⑦

重庆建筑工程学院学报
第15卷第1期 JOURNAL OF CHONGQING INSTITUTE OF Vol.15 No.1
1993年 3月 ARCHITECTURE AND ENGINEERING March 1993

43-47

二阶Richardson迭代法的参数选择及其优化

陈祥明

(基础科学系)

O 151.2

摘 要 本文给出了对称正定线性代数方程组的二阶Richardson迭代法中参数选择的界限，以及参数的优化，使该迭代法收敛更快。

关键词 对称正定矩阵，Richardson迭代法，谱半径

1 基本方法

考虑线性代数方程组

$$Ax=b \tag{1}$$

其中系数矩阵A对称正定，将矩阵A分裂为

$$A=M-N$$

这里矩阵M亦对称正定。且线性代数方程组

$$My=c \tag{2}$$

易于求解。下述算法称为二阶Richardson迭代法[1]。

适当选择参数$\alpha>0$，$\omega>0$，且任意给定初始向量x_0，x_1。按照下列公式(3)—(5)产生近似向量序列$\{x_k\}$：

$$\begin{cases} x_{k+1}=x_{k-1}+\omega(\alpha z_k+x_k-x_{k-1}) & (3)\\ Mz_k=r_k & (4)\\ r_k=b-Ax_k & (5)\end{cases}$$

$$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

如果$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x^*$，则向量$x^*$就是原方程组（1）的解。

本文1992年10月6日收到。

2 方法的收敛性

设x^*为方程组（1）的精确解。记误差向量

$$e_k = x^* - x_k \tag{6}$$

则由（3）式可得

$$e_{k+1} = e_{k-1} + \omega(\alpha z_k + e_k - e_{k-1})$$

注意到

$$z_k = M^{-1} r_k$$

则有

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= \omega(I - \alpha M^{-1}A)e_k + (1-\omega)e_{k-1} \\ &= \omega H e_k + (1-\omega)e_{k-1} \end{aligned} \tag{7}$$

其中

$$H = I - \alpha M^{-1}A \tag{8}$$

这里，I为n阶单位矩阵。由于M对称正定，故M可分解为

$$M = M^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}$$

式中矩阵$M^{\frac{1}{2}}$亦为对称正定。从而，矩阵H可分解为

$$\begin{aligned} H = I - \alpha M^{-1}A &= M^{-\frac{1}{2}}(I - \alpha M^{-\frac{1}{2}}AM^{-\frac{1}{2}}AM^{-\frac{1}{2}})M^{\frac{1}{2}} \\ &= M^{-\frac{1}{2}}V\Sigma V^T M^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

式中矩阵Σ为对称矩阵$I - \alpha M^{-\frac{1}{2}}AM^{-\frac{1}{2}}$的$n$个特征值$\sigma_i (i=1, 2, \cdots, n)$构成的对角矩阵

$$\Sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$$

V为相应的特征向量构成的正交矩阵。令

$$\hat{e}_k = V^T M^{\frac{1}{2}} e_k$$

则有$e_k \to 0$，当且仅当$\hat{e}_k \to 0$。由（7）式可得

$$\hat{e}_{k+1} = \omega\Sigma\hat{e}_k + (1-\omega)\hat{e}_{k-1} \tag{9}$$

其分量式为

$$(\hat{e}_{k+1})_i = \omega\cdot\sigma_i(\hat{e}_k)_i + (1-\omega)(\hat{e}_{k-1})_i \qquad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{10}$$

这是关于$(\hat{e}_k)_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$的差分方程，其特征方程是

$$\lambda_i^2 - \omega\sigma_i\lambda_i + (\omega-1) = 0 \qquad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{11}$$

设其根分别为$\lambda_{i,1}$与$\lambda_{i,2}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，令

$$\rho = \max_{1\le i\le n}\{max(|\lambda_{i,1}|, |\lambda_{i,2}|)\} \tag{12}$$

定理1 假设矩阵A和M对称正定，ρ由(12)式给出，则当$\rho<1$时，由(3)—(5)式定义的迭代序列$\{x_k\}$收敛于方程组（1）的精确解x^*，〔1〕，〔2〕。

3 参数的选择及其优化

从定理 1 可知，要使算法(3)—(5)式收敛，应有$\rho<1$，下面我们将给出参数α和ω应满足的条件，方能使$\rho<1$。

由 (11) 式得

$$\lambda_i=\frac{1}{2}(\omega\sigma_i\pm\sqrt{(\omega\sigma_i)^2-4(\omega-1)})$$

令

$$\Delta=(\omega\sigma_i)^2-4(\omega-1)$$

i) 当$\Delta\geqslant0$时

$$|\lambda_i|\leqslant\frac{1}{2}(|\omega\sigma_i|+\sqrt{(\omega\sigma_i)^2+4(1-\omega)})$$

令

$$|\sigma|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\sigma_i|$$

则有

$$|\lambda_i|\leqslant\rho=\frac{1}{2}(|\omega\sigma|+\sqrt{(\omega\sigma)^2+4(1-\omega)}) \tag{13}$$

