

①

58-65

# 常微分方程组边值问题的最优化解法

王炳乐 周首光 宋立权

(机电系)

0175.1

**摘要** 本文以试射法和最优化计算方法为基础,构造了常微分方程边值问题的最优化解法。和边值问题的差分解法相比,该方法具有计算速度快,精度高(尤其在边界点处)和应用范围广等优点。

**关键词** 常微分方程, 边值问题, 最优化, 数值计算

常微分方程边值问题的数值解法通常采用差分法。本文提出一种新的方法。该方法的基本思路同文献[1]的试射法,但引入了最优化计算方法。和边值问题的差分解法<sup>[2]</sup>相比,该方法在给定精度条件下,积分步长可以取得较大,即在求解区间内计算点数目可以取得较少。因此,该方法具有计算速度快、精度高(尤其在边界点处)的优点;又该方法基于试射法,故适应范围极其广泛。

## 1 计算模型

在理论上,由于高阶常微分方程均可化为一阶常微分方程组,而且还可将偏微分方程化为常微分方程组,求其近似解。故以下仅对一阶常微分方程组作出讨论。

设一阶常微分方程组向量表达式为

$$y' = f(t, y) \tag{1}$$

式中:

$$y' = [y'_1, y'_2, \dots, y'_k]^T$$

$$y = [y_1, y_2, \dots, y_k]^T$$

$$f = [f_1, f_2, \dots, f_k]^T$$

给定边值为

$$\begin{aligned} y(t_0) &= y_0 \\ &= [y_{A10}, y_{A20}, \dots, y_{Am0}, \dots, y_{Ako}]^T \\ &\quad m < k \end{aligned} \tag{2}$$

本文1991年6月26日收到。

$$\begin{aligned}
 y(t_e) &= y_e \\
 &= [y_{B_{1e}}, y_{B_{2e}}, \dots, y_{B_{1e}}, \dots, y_{B_{ne}}]^T \\
 &\quad n = k - m \tag{3}
 \end{aligned}$$

其中  $A_i$  和  $B_j$  为相应函数的下标,  $i, j$  为各初值和终值的顺序号。注意  $A_i$  和  $B_j$  可能相同。试求其解向量。

设  $\tilde{y} = [\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_k]^T$  为微分方程 (1) 初值条件  $y_x(t_0) = [y_{A_{10}}, y_{A_{20}}, \dots, y_{A_{m0}}, \dots, y_{A_{m0}}, y_{C_{1x}}, y_{C_{2x}}, \dots, y_{C_{1x}}, \dots, y_{C_{nx}}]^T = [y_0, x]^T$  的解 (注意下标  $A_i \neq C_j$ )。由于向量  $y_0$  已知, 故终值  $\tilde{y}_e = [\tilde{y}_{D_{1e}}, \tilde{y}_{D_{2e}}, \dots, \tilde{y}_{D_{me}}, \dots, \tilde{y}_{D_{me}}, \tilde{y}_{B_{1e}}, \tilde{y}_{B_{2e}}, \dots, \tilde{y}_{B_{1e}}, \dots, \tilde{y}_{B_{ne}}]^T$  (注意下标  $D_i \neq B_j$ ) 将是未知初值向量  $x = [y_{C_{1x}}, y_{C_{2x}}, \dots, y_{C_{nx}}]^T$  的函数, 即  $\tilde{y}_e = [\tilde{y}_{D_{1e}}(x), \tilde{y}_{D_{2e}}(x), \dots, \tilde{y}_{D_{me}}(x), \tilde{y}_{B_{1e}}(x), \tilde{y}_{B_{2e}}(x), \dots, \tilde{y}_{B_{ne}}(x)]^T = [\tilde{y}_{D_e}(x), \tilde{y}_{B_e}(x)]^T$ 。又由于  $y_e = [y_{B_{1e}}, y_{B_{2e}}, \dots, y_{B_{ne}}]^T$  为已知向量, 故问题变为求  $x$ , 使  $\tilde{y}_{B_e}(x) = y_e$ 。

