重庆建筑工程学院学报
第13卷第4期 JOURNAL OF CHONGQING INSTITUTE OF Vol.13 No.4
1991年 12月 ARCHITECTURE AND ENGINEERING Dec. 1991

完全图Kp (p≥5) 不是算术图

张 建 高

(建管系)

摘 要 一个 (p,q) –图G被称为 (k,d) –算术图，如果可以给它的顶点分配不同的非负整数，使得由分配给每条边的端点的数之和所得到的边的值能够排成一个算术级数$k,k+d,k+2d,\cdots,k+(q-1)d$. 在本文中，我们证明了完全图$Kp(p\geqslant 5)$ 不是算术图。从而证实了B.D.Acharya和S.M.Hegde在[1]中提出的一个猜想是对的。

关键词 算术图，顶点函数，边函数

在本文中，所有的图都是简单图，没有定义的术语和记号都可以在[2]中找到。下面的若干术语和记号都来自[1]。

已给一个图$G=(V,E)$，非负整数集N，N的子集A和一个交换二元算子$*$: $N\times N\to N$，每个顶点函数 f: $V(G)\to A$ 导出一个边函数 f^*: $E(G)\to N$ 使得 $f^*(uv)=*(f(u),f(v))=f(u)*f(v)$，$\forall uv\in E(G)$. 通常，感兴趣的是决定顶点函数 f: $V(G)\to A$ 有一个特殊的性质P使得导出的边函数 f^*: $E(G)\to N$有一个特殊性质Q，而P和Q不一定不相同。如果顶点函数f: $V(G)\to A$导出的边函数 f^*: $E(G)\to N$ 被定义为 $f^*(uv)=f(u)+f(v)$，$\forall uv\in E(G)$，则称 f 是可加的，今后，将 f 的这个特殊导出映射表示为 f^+。

促进可加顶点函数的研究的主要因素，来自于被称为成果分配的分配问题解中的合作形式的研究，它是这样一种社会现象：在两个独立的实体之间，基于对共同利益的问题的某些不同看法，靠分配他们的部分成果而获得彼此的相互帮助。

图$G=(V,E)$ 的一个可加数值映射是一个内可加顶点函数 f 使得导出的边函数 f^+ 也是内映射。我们将使用下面的记号：

$A(G)=G$的所有可加数值映射之集

$$f(G)=\{f(v)\mid v\in V(G)\}$$
$$f^*(G)=\{f^*(e)\mid e\in E(G)\}$$

$|S|=$有限集S的基数

对任何有限实数集 S，记

本文1991年4月26日收到。

$$S_{\min}=\min_{x\in S}x$$

$$f^+_{\min}(G)=\min_{e\in E(G)}f^+(e)$$

$$S_{\max}=\max_{x\in S}x$$

完全图Kp的算术性质

已给一个 (p,q) -图G和 $f\in A(G)$，我们说 f 是 (k,d) -算术的，如果 $f^+(G)=\{k,k+d,k+2d,\cdots,k+(q-1)d\}$，其中 k 和 d 是给定的正整数。用 $A_{k,d}(G)$ 表示 G 的所有 (k,d)-算术可加数值映射之集。称图G是 (k,d)-算术的，如果 $A_{k,d}(G)\neq\phi$. 我们说G是算术图，如果存在 k 和 d，使得G是 (k,d)-算术的。

B.D.Acharya 和 S.M.Hegde[1]给出了完全图 K_3 和 K_4 的所有 (k,d)-算术数值映射，并猜想 $p\geqslant 5$ 时，K_p不是算术图。在这一节中，我们将证明他们的猜想是对的。

下面，我们给出有限个实数的两两之和的一般性结果。

定理1　设$S=\{S_1,S_2,\cdots,S_p\}$ 是 p 个实数之集，令 $S^+=\{S_{i,j}=S_i+S_j\mid S_i,S_j\in S,i\neq j\}$. 如果$S^+=\{\alpha,\alpha+\beta,\alpha+2\beta,\cdots,\alpha+\left[\binom{p}{2}-1\right]\beta\}$，其中$\beta>0$，则$p<5$）

证明　用反证法导出矛盾。假设对某个 $p(p\geqslant 5)$，存在实数集 $S=\{S_1,S_2,\cdots,S_p\}$，不失一般性，设

$$S_1<S_2<\cdots<S_p \tag{1}$$

使得对 $\beta>0$ 及 α 有

$$S^+=\{\alpha,\alpha+\beta,\alpha+2\beta,\cdots,\alpha+\left[\binom{p}{2}-1\right]\beta\} \tag{2}$$