因为$\rho<1$，故有

$$\frac{1}{2}(|\omega\sigma|+\sqrt{(\omega\sigma)^2+4(1-\omega)})<1$$

由此，容易推出$|\sigma|<1$，又因$\Delta\geqslant0$，此即

$$(\omega\sigma)^2-4(\omega-1)\geqslant0$$

据此，不难得出

$$0<\omega\leqslant\omega_0=\frac{2}{1+\sqrt{1-\sigma^2}}$$

且当$\omega=\omega_0$时，$\rho=\frac{1}{2}|\omega_0\sigma|$达于极小。

ii) 若$\Delta<0$，则有

$$|\lambda_i|=\frac{1}{2}((\omega\sigma_i)^2+4(\omega-1)-(\omega\sigma_i)^2)^{\frac{1}{2}}<1$$

得出$\omega<2$。又因$\Delta<0$，即

$$(\omega\sigma_i)^2-4(\omega-1)<0$$

可得

$$\frac{2}{1+\sqrt{1-\sigma_i^2}}<\omega<2$$

注意到$\sigma_i^2<\sigma^2$，故有

$$\omega_0=\frac{2}{1+\sqrt{1-\sigma^2}}\leqslant\omega<2$$

综合上述讨论可知，为使算法(3)—(5)收敛，参数α和ω应满足条件：

$$\begin{cases} 0<\omega<2 & (14) \\ |\sigma|=\rho(I-\alpha M^{-\frac{1}{2}}AM^{-\frac{1}{2}})<1 & (15) \end{cases}$$

且当$\omega=\omega_0$时，ρ达于极小。令$\rho_0=\min\limits_{\omega}\rho$，则

$$\rho_0=\frac{1}{2}|\omega_0\sigma|=\frac{|\sigma|}{1+\sqrt{1-\sigma^2}} \tag{16}$$

此时，迭代法(3)—(5)收敛最快。

下面接着讨论当（15）式成立时，参数α满足的条件。

设μ为矩阵$I-\alpha M^{-\frac{1}{2}}AM^{-\frac{1}{2}}$的任一特征值，则有

$$det(\mu I-(I-\alpha M^{-\frac{1}{2}}AM^{-\frac{1}{2}}))=0$$

或者

$$det(\frac{1-\mu}{\alpha}I-M^{-1}A)=0$$

这意味着$\xi=(1-\mu)/\alpha$是矩阵$M^{-1}A$的特征值，不难推知$\xi>0$，由于应有

$$|\mu|\leqslant\rho(I-\alpha M^{-\frac{1}{2}}AM^{-\frac{1}{2}})<1$$

立即可得

$$0<\alpha<2/\xi$$

为使上式对所有的ξ均成立，应取

$$0<\alpha<\frac{2}{\rho(M^{-1}A)} \tag{17}$$

式中，$\rho(M^{-1}A)$是矩阵$M^{-1}A$的谱半径。

又由(16)式知，ρ_0是$|\sigma|$的增函数，即$|\sigma|$越小，ρ_0亦越小。而

$$|\sigma|=\max_{1\leq i\leq n}|\mu|=\max\{|1-\alpha\xi_1|,\ |1-\alpha\xi_2|\}$$

这里ξ_1，ξ_2分别为矩阵$M^{-1}A$的最小、最大特征值。且易知当

$$\alpha=\frac{2}{\xi_1+\xi_2} \tag{18}$$

时，$|\sigma|$为极小，其极小值为

$$|\sigma_0|=(\xi_2-\xi_1)/(\xi_2+\xi_1)$$

从而得

$$\omega_0=\frac{2}{1+\sqrt{1-\sigma_0^2}}=2(\xi_2+\xi_1)/(\sqrt{\xi_2}+\sqrt{\xi_1})^2 \tag{19}$$

综上所述，我们得出下列结论：

定理 2　假设矩阵A和M对称正定，则由(3)—(5)式所确定的迭代序列$\{x_k\}$，当参数α和ω满足条件(12)和(17)时收敛，且当α和ω由(18)式和(19)式给出时，收敛最快。

参 考 文 献

1　解对称正定线性方程组的二阶迭代法及其收敛性．重庆建筑工程学院学报．1990.4

2　Golub G.H. and Varga. R S. Chebyshev. Semi-iterative methods, Successive methods, successive overrelaxation iterative methods. Parts I and Ⅱ. Numer. Math. 3, pp.147—168. 1961

（编辑：姚国安）

OPTION AND OPTIMUM OF PARAMETERS RICHARDSON TWO-STAGE ITERATIVE METHOD

Chen Xiangming

(Dept. of Natural Science)

ABSTRACT This paper discusses that the conditions are satistiel by parameters in the Richardson two-stage iterative method when it converges and the optimum of parameters makes this iterative converge more quikly.

KEY WORDS symmetric positive definite matrix, Richardson two-stages iterative method, spectral radius