由于  $\tilde{y}_{B_e}(x)$  为非线性代数方程组, 而且具体表达式不易求得, 即使  $k = 2$  时也是如此, 故求解十分困难。为解决这一“难题”, 此处引入最优化计算方法。

构造目标函数

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \|\tilde{y}_{B_e}(x) - y_e\| \\
 &= \sum_{j=1}^n |\tilde{y}_{B_{je}} - y_{B_{je}}| \tag{4}
 \end{aligned}$$

极小化这一目标函数, 即可求得最优初值  $x^*$ , 再以初值条件  $y_x^*(t_0) = [y_0, x^*]^T$  求解上述微分方程组, 即可求出边值问题 (1)~(3) 的解函数  $y = [y_1, y_2, \dots, y_k]^T$ 。

上述解法中要用到常微分方程初值问题的解法和无约束最优化计算方法。它们可根据实际求解问题的性质和未知初值的数目的多少选取。

## 2 算例

### 例 1 求解边值问题

$$\begin{cases}
 y'' = -2 + \sin(hy) \\
 y(0) = 0 \\
 y(1) = 1
 \end{cases}$$

设  $y_1 = y$ , 则原方程可简记为

$$y' = f(h, y)$$

其中

$$y' = \left[ \frac{dy_1}{dh}, \frac{dy_2}{dh} \right]^T$$

$$f = [y_2, -2 + \sin(hy_1)]^T$$

$$y = [y_1, y_2]^T$$

边值条件为

$$y(h_0) = y_1(h_0) = y_1(0) = 0$$

$$y(h_e) = y_1(h_e) = y_1(1) = 0$$

目标函数为

$$F(x) = F(y_{2,2}) = \|\tilde{y}_{B_e} - y_e\| = |\tilde{y}_1(1) - y_1(1)|$$

本例初值问题解法采用定步长预报—校正方法<sup>[2]</sup>，步长为0.1，最优化计算方法为0.618法<sup>[3]</sup>，收敛精度  $EPS = 10^{-8}$ ，初始点  $x_0 = y_{2,x_0} = 0.0$ ，经36次搜索得最优解  $x^* = y_{2,x}^* = 0.968334$ 。最后以初值  $y_2^* = [y_1(0), y_{2,x}^*]^T = [0.0, 0.968334]^T$  求解上述微分方程组，结果如表1所示。本例微分方程的精确解满足  $y(h) = y(1-h)$ ，由表1易见，数值解已足够精确。

表1

$h$	0.0	0.2	0.4	0.5	0.8	1.0
$y$	0.0	0.1537801	0.2288881	0.2275973	0.1515538	0.00000002

### 例2 求解边值问题

$$y' = f(t, y)$$

其中，

$$y' = [y_1', y_2', y_3']^T$$

$$f = [y_2, -y_1, -y_3]^T$$

$$y = [y_1, y_2, y_3]^T$$

边值条件：

$$y(t_0) = y_1(0) = -1$$

$$y(t_e) = [y_2(0.2), y_3(0.2)]^T = [0.1986693, 0.8187308]^T$$

目标函数：

$$\begin{aligned} F(x) &= \|\tilde{y}_{B_e} - y_e\| \\ &= |\tilde{y}_2(0.2) - y_2(0.2)| + |\tilde{y}_3(0.2) - y_3(0.2)| \end{aligned}$$

本例采用定步长五阶单步法<sup>[2]</sup>，步长为0.02，最优化计算方法采用Powell方法<sup>[3]</sup>，初始点  $x_0 = [y_{2,x_0}, y_{3,x_0}]^T = [-0.5, -0.5]^T$ 。最优解  $x^* = [-0.2629033 \times 10^{-7}, 0.9999999]^T$ ，方程组求解结果如表2所示，和精确解差别仅出现在小数点后第七位之后（注：本例的解析解为  $y = [y_1, y_2, y_3]^T = [-\cos t, \sin t, e^{-t}]^T$ ）。如果将边值条件改为  $y(t_0) = y_2(0) = 0$ ， $y(t_e) = [y_2(0.2), y_3(0.2)]^T = [0.1986693, 0.8187308]^T$  或其他组合（在  $y_1(0)$ ， $y_2(0)$ ， $y_3(0)$  和  $y_1(0.2)$ ， $y_2(0.2)$ ， $y_3(0.2)$  中任取三个），其结果相同。