我们来引出矛盾。

由 (2)，$|S^+|=\binom{p}{2}$，故任何$\{i,j\}\neq\{i',j'\}$，均有

$$S_{i,j}\neq S_{i',j'} \tag{3}$$

另外，由定义，$S_{i,j}=S_{j,i}$

记$S^0=S^+$，定义集合序列：

$$S^{i+1}=S^i\backslash\{S^i_{\min}\},\ i=0,1,2\cdots$$

显然，$S^0,S^1,S^2,\cdots,S^i,\cdots$有性质：

$P1$　$S^i=\phi,\ i\geqslant\binom{p}{2}$

$P2$　$S^i_{\min}=\alpha+i\beta,\ 0\leqslant i<\binom{p}{2}$

$P3$　$S^i=\{\alpha+i\beta,\alpha+(i+1)\beta,\cdots,\alpha+\left[\binom{p}{2}-1\right]\beta\},\ 0\leqslant i<\binom{p}{2}$

因为 $i\neq j$，由(1)，有

$$S_{i,j}=S_i+S_j\geqslant S_1+S_2=S_{1,2}$$

所以

$$S_{min}^{0}=S_{1,2}=S_1+S_2=\alpha$$

设 i,j,l,k 是正整数，若 $|\{i,j,l,k\}|=4$，则对 $S_{i,j}$ 有

$$S_{i,j}=S_{i,l}+S_{k,j}-S_{k,l} \tag{4}$$

事实上，只要 $i\neq j,i\neq l,k\neq j,k\neq l$ 即可。

由定义，有

$$S^1=S^0\backslash\{S_{1,2}\}=\{S_{i,j}|i\neq j,i+j>3\}$$

因为 $\forall S_{i,j}\in S^1$，$i+j\geqslant 4$，且 $i\neq j$，必有 $i\geqslant 3$ 或者 $j\geqslant 3$，因此，$S_{i,j}=S_i+S_j\geqslant S_1+S_3=S_{1,3}$。所以

$$S_{min}^{1}=S_{1,3}=S_1+S_3=\alpha+\beta$$

从而

$$\left.\begin{aligned}S_{1,2}&=S_{min}^{0}=\alpha\\ S_{1,3}&=S_{min}^{1}=\alpha+\beta\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

现在 $S^2=S^0\backslash\{S_{1,2},\ S_{1,3}\}$，所以 $\forall S_{i,j}\in S^2$ 均有 $i+j\geqslant 5$，若 $\min(i,j)\geqslant 2$，则 $S_{i,j}\geqslant S_{2,3}$，如果 $\min(i,j)=1$，则 $\max(i,j)\geqslant 4$，有 $S_{i,j}\geqslant S_{1,4}$，因为由 (1)，$i\geqslant i',j\geqslant j'$ 时，$S_{i,j}=S_i+S_j\geqslant S_{i'}+S_{j'}=S_{i',j'}$。所以

$$S_{min}^{2}=\alpha+2\beta\in\{S_{1,4},\ S_{2,3}\}$$

情形 1　$S_{min}^{2}=S_{1,4}=\alpha+2\beta$

设 $S_{2,3}=\alpha+r\beta$，由 $S_{2,3}\in S^3$，$r\geqslant 3$。

(1a) $r=3$，即 $S_{2,3}=\alpha+3\beta=S_{min}^{3}$，则

$$S_{2,4}=S_{2,3}+S_{1,4}-S_{1,3}=\alpha+4\beta=S_{min}^{4}$$

$$S_{3,4}=S_{2,3}+S_{1,4}-S_{1,2}=\alpha+5\beta=S_{min}^{5}$$

从而我们有

$$\left.\begin{aligned}S_{1,4}&=S_{min}^{2}=\alpha+2\beta\\ S_{2,3}&=S_{min}^{3}=\alpha+3\beta\\ S_{2,4}&=S_{min}^{4}=\alpha+4\beta\\ S_{3,4}&=S_{min}^{5}=\alpha+5\beta\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

