

2

9-18

砼损伤带裂缝模型*

钱觉时**

(重庆建筑工程学院)

吴科如

(同济大学)

TU370!

摘要 本文提出了一种适合于砼力学行为分析并能借助有限元方法易于实施的砼断裂模型。文章还给出了对一些实例的计算分析结果并与试验结果进行对比,结果表明采用该模型的计算结果有很高的计算精度。

关键词 断裂模型, 砼损伤, 应变软化, 砼

混凝土、损伤带 裂缝模型

中图法分类号 TU37

经典断裂力学的中心问题是单个裂缝扩展条件的判断。这种问题通常根据连续介质力学的经典的场方程采用一个断裂准则来处理的,这种处理导致断裂方法和极限分析方法之间概念上和计算方法上有明显的不同。断裂方法是处理裂缝扩展的破坏方式,而极限分析则是处理屈服的破坏方式。这种两分法是不适合砼的,实际结构行为并不是这两种极限情况。因此,为了更好地描述实际行为必须建立新的断裂模型,通常称为非线性断裂模型。这些模型不包括整体断裂准则,但能描述材料的渐进断裂而不考虑应力奇异性,Planas 将这样的模型称为渐进断裂模型(Progressive Fracture Models),基于应变软化和应变局部化这两个基本的概念,可以很好地描述从连续介质到非连续(断裂)状态的渐进变化。这类模型最著代表性的是 Hillerborg 的虚拟裂缝模型(Fictitious Crack Model,简称 FCM),和 Bazant 的裂缝带模型(Blunt Band Crack Model,简称 BCBM),FCM 和 BCBM 在对砼的一些力学行为分析中已获得很大的成功,但是这两个模型不足之处已为其创立者和使用者所注意,例如 FCM 必须预知裂缝扩展路径,而且对应变软化关系作必要的简化以满足有限元分析中的实施,BCBM 难以对极限荷载以后的砼行为进行分析等,这里对此不作进一步的讨论。本文也在应变软化和应变局部化这两个基础上,吸收损伤思想,采用 Bazant 带的概念,并根据能量守恒的原理,提出砼损伤带裂缝模型,本文将着重介绍该模型的基本思想和该模型在有限元方法中的具体实施。本文最后给出采用损伤带裂缝模型的计算结果并与实际测试结果进行对比。

1 损伤带裂缝模型的基本思想

损伤带裂缝模型主要吸收了两种重要思想:损伤思想和能量思想,并采用了 Bazant

* 收稿日期:1993-04-02.

** 钱觉时,男,1962年生,讲师,重庆建筑工程学院建材系(630045).

的“带”(band)的概念。

1.1 损伤思想

砼中裂缝的形成与发展过程可认为是损伤程度增大的过程。砼在外力作用下形成肉眼可见的裂缝以前,都伴随有大量微裂缝产生,这实际上对应于材料的损伤。通常砼损伤程度增大的过程可以用砼的弹性模量降低的过程来表示^[1],砼中真实的裂缝可以认为是损伤的特殊情况,即当砼完全损伤时,弹性模量降低为零。

在吸收损伤思想时,采用下列假定:

- 1) 砼只有受拉损伤。
- 2) 砼是弹脆性损伤介质,即当砼损伤后完全卸载时能恢复原状,无残余变形。
- 3) 砼损伤后保持各向同性

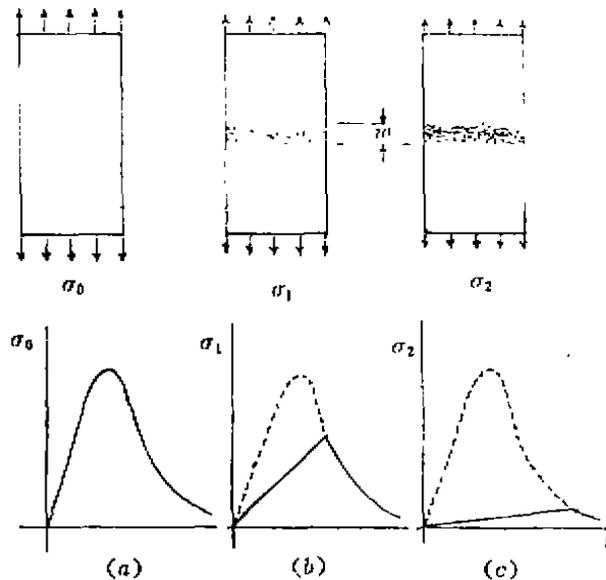


图 1 损伤带裂缝模型示意图

a)未损伤 b)损伤 c)严重损伤

1.2 带的概念

图 1 所示为受直接拉伸的砼板,假定将要形成裂缝的微裂缝区为一宽度为 w 的损伤带,并设横跨损伤带上的平均应力应变关系符合直接拉伸时砼软化区域应力应变关系。随损伤的增加,初始弹性模量降低,图中应力应变关系的实线表示至当前损伤程度时砼损伤区域上砼所剩余的弹性模量,以及再继续受到损伤时应力应变关系所遵循的规律。

当已知损伤带宽度时,根据能量平衡原则,直接拉伸时砼软化区域的应力应变关系可由应力位移形式的软化关系 $\sigma-\delta$ 来确定,这就是接下来所要介绍的能量思想。

1.3 能量思想

设损伤带上真实的应力应变关系为 $\delta-\epsilon$,并且与 $\sigma-\delta$ 有相同的函数形式。显然,从无损伤至完全损伤,单位体积损伤带所耗散的能量为: $\int_0^{\epsilon_r} \sigma d\epsilon$ (ϵ_r 为极限应变),即是 $\sigma-\epsilon$ 曲线下

的面积,当形成面积为 A ,宽为 w 的损伤带所耗散的能量为:

$$A \cdot w \int_0^{\epsilon_f} \sigma d\epsilon$$

此能量值是可以通过试验加以确定的,实际上可表示为:

$$A \cdot w \int_0^{\epsilon_f} \sigma d\epsilon = A \cdot \int_0^{\delta_0} \sigma(\delta) d\delta = A \cdot G_f \quad (1)$$

式中 δ_0 为砗软化曲线上应力为零时的位移值, G_f 就是大家所熟悉的断裂能。

这样,当知道(1)式中的 w 值,由 σ - δ 关系就可以得知 σ - δ 关系。损伤带宽度 w 值等于通常所说的断裂区域(fracture zone)的宽度, Bazant 认为此宽度通常为砗粗集料粒径的 3 倍左右,是砗断裂时的一个特征值,不过此值在实际中很难确定^[2]。但考虑有限元方法的特点及其实施的方便,损伤带宽度 w 的真实值并不需要准确确定,通常将损伤带宽度设定为一个单元的宽度 w_0 ^[2],但是这时必须满足能量守恒定律,即无论当损伤带宽度是取真实值 w ,还是取单元宽度 w_0 ,应保证单位面积损伤带所耗散的能量相等。

设宽度为 w_0 的损伤带上的应力应变关系为 σ' - ϵ' ,并且也与 σ - δ 有相同的函数形式。为了保证能量平衡,只要使得:

$$w_0 \int_0^{\epsilon'_f} \sigma(\epsilon') d\epsilon' = \int_0^{\delta_0} \sigma(\delta) d\delta = G_f \quad (2)$$

这样,虽然在 w 上的应力应变关系 σ - ϵ 与 w_0 上的 σ' - ϵ' 并不相同,但却保证了整个损伤带上的应力位移关系是相同的,即为 σ - δ 形式。

综上所述,通过采用带的概念和根据能量平衡原理以及直接拉伸时砗的应变软化关系,损伤思想不仅在有限元方法中易于实施,并且将以往主要用于大范围微开裂分析的损伤思想扩大用于断裂的局部化问题的分析。至此,一种新的断裂模型—损伤带裂缝模型 BDCM(Band Damaging Crack Model)就初步建立了。

损伤带裂缝模型将形成裂缝的断裂区域视为一损伤带,这样裂缝的形成与扩展对应于损伤的产生与增加。

砗断裂区域的应力应变关系的上升段(硬化段)通常被假定为一曲线,在本研究中也采用这一处理。下降段(软化段)有假定为直线^[2],双直线^[3],也有假定为指数形式^[4]和其它更为复杂的形式的^[5],通常软化段是以应力位移形式给出的,一旦软化段的函数关系确定以后,软化段的具体形式通常又可由砗的断裂能 G_f 和抗拉强度 f_t 唯一确定。损伤带裂缝模型所需的是应力应变关系,当损伤带宽度假定后,经过适当的数学处理由应力位移关系也可以很方便地得到应力应变关系。本文所采用的软化段的应力应变关系以及如何根据损伤带宽度加以确定我们将在下面介绍。

