重庆建筑工程学院学报
第14卷第3期 JOURNAL OF CHONGQING INSTITUTE OF Vol.14 No.3
1992年 9月 ARCHITECTURE AND ENGINEERING Sept. 1992

46—50

集值映射的次梯度

李声杰
(基础科学系)

O189.11

摘 要 本文提出了一种新的集值映射的次梯度。讨论了它的闭性和非空凸性，在适当条件下证明了：

$$\inf\{CF(x_0、y_0)(v)\}=sup\{\zeta(v)|\zeta\in\widehat{\partial_p}F(x_0,\ y_0)\}$$

$$\partial F(x_0,\ y_0)(v)=[-CF(x_0,\ y_0)(-v),\ CF(x_0,\ y_0)(v)]$$

关键词 集值映射，次梯度，序线性拓扑空间，伴随导数

1 基本概念和基本定义

设X是赋范空间，Y是序线性拓扑空间。

定义1 设F：$X\to Y$是集值映射，$(x_0,\ y_1)\in GrF$，$v\in X$，对于$W\in Y$，若对任意$v_n\to v$，$h_n\to 0^+$，都存在$w_n\to w$和$N_0>0$，使得当$n\geqslant N_0$时，有

$$y_0+h_nw_n\in F(x_0+h_nv_n)$$

则称W为F在点$(x_0,\ y_0)$相对v的伴随值。

F在点$(x_0,\ y_0)$相对v的伴随值全体记成$CF(x_0,\ y_0)(v)$，若对任意$v\in X$，$CF(x_0,\ y_0)(v)\neq\phi$，则称F在点$(x_0,\ y_0)$伴随可微。

若F在点$(x_0,\ y_0)$伴随可微，则集值映射

$$CF(x_0,\ y_0):v\to CF(x_0,\ y_0)(v)\quad(v\in X)$$

叫做F在点$(x_0,\ y_0)$的伴随导数。

定义2 设$F:X\to Y$是集值映射，$(x_0,\ y_0)\in GrF$，且F在$(x_0,\ y_0)$是伴随可微的，则F在点$(x_0,\ y_0)$的次梯度定义为：

$$\partial F(x_0,\ y_0)=\{A\in L(X,\ Y)|A(v)\leqslant CF(x_0,\ y_0)(v),\ v\in X\}$$

其中$L(X,\ Y)$表示从X到Y的线性映射全体。

定义3 如果$Gr(\partial F)$是$X\times Y\times L(X、Y)$中的闭集，则称次梯度映射$\partial F(\cdot,\cdot)$是闭的。

定义4 集A称为序下闭的，如果A中任意序下有界集B，有$\inf B\in A$。

本文1991年6月17日收到。

2 集值映射的闭凸性

定理1 设F是凸集值映射[1]，$0\in CF(x_0,y_0)(0)$ $0\leqslant CF(x_0,y_0)(0)$，则$\partial F(x_0,y_0)$是非空凸的。

证明： 首先证$CF(x_0,y_0)$是凸映射

对于任意v_1^0，$v_2^0\in X$，$W_i\in CF(x_0,y_0)(v_i^0)(i=1,2)$ $0<\lambda<1$，任取$v_n\to\lambda v_1^0+(1-\lambda)v_2^0$，$h_n\to 0^+$ 令

$$v_n^2=\frac{v_n-\lambda v_1^0}{1-\lambda}\qquad v_n^1=v_1^0$$

显然 $$v_n^2\to v_2^0,\ v_n^1\to v_1^0$$

由定义有 $w_n^1\to w_1^0$，$w_n^2\to w_2^0$，使得当$n\geqslant n_0$时，有

$$y_0+h_nw_n^1\in E(x_0+h_nv_n^1)$$

$$y_0+h_nw_n^2\in F(x_0+h_nv_n^2)$$

所以 $$y_0+\lambda h_nw_n^1+(1-\lambda)h_nw_n^2\in\lambda F(x_0+h_nv_n^1)+(1-\lambda)F(x_0+h_nv_n^2)$$

$$\subset F(x_0+h_n(\lambda v_n^1+(1-\lambda)v_n^2)$$

$$=F(x_0+h_nv_n)$$

因此 $$\lambda w_1^0+(1-\lambda)w_2^0\in CF(x_0、y_0)(\lambda v_1^0+(1-\lambda)v_2^0)$$