**例3 变厚度回转构件的应力计算。**由文献[4]知，该问题最后可归结为求解边值问题。

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dr^2} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{r}{h} \cdot \frac{dh}{dr}\right) \cdot \frac{dy}{dr} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \mu \cdot \frac{r}{h} \cdot \frac{dh}{dr}\right) \cdot y \\ \quad = -(3 + \mu) h \rho \omega^2 r \\ y(a) = a \cdot h(a) \cdot \sigma_r(a) = y_a \\ y(b) = b \cdot h(b) \cdot \sigma_r(b) = y_b \end{cases}$$

其中:

$r$ ——回转构件任意圆周的半径

$a$ ——回转构件内径

$b$ ——回转构件外径

$\omega$ ——回转构件的角速度

$\rho$ ——回转构件材料的密度

$\mu$ ——回转构件材料的泊松比

$h$ ——回转构件的厚度函数,  $h = h(r)$

$y$ ——关于  $r$  的一个函数

$$y(r) = rh\sigma_r = r \cdot h(r)\sigma_r(r)$$

表 2

$t$	$y_1$	$y_2$	$y_3$
0.0	-1.0	$-0.2629033 \times 10^{-7}$	0.9999999
0.04	-0.9992001	0.03998931	0.9607894
0.08	-0.9968017	0.07991467	0.9231163
0.12	-0.9928086	0.1197122	0.8869204
0.16	-0.9872273	0.1593182	0.8521438
0.20	-0.9800666	0.1986693	0.8187307

求出  $y$  后, 回转构件的径向应力  $\sigma_r(r)$  和切向应力  $\sigma_\theta(r)$  由下式给出:

$$\sigma_r = y/rh$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{dy}{dr} + \rho\omega^2 r^2$$

令  $y_1 = y$ , 则在向量方程式  $y' = f(r, y)$  中,

$$y' = \left[ \frac{dy_1}{dr}, \frac{dy_2}{dr} \right]^T$$

$$f = \left[ y_2, -\frac{1}{r} \left( 1 - \frac{r}{h} \cdot \frac{dh}{dr} \right) y_2 + \frac{1}{r^2} \left( 1 - \mu \cdot \frac{r}{h} \cdot \frac{dh}{dr} \right) \cdot y_1 - (3 + \mu)\rho h \omega^2 r \right]^T$$

$$y = [y_1, y_2]^T$$

边值条件:

$$y(r_0) = y_1(a) = a \cdot h(a) \cdot \sigma_r(a) = y_a$$

$$y(r_e) = y_1(b) = b \cdot h(b) \cdot \sigma_r(b) = y_b$$

目标函数:

$$F(x) = F(y_{2,e}) = \| \tilde{y}_{2,e} - y_e \| = | \tilde{y}_1(b) - y_b |$$

实际计算时取  $\omega = 628.32r/s$ ,  $\mu = 0.292$ ,  $\rho = 7.85g/cm^3$ ,  $a = 25mm$ ,  $b = 255mm$ ,

$h(r) = x(1) + \sum_{j=2}^n x(j) \cdot \left(\frac{r-a}{b-a}\right)^j$ , 其中  $n=5$ ,  $x = [2.7084, 0.70844, 0.41651, 0.12430, -0.16824]^T$ ,  $y_a=0$ ,  $y_b=0$ 。初值问题的解法采用龙格-库塔法<sup>[2]</sup>, 取101个计算点, 即步长为2.3mm, 最优化计算方法用0.618法<sup>[3]</sup>, 计算结果列于表3中。表中还给出了按文献[2]提供的二阶常微分方程边值问题差分解法在相同步长条件下的结果<sup>[4]</sup>。