由 (5) 和 (6) 知，$\forall i,j<5$，$S_{i,j}\notin S^6$，即是说，$\forall S_{i,j}\in S^6$，必有 $\max(i,j)\geqslant 5$，从而 $S_{i,j}\geqslant S_{1,5}$。所以

$$S_{min}^{6}=S_{1,5}=\alpha+6\beta$$

于是得到

$$S_{2,5}=S_{2,3}+S_{1,5}-S_{1,3}=\alpha+8\beta$$
$$S_{3,5}=S_{3,2}+S_{1,5}-S_{1,2}=\alpha+9\beta$$
$$S_{4,5}=S_{4,2}+S_{1,5}-S_{1,2}=\alpha+10\beta$$

若 $p=5$，那么由

$$\alpha+10\beta=S_{4,5}\leqslant S_{\max}^{*}=\alpha+\left[\binom{5}{2}-1\right]\beta$$
$$=\alpha+9\beta$$

得到 $\beta\leqslant 0$ 与 $\beta>0$ 矛盾。故 $p>5$。

现在 $S_{2,5}=\alpha+8\beta=S_{\min}^{3}>S_{\min}^{7}$，设 $S_{i,j}=S_{\min}^{7}$，则显然 $\max(i,j)\geqslant 5$，因为 $S^{7}\subset S^{6}$。又因为 $i<5$ 时，$S_{i,5}\neq S_{\min}^{7}$，所以 $\max(i,j)\geqslant 6$，从而 $S_{i,j}\geqslant S_{1,6}$，由 $S_{1,6}\in S^{7}$，故得

$$S_{\min}^{7}=S_{1,6}=\alpha+7\beta$$

由此得到

$$S_{2,6}=S_{2,3}+S_{1,6}-S_{1,3}$$
$$=(\alpha+3\beta)+(\alpha+7\beta)-(\alpha+\beta)$$
$$=\alpha+9\beta=S_{3,5}$$

于是 $|S^{+}|\leqslant\binom{p}{2}-1<\binom{p}{2}$ 与（2）矛盾。

（1b）　$r=4$，即 $S_{2,3}=\alpha+4\beta=S_{\min}^{4}$

设 $S_{\min}^{3}=S_{i,j}=S_i+S_j=\alpha+3\beta$，由 $S_{1,2}<S_{1,3}<S_{\min}^{3}<S_{2,3}$，故 $\max(i,j)\geqslant 4$，故 $S_{i,j}\geqslant S_{1,4}$。但是 $S_{1,4}=S_{\min}^{2}<S_{\min}^{3}$，以及

$$S_{2,4}=S_{2,3}+S_{1,4}-S_{1,3}=\alpha+5\beta>S_{\min}^{3}$$

$$S_{3,4}=S_{3,2}+S_{1,4}-S_{1,2}=\alpha+6\beta>S_{\min}^{3}$$

所以 $\max(i,j)\geqslant 5$，即 $S_{i,j}\geqslant S_{1,5}$，由于 $S_{1,5}\in S^{3}$，因而，应有

$$S_{\min}^{3}=S_{1,5}=\alpha+3\beta$$

于是由（4）得到

$$S_{2,5}=S_{2,3}+S_{1,5}-S_{1,3}$$
$$=(\alpha+4\beta)+(\alpha+3\beta)-(\alpha+\beta)$$
$$=\alpha+6\beta=S_{3,4}$$

从而 $|S^{+}|<\binom{p}{2}$ 与（2）和（3）矛盾。

（1c）　$r\geqslant 5$，即 $S_{2,3}\geqslant\alpha+5\beta$。

现在 $S_{1,2}<S_{1,3}<S_{1,4}<S_{\min}^{3}<S_{2,3}$。由于

$$S_{2,4}=S_{2,3}+S_{1,4}-S_{1,3}=S_{2,3}+\beta,$$

$$S_{3,4}=S_{3,2}+S_{1,4}-S_{1,2}=S_{2,3}+2\beta$$

设$S_{i,j}=S^3_{\min}=\alpha+3\beta$，则有$\max(i,j)\geqslant 5$，故$S_{i,j}\geqslant S_{1,5}$，由$S_{1,5}\in S^3$，因此

$$S^3_{\min}=S_{1,5}=\alpha+3\beta$$

从而得到

$$\begin{aligned}S_{2,5}&=S_{2,3}+S_{1,5}-S_{1,3}\\&=S_{2,3}+(\alpha+3\beta)-(\alpha+\beta)\\&=S_{2,3}+2\beta=S_{3,4}\end{aligned}$$