由w_1^0，w_2^0的任意性，所以$CF(x_0、y_0)$是凸映射。

又由〔2〕推论 1，则存在$A\in L(X,Y)$，满足

$$A(v)\leqslant CF(x_0,y_0)(v)\qquad\forall v\in X$$

因此 $$\partial F(x_0,y_0)\neq\phi$$

任取A_1，$A_2\in\partial F(x_0,y_0)$和任意$y\in CF(x_0,y_0)(v)$

由定义有

$$A_1(v)\leqslant y,\ A_2(v)\leqslant y$$

从而 $$(\lambda A_1+(1-\lambda)A_2)(v)\leqslant\lambda y+(1-\lambda)y=y$$

因此 $$(\lambda A_1+(1-\lambda)A_2)(v)\leqslant CF(x_0,y_0)(v)$$

故$\partial F(x_0、y_0)$是凸的。

定理2 设Y是序完备第一可数局部凸拓扑空间，产生序的锥P是闭的，以及$CF(x,y)(v)$对任意$v\in X$，关于(x,y)下半连续[3]，$F(x)$是上半连续[3]，则$\partial F(\cdot,\cdot)$是闭的。

证明： 由$Gr(\partial F)=\{(x,y,A)\in GrF\times L(X,Y)|A(v)\leqslant CF(x,y)(v),\forall v\in X\}$

而 $$A(v)\leqslant CF(x,y)(v)\Longleftrightarrow 0\leqslant CF(x,y)(v)-A(v)$$

由[4]定理3，4，2得

$$0\leqslant CF(x,y)(v)-A(v)\Longleftrightarrow\langle CF(x,y)(v)-A(v),f\rangle\geqslant 0\qquad\forall f\in P^*,\ v\in X$$

因此 $Gr(\partial F)=\{(x,y,A)\in GrF\times L(X、Y)|\langle CF(x,y)(v)-A(v),f\rangle\geqslant 0,\forall f\in P^*,v\in X\}$

任取$(x_n,y_n,A_n)\in Gr(\partial F)\longrightarrow(x^0,y_0,A_0)$

对$(A_n(d), f)$，自然收敛于$(A_0(d), f)$
而$F(x)$是上半连续的，所以$y_0\in F(x_0)$即$(x_0, y_0)\in GrF$
又由$CF(x, y)(v)$关于(x, y)是下半连续的，
于是，对于$Z_0\in CF(x_0, y_0)(v)$，$x_n\to x_0$，$y_n\to y_0$，存在$Z_n\in CF(x_n, y_n)(v)$，使得$Z_n\to Z_0$

所以
$$<Z_0-A_0(v), f>=<\lim_{n\to\infty}(Z_n-A_n(v)), f>$$
$$=\lim_{n\to\infty}<Z_n-A_n(v), f>\geqslant 0$$

因此，对任意$f\in P^*$，$v\in X$，有
$$<Z_0-A_0(v), f>\geqslant 0$$
故
$$<CF(x_0, y_0)(v)-A(v), f>\geqslant 0,\ \forall f\in P^*,\ v\in X$$
所以$\partial F(x, y)$是闭的。

3 伴随导数与次梯度的关系

定理3 设Y是序完备拓扑向量空间，$CF(x_0, y_0)(v)$是序凸的[2]，产生序的锥P是闭的，且$CF(x_0, y_0)(v)$相对序有下界和序下闭[6]记

$\widehat{\partial_P}F(x_0, y_0)=\{A+\rho\,|\,A\in\partial F(x_0, y_0),\ \rho\in P$和$A(v)+\rho\leqslant CF(x_0, y_0)(v)$，$\forall v\in X\}$

则 $\inf\{CF(x_0, y_0)(v)\}=\sup\{\xi(v)\,|\,\xi\in\widehat{\partial_P}F(x_0, y_0)\}$

证明：由$CF(x_0, y_0)(v_0)$是序下闭和序下界，所以$\inf\{CF(x_0, y_0)(v_0)\}$有意义，记作$w_0$，并且$w_0\in CF(x_0, y_0)(v_0)$