表3

10<sup>6</sup>Pa

半径 $r$ (mm)	本文方法		差分法	
	$\sigma_r$	$\sigma_\theta$	$\sigma_r$	$\sigma_\theta$
25.0	0.000	187.272	0.900	185.988
48.0	65.832	117.885	65.860	118.029
71.0	75.539	101.861	75.855	101.940
94.0	74.649	93.606	74.697	93.648
117.0	69.380	86.980	69.424	86.991
140.0	61.434	80.458	61.471	80.444
163.0	51.544	73.564	51.572	73.530
186.0	40.158	66.163	40.178	66.112
209.0	27.611	58.247	27.623	58.184
232.0	14.162	49.856	14.167	49.789
255.0	0.000	41.042	0.000	40.991

### 3 简单结语

#### 3.1 关于计算精度问题

计算实践表明, 本文方法的精度远高于文献[2]的差分法, 尤其在边界点处, 且计算点数目取得较少, 即积分步长较大时, 这一点更为明显。表4给出了算例3在步长等于23mm即计算点数目为11个时的计算结果。和表3结果比较, 在  $r=25\text{mm}$  处, 差分法  $\sigma_\theta$  的误差已达17.7%, 而本文方法的  $\sigma_\theta$  仅1.1%。此外, 为进一步比较该方法的精度, 表5给出了等厚度回转构件在不同计算点数目时边界点的应力值(计算条件同例3)。解析解  $\sigma_\theta(a) = 166.191 \times 10^6 \text{Pa}$ ,  $\sigma_\theta(b) = 37.263 \times 10^6 \text{Pa}$ 。当计算点数目分别为51, 31, 21, 11和8时, 差分法  $\sigma_\theta(a)$  的误差分别为2.5%, 5.4%, 9.1%, 18.6%和23.9%, 而本文方法在计算点数目为11时仅1%, 为8时也只有3.4%。

#### 3.2 关于计算速度问题

本文提出的方法是一种迭代计算, 因此, 当计算点数目取得较多, 即步长较小时(对于算例3, 计算点数目大于50时)计算时间较差分法长。但据于3.1的原因, 在给定精度的条件下, 本文方法远高于差分法。在例3中, 为达到相同的计算精度, 差分解法的取点数目约

表 4

10<sup>6</sup>Pa

半 径 $r$ (mm)	本 文 方 法		差 分 法	
	$\sigma_r$	$\sigma_\theta$	$\sigma_r$	$\sigma_\theta$
25.0	0.000	189.240	0.000	153.081
48.0	65.014	118.783	64.033	123.685
71.0	75.154	102.286	74.838	104.079
94.0	74.439	93.858	74.505	94.592
117.0	69.255	97.152	69.480	87.170
140.0	61.357	80.586	61.620	80.015
163.0	51.496	73.666	51.734	72.594
186.0	40.129	66.248	40.312	64.757
209.0	27.595	58.321	27.713	56.495
232.0	14.155	49.922	14.210	47.852
255.0	0.000	41.102	0.000	43.590

表 5

应力 10 <sup>6</sup> Pa	方 法	计 算 点 数 目					
		101	51	31	21	11	8
$\sigma_\theta(a)$	本文方法	166.192	166.195	166.222	166.338	167.946	171.779
	差分法	164.927	162.074	157.277	150.989	135.283	126.519
$\sigma_\theta(b)$	本文方法	37.263	37.263	37.263	37.263	37.320	37.497
	差分法	37.238	37.304	37.396	37.564	38.449	39.638

为本文方法的6—7倍。

### 3.3 关于应用范围问题

本文方法基于试射法。试射法在理论上适合于线性, 或非线的高阶微分方程或方程组的情形。但基于试射无规律, 计算量大, 实用上只用于一个初值未知的情况。现将最优化计算和该方法相结合, 使之不仅适合一个初值未知的情况, 而且也适合多个未知初值的情况(取决于最优化计算方法, 可以几十或上百)。故本文方法应用范围广泛。