这与（3）矛盾。

情形 2 $S^2_{\min}=S_{2,3}=\alpha+2\beta$。

由（5），$S_{1,2}<S_{1,3}<S_{2,3}<S^3_{\min}$故$\forall i\neq j$，$\max(i,j)\geqslant 4$，则$S_{i,j}\in S^3$，所以

$$S_{1,4}=S^3_{\min}=\alpha+3\beta$$

因此

$$S_{2,4}=S_{2,3}+S_{1,4}-S_{1,3}=\alpha+4\beta=S^4_{\min}$$

$$S_{3,4}=S_{3,2}+S_{1,4}-S_{1,2}=\alpha+5\beta=S^5_{\min}$$

故$\max(i,j)\leqslant 4$时，$S_{i,j}\overline{\in}S^6$。由$S_{1,5}\in S^6$，必有

$$S^6_{\min}=S_{1,5}=\alpha+6\beta$$

如果 $p=5$，那么

$$S_{4,5}=S_{4,2}+S_{1,5}-S_{1,2}=\alpha+10\beta\overline{\in}S^+$$

导致矛盾。所以 $p>5$。

现在

$$S_{2,5}=S_{2,3}+S_{1,5}-S_{1,3}=\alpha+7\beta=S^7_{\min}$$

$$S_{3,5}=S_{2,3}+S_{1,5}-S_{1,2}=\alpha+8\beta=S^8_{\min}$$

$$S_{4,5}=\alpha+10\beta=S^{10}_{\min}$$

于是设 $S_{i,j}=S^9_{\min}=\alpha+9\beta$，那么，$\max(i,j)\geqslant 6$，而$S_{1,6}\in S^9$，故 $S_{i,j}=S_{1,6}$ $=S^9_{\min}=\alpha+9\beta$。从而

$$S_{2,6}=S_{2,3}+S_{1,6}-S_{1,3}=\alpha+10\beta=S_{4,5}$$

与（3）矛盾。

综上所述，所有的情形都导致矛盾，这说明我们的假设是错的，因此定理是对的。

完成证明。

由定理1，立即可得

定理 2 完全图$K_p(p\geqslant 5)$不是算术图。

证明 设对p，K_p是算术图，则存在正整数k和d使得K_p是(k,d)-算术的，即

$A_{k,d}(K_p)\neq\phi$。设 $f\in A_{k,d}(K_p)$，则 $S=f(K_p)$ 是 p 个不同非负整数之集，且 $S^+=f^+(K_p)$ $=\{k,k+d,\cdots,k+\left[\binom{p}{2}-1\right]d\}$，其中 $d>0$。按照定理 1，应有 $p<5$。

定理得证。

K_1 和 K_2 是平凡的，B.D.Acharya和S.M.Hegde[1]给出了 K_3 和 K_4 的所有 (k,d)-算术值映射，而定理 2 断言所有的 $K_p(p\geqslant 5)$ 不是算术图，从而完全刻划了完全图 K_p 的算术性质。

参 考 文 献

1 B.D.Acharya and S.M.Hegde, Arithmetic Graphs. J.Graph Theory 14(1990) 275～299

2 F.Harary, Graph Theory. Addison Wesley, Reading, MA(1969)

3 D.W.Bange, A.E.Barkauskas, and P.J.Slater, Sequentially additive graphs. Discrete Math. 44(1983) 235～241

4 P.J.Slater, On k-sequential and other numbered graphs. Discrete Math. 34(1981) 185～193

THE COMPLETE GRAPHS Kp(p≥5) ARE NOT ARITHMETIC

Zhang Jiangao

(Dept. of Construction Management)

ABSTRACT A(p,q)-graph G is said to be (k,d)-arithmetic. If its vertices can be assigned distinct nonnegative integers,then the values of the edges,obtained as the sums of the numbers assigned to their ends vertices, can be arranged in the arithmetic progression $k,k+d,k+2d,\cdots,k+(q-1)d$. In this paper, if $S=\{s_1,\cdots,s_p,s_i$ is real number,$i=1,\cdots,p$, and $s_i\neq s_j\ (i\neq j)$, $S^+=\{s_{ij}=s_i+s_j|s_i,\ s_j\in s,\ i\neq j\}$, then $S^+=\{a,a+B,a+2B,,\cdots,a+[p(p-1)/2-1]B\}$ where $B>0$, implies that $p<5$, the result is obtained. From the result, it can be known that the complete graph $Kp(p\geqslant 5)$ is not arithmetic. This verifies that one of the conjectures proposed by B.D.Acharya and S.M.Hegde is true.

KEY WORDS arithmetic graph, vertex functions, egde functions