令
$$G(v)=\begin{cases}CF(x_0, y_0)(v) & v\neq v_0\\ w_0 & v=v_0\end{cases}$$

下面证$G(v)$是序凸集值映射。
事实上，对任意$v_1, v_2\in X$，$0\leqslant\lambda\leqslant 1$
①若$v_1=v_0$则
$$\lambda G(v_1)+(1-\lambda)G(v_2)=\lambda w_0+(1-\lambda)G(v_2)$$
$$\subset G(\lambda v_1+(1-\lambda)v_2)+P$$
②若$\lambda v_1+(1-\lambda)v_2=v_0$则
$$\lambda G(v_1)+(1-\lambda)G(v_2)\subset CF(x_0, y_0)(\lambda v_1+(1-\lambda)v_2)+P$$
$$\subset w_0+P=G(\lambda v_1+(1-\lambda)v_2)+P$$
对于其它情况同理可证，所以$G(v)$是序凸的。由[2]推论2，存在仿射映射$T'(v)\leqslant G(v)$
因此对任意$v\in X$，$CF(x_0, y_0)(v)$相对序有下界。
即 $\inf\{CF(x_0, y_0)(v)\}$在X上有意义。
下面证明$\inf\{CF(x_0, y_0)(v)\}$是序凸的。
事实上，由$\inf\{CF(x_0, y_0)(v)\}$的定义3得，对任意$\inf\{CF(x_0, y_0)(v)\}$的邻域$\inf\{CF(x_0, y_0)(v)\}+B$($B$是原点的邻域）有$W_B^v\in CF(x_0, y_0)(v)$，满足

$$W_B^V \in \inf CF(x_0, y_0)(v)+B$$

对原点的邻域族$N(0)$定义一种关系，使成为有向集，即

$$B_2 \geqslant B_1 \Longleftrightarrow B_2 \subset B_1$$

自然$\{W_B^V\}$是收敛于$\inf\{CF(x_0, y_0)\}$的网。

而对任意v_1，$v_2 \in X$，也有$\{W_B^{V1}\} \subset CF(x_0, y_0)(v_1)\{W_B^{V2}\} \subset CF(x_0, y_0)(v_2)$

所以有 $\lambda W_B^{V1}+(1-\lambda)W_B^{V2} \in CF(x_0, y_0)(\lambda v_1+(1-\lambda)v_2)+P$

$$\subset \inf\{CF(x_0, y_0)(\lambda v_1+(1-\lambda v_2)\}+P$$

因此存在$\rho_B \in P$，使得

$$\lambda W_B^{V1}+(1-\lambda)W_B^{V2}=\inf\{CF(x_0, y_0)(\lambda v_1+(1-\lambda)v_2)\}+\rho_B$$

由锥P的闭性和$\{W_B^{V1}\}$，$\{W_B^{V2}\}$的收敛性，得

$$\lambda\inf\{CF(x_0, y_0)(v_1)\}+(1-\lambda)\inf\{CF(x_0, y_0)(v_2)\}$$
$$\subset \inf\{CF(x_0, y_0)(\lambda v_1+(1-\lambda)v_2)\}+P$$

因此映射$\inf\{CF(x_0, y_0)(v)\}$是序凸的。

对任意$v_0 \in X$，由〔2〕推论 2，有仿射映射T'，满足

$$T'(v_0)=\inf\{CF(x_0, y_0)(v_0)\}$$
$$T'(v) \leqslant \inf\{CF(x_0, y_0)(v)\}$$

由〔2〕推论 2 的证明过程还可看出

$$T'(v)=T(v)+\inf\{CF(x_0, y_0)(v_0)\}-T(v_0)$$

而 $\qquad T(v) \leqslant \inf\{CF(x_0, y_0)(v+v_0)\}-\inf\{CF(x_0, y_0)(v_0)\}$

于是 $\qquad T(v_0) \leqslant \inf\{CF(x_0, y_0)(2v_0)\}-\inf\{CF(x_0, y_0)(v_0)\}$

$$=\inf\{CF(x_0, y_0)(v_0)\}$$

所以 $\qquad T'(v)=T(v)+\rho_0 \quad \rho_0 \in P$

因此 $\qquad T'(v) \in \widehat{\partial_P} F(x_0, y_0)$

从而 $\qquad \inf\{CF(x_0, y_0)(v)\}=\sup\{\zeta(v) \mid \zeta \in \widehat{\partial_P} F(x_0, y_0)\}$

