

应力位置	H/b	(1) 梁理论	(2) 龙辛法 ($n=2$)	(3) 龙辛法 ($n=5$)	(4) 有限元法	(5) 本文方法	与有限元法 相比本文方 法的误差
翼板 1 的中点 A	2	1	0.741	0.793	0.772	0.6884	-10.8%
	4	1	0.879	0.897	0.882	0.8368	-4.9%
	10	1	0.943	0.959	0.957	0.9415	-1.6%
角点 B	2	1	1.125	1.317	1.387	1.3461	-2.9%
	4	1	1.053	1.159	1.149	1.1711	+1.9%
	10	1	1.025	1.063	1.029	1.0785	+4.8%
角点 C	2	0.5	0.439	0.651	0.664	0.6730	+1.4%
	4	0.5	0.495	0.575	0.563	0.5856	+4%
	10	0.5	0.498	0.530	0.513	0.5393	+5%
翼板 2 的中点 D	2	0.75				0.6097	
	4	0.75				0.6751	
	10	0.75				0.7256	

注：龙辛法指文献(3)，有限元法取自文献(4)

参 考 文 献

- 1 Coull A Bose, B, Simplified Analysis of Framed-Tube structures, J. of structural Div ASCE Vol. 101, No. ST11 (1975).
- 2 Coull A, Bose B, Torsion of Framed-Tube structures, J. of structural Div, ASCE, Vol. 102, No. ST12(1976).
- 3 龙驭球. 多边形框筒结构的能量解法. 土木工程学报. 1985
- 4 辛克贵, 龙驭球. 采用修正的高次平面应力单元分析多边形截面框筒结构. 第八届全国高层建筑结构学术交流会论文集. 1984
- 5 Luigo Dezi and Lando Mentrasti, Nonuniform Bending stress Distribution (Shear lag), J. of Structural Engng. Vol 111, No.12(1985).
- 6 周坚, 包世华. 筒中筒结构的简化分析. 土木工程报. 1986, 3
- 7 黄剑源, 薄壁结构的扭转分析(上). 中国铁道出版社, 1983

(编辑: 徐维森)

VARIATIONAL METHOD TO TUBE STRUCTURES OF COMPLICATED SHAPE

Li Zhengliang Shui Guohui Feng Yiran

(Department of Civil Engineering)

ABSTRACT In this paper the polygonal framed-tube structure and core tube are considered as cantilever box beam, consisting of orthotropic plates with different moduls of elasticity. According to the space thin-walled structure theory, the unified dis-placement field of the tube structures is given by taking "shear lag effect" into account. Then, the system of differential equations which has general significance is established by the variational energy method. And, the analytical solution is derived by theory of differential equation. In addition, an example of calculation is given.

KEY WORDS tube structure, thin-walled theory, variational method, shear lag effect