### 3.4 关于工程价值问题

工程上很多问题的计算结果, 往往只关心边界点处的数值, 例如与算例 3 相似的飞轮和汽轮机叶轮, 其强度条件主要受内孔应力的限制。这时希望有一种数值方法, 能以最少的计算量求得内孔应力, 尤其在它们形状优化设计时更是如此, 而本文方法正可满足这一要求。事实上, 本文方法已在飞轮和汽轮机叶轮形状优化设计中获得了成功的应用。当其半径从 25

到255单位变化时, 计算点数目只取了7个, 此时内孔应力的误差约5%。

### 3.5 关于算法的整体思路小结

为简单起见, 以下以二阶边值方程

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(a) = \alpha, y(b) = \beta \end{cases} \quad (5)$$

作出说明。本文处理上述方程的基本思路是: 设法确定 $y'(a)$ 的值 $m$ , 使满足初值问题 $y(a) = \alpha, y'(a) = m$ 的解也满足另一边值条件 $y(b) = \beta$ 。也就是要从微分方程(5)的经过点 $A(a, \alpha)$ 而具有不同斜率的积分曲线中, 去寻找一条经过点 $B(b, \beta)$ 的曲线, 从技术上讲要使 $B'$ 点与 $B$ 点重合(逼近), 如图1所示。为使 $B'$ 点与 $B$ 点重合(逼近), 令 $\Delta = |\beta' - \beta|$ , 极小化 $\Delta$ , 即可达到这一目标。从全过程看, 方法的前半部分同文献[1]的试射法, 后半部分为最优化计算。因此本文方法是这两种方法的巧妙组合, 至于更深入的理论问题, 如收敛条件、收敛速度等另文再作讨论。

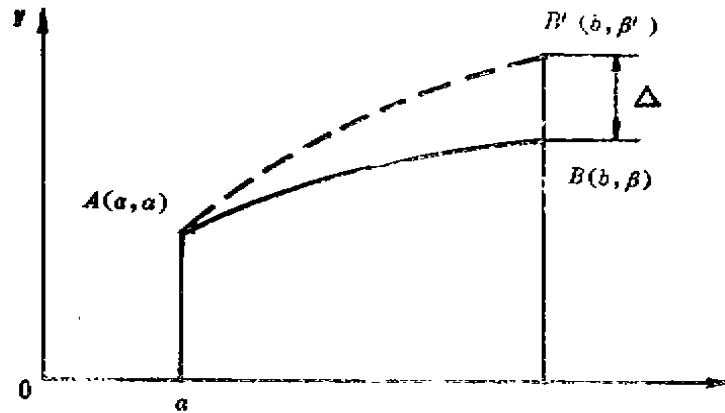


图1

### 参 考 文 献

- 1 南京大学数学系计算数学专业编. 常微分方程数值解法. 北京: 科学出版社, 1979.
- 2 许志宏等编. TQ-16机FORTRAN语言常用算法程序集. 北京: 化学工业出版社, 1982.10.
- 3 万耀青等编. 最优化计算方法常用程序汇编. 北京: 工人出版社, 1983.3.
- 4 王炳乐等. 变厚度回转构件的应力计算. 机械, 1990, (6)

(编辑: 刘家凯)

AN OPTIMIZATION METHOD FOR SOLVING THE  
BOUNDARY VALUE QUESTION OF  
DIFFERENTIAL EQUATIONS

*Wang Bingle    Zhou Shouguang    Song Liqun*

(Dept. of Mechanical and Electrical Engineering)

**ABSTRACT** This paper presents an optimization method for solving the boundary value question of a differential equation on the basis of the trial-and-error method and the optimization method. As compared with the differential method, this method has some advantages such as quiker velocity at count, higher precision (especially at the boundary points) and can be widely used.

**KEY WORDS** differential equation, boundary value question, optimization method, numerical method