定理4 设$F(x)=\bigcup\limits_{i\in I} F_i(x)$，$I(x_0, y_0)=\{i \in I \mid y_0 \in F_i(x_0)\}$，$G(x)=\bigcap\limits_{i\in I}$

且$F(x) \neq \phi$，则有

(1) $\partial F(x_0, y_0) \subset \bigcup\limits_{i\in I(x_0, y_0)} \partial F_i(x_0, y_0)$

(2) $\bigcup\limits_{i\in I} \partial G_i(x_0, y_0) \subset \partial G(x_0, y_0)$

证明： 由$\bigcup\limits_{i\ni I(x_0, y_0)} CF_i(x_0, y_0)(v) \subset CF(x_0, y_0)(v)$和

$$CF(x_0, y_0)(v) \subset \bigcap_{i\in I} CF_i(x_0, y_0)(v)$$

定理显然成立。

定理5 设$CF(x_0, y_0)(v)$是序凸的，$0 \in CF(x_0, y_0)(0)$

则 $\qquad \partial F(x_0, y_0)(v)=〔-CF(x_0, y_0)(-v), CF(x_0, y_0)(v)〕$

其中$\partial F(x_0, y_0)(v)=\{A(v) \mid A \in \partial F(x_0, y_0)\}$

证明： 设$A(v) \in \partial F(x_0, y_0)(v)$

由于$A \in \partial F(x_0, y_0)$，所以

$$A(v')\leqslant CF(x_0,\ y_0)(v')\quad \forall v'\in X$$

显然 $$A(-v)\leqslant CF(x_0,\ y_0)(-v)$$

于是 $$-CF(x_0,\ y_0)(-v)\leqslant -A(-v)=A(v)\leqslant CF(x_0,\ y_0)(v)$$

因此 $$\partial F(x_0,\ y_0)\subset[-CF(x_0,\ y_0)(-v),\ CF(x_0,\ y_0)(v)]$$

反过来，设$b\in[-CF(x_0,\ y_0)(-v),\ CF(x_0,\ y_0)(v)]$

令 $$A(tv)=tb$$

对任意$t\geqslant 0$ $$A(tv)=tb\leqslant tCF(x_0,\ y_0)(v)=CF(x_0,\ y_0)(tv)$$

对任意$t<0$ $$A(tv)=tb=(-t)(-b)\leqslant(-t)CF(x_0,\ y_0)(-v)=CF(x_0,\ y_0)(tv)$$

所以 $$A(tv)\leqslant CF(x_0,\ y_0)(tv)\qquad \forall t\in R$$

于是$A(x)$是非平凡子空间$X_0=\{tv\}$上的线性算子，由[2]定理1，存在线性算子T，满足

$$T(x)=A(x)\quad x\in Rv$$

$$T(x)\leqslant CF(x_0,\ y_0)(x)\quad \forall x\in X$$

因此 $T\in\partial F(x_0,\ y_0)$ 且$T(v)=b$

于是 $[-CF(x_0,\ y_0)(-v),\ CF(x_0,\ y_0)(v)]\subset\partial F(x_0,\ y_0)(v)$。

故定理得证

参 考 文 献

1 J. M Borwein. Convex velations and Optimization. 1979

2 Chen Guang-Yu, Wang Yu-Yun. Generalized Hahn Banach Theorems and Subdifferential of Set-valued Mapping. J. Sys. Sci.and Math. Scis. V.5 N.3, 1985,pp. 223—230

3 B. Bank, J. Guddot, D. Klatte, B. Kummer and K. Tammer. Non-Linear Parametric Optimization. Birhäuser Verlag Basel Boston stuttgart, 1983

4 李泽民. 无穷维最优化讲义. 1986

5 Graham. Jameson. Order Linear Spaces. Lecture Notes in Mathematics,1970

6 Jean Pierre Aubin. Applied Nonlineerr Analysis. Wiley-Interscience, 1985

（编辑：刘家凯）

SUBGRADIENT OF SET-VALUED MAPPING

Li Shengjie

(Dept. of Natural Science)

ABSTRACT This paper presents a new subgradient of set-valued mapping and discusses its close properties and its no empty convex properties. Under proper conditions, it proves to be true.

KEY WORDS set-valued mapping, subgratient, order linear topological vector spaces, contingent derivatives