这样,当某一点的主拉应力超过砗的抗拉强度时,损伤开始,砗相应的弹性模量降低,降低幅度的确定我们将在下面介绍。当砗受到损伤以后,其抗拉能力也相应降低,对应于图 1(b)、(c) 的损伤情况时,将图中实线所表示的曲线的最高点称为这种情况下砗的剩余抗拉强度,这时主拉应力如超过此剩余抗拉强度,损伤程度继续增加,砗的弹性模量和剩

余抗拉强度仍将继续降低,直至主拉应力低于剩余抗拉强度时。

2 损伤带裂缝模型在有限元方法中的实施

一个裂缝模型理论上再合理,如果实施起来很困难,那也无多大价值。因此如何将模型应用于具体数值分析,是一个模型建立的重要方面。下面主要讨论损伤带裂缝模型中单元破坏的处理和单元尺寸不同时应力应变关系的转化上。

2.1 单元损伤的判断与损伤后的处理

损伤带裂缝模型在有限元分析中的关键问题是单元损伤或破坏的确定。有限元方法最终归结到求解下列方程组:

$$\{F\} = [K]\{\delta\} \quad (3)$$

$\{\delta\}$ 为节点的位移向量, $[K]$ 为总体刚度矩阵, $\{F\}$ 为节点的荷载向量。变化位移或荷载边界条件,可对结构的整体力学行为进行分析,但要获得整体的全荷载变形关系,变化荷载条件是难以达到的,通常是变化位移条件。

设加荷第 n 步时,下列关系成立:

$$\{F\}_n = [K]_n \{\delta\}_n \quad (4)$$

变化位移边界条件转化为节点力,形成新的节点荷载向量 $\{F\}_{n+1}$ 代入(4)式,总体刚度矩阵不变,可得出 $\{\delta\}_{n+1}$,以此新求出的节点位移向量计算每个单元的应力,如无破坏或损伤,则以 $[K]_{n+1} = [K]_n$, $\{\delta\}_{n+1} = \{\delta\}_{n+1}$ 代入(4)式进入下一步加荷。

单元损伤的判别与处理如下:根据 $\{\delta\}_{n+1}$ 可知各单元的 $\{\delta\}_e$,由 $\{\delta\}_e$ 再求出 $\{e\}_e$,则单元的应力 $\{\sigma\}_e$ 可通过下式计算:

$$\{\sigma\}_e = [E]\{e\}_e \quad (5)$$

$$[E] = \frac{E_1}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中 ν 为泊松比, E_1 为单元在上一步加荷中仍保持的弹性模量值,由于假定损伤是各向同性的,因此单元的弹性矩阵取对称形式。简单受力形式下,如轴向拉伸或三点弯曲,单元是否再损伤,可按最大主应力是否达到材料的剩余的抗拉强度 f_a 为判据,即当 $\sigma_1 - f_a \geq \Delta$ 时单元破坏, Δ 按所要求的精度确定,以 $e_1^* = \sigma_1^*/E_1$ 确定单元此次损伤之后所剩余的弹性模量 E_2 与抗拉强度 f_a ,如图 2 所示。

且:

$$f_a = f(e_1^*) \quad (7)$$

$$E_2 = f(e_1^*)/e_1^* \quad (8)$$

$\sigma = f(e)$ 为单向拉伸时的断裂区域的应力应变关系。以 E_2 取代(6)式中的 E_1 作为单元损伤后的弹性性质,再调整整体刚度矩阵 $[K]_n$ 为 $[K]_{n+1}$,与 $\{F\}_{n+1}$ 一起代入(4)式中求解出 $\{\delta\}_{n+1}$,又以新的节点位移向量求出各单元的应力,判断有无损伤。无损伤以 $[K]_{n+1}$ 为

[K]. 进入下一步计算, 有损伤则重复上述步骤至无单元损伤。

当 $\sigma_1 - f_n \leq \Delta$ 时, 可认为单元未损伤。

复杂应力状态下, 可引入等效应力 σ^e 和等效应变 ϵ^e 的概念, 设 $\sigma^e - \epsilon^e$ 关系符合直接拉伸时断裂区域上的应力应变关系。

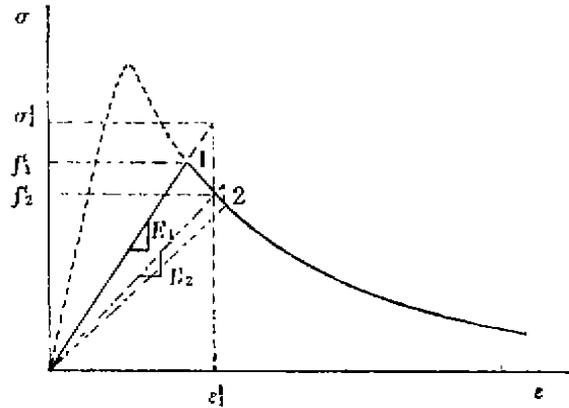


图2 断裂区域的损伤示意图

2.2 砼应变软化关系的调整

前面已指出, 当损伤带的宽度确定为单元的宽度时, 为了使能量守恒, 即保证断裂所耗散的能量为一定值, 则要根据单元的尺寸确定单元所遵循的应力应变关系 (应变软化关系)。当采用简化的应变软化形式时, 这种确定是非常方便的^[2]。

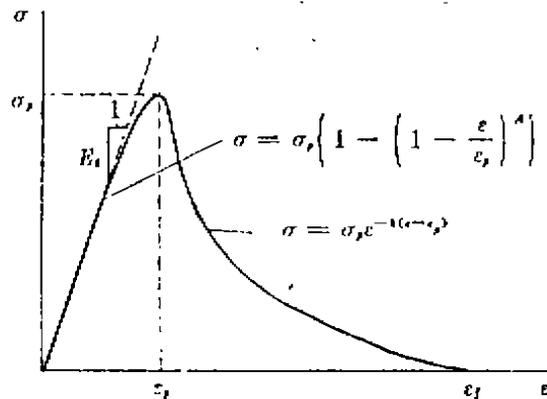


图3 本文采用的损伤带应变软化关系

但要进行准确的分析, 往往要采用符合实际情况比较复杂的应变软化关系, 接下来我们将讨论比较复杂的应变软化关系的调整。

参照 Gopalaratnam 和其他研究者对应变软化关系的表达^[4,5,6], 假定应力应变关系的下降段符合指数分布, 且取下列形式:

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_s \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_s} \right)^A \right] & \varepsilon \leq \varepsilon_s \\ \sigma = \sigma_s e^{-K(\varepsilon - \varepsilon_s)} & \varepsilon > \varepsilon_s \end{cases} \quad (9)$$

(9) 式中的符号见图 3, 其中 $A = E_s \varepsilon_s / \sigma_s$, 当上升段设为直线时, $\sigma_s / \varepsilon_s = E_s$, 即取 $A = 1$, K 为要根据单元尺寸调整的常数, 与单元尺寸、断裂能、 σ_s 等因素有关。

现在的关键是如何确定 K 。根据能量守恒原理, 应有图 3 中 $\sigma - \varepsilon$ 曲线下的面积与单元宽度的积等于断裂能 G_f 的关系成立。

具体为:

$$\begin{aligned} G_f &= w_s \int_0^{\varepsilon_s} \sigma d\varepsilon \\ &= w_s \int_0^{\varepsilon_s} \sigma_s \left(1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_s} \right)^A \right) d\varepsilon + w_s \int_{\varepsilon_s}^{\varepsilon_f} \sigma_s e^{-K(\varepsilon - \varepsilon_s)} d\varepsilon \end{aligned} \quad (10)$$

变换得:

$$G_f = \frac{A}{A+1} w_s \sigma_s \varepsilon_s - \frac{w_s \sigma_s}{K} (e^{-K\varepsilon_f} - e^{-K\varepsilon_s}) \quad (11)$$

解上述方程就可以确定 K 值了。(11) 式是一个非线性方程, 具体求解可采用 Newton-Raphson 方法。

K 的取值随单元尺寸、 G_f 和 σ_s 、 ε_s 变化, ε_s 超过一定的值以后对 K 的影响很小。

3 损伤带裂缝模型的计算实例

为了检验损伤带裂缝模型的精确性, 采用程序 JQ517^[7] 进行一些计算, 并与试验结果以及其他研究者的计算结果进行对比, 计算结果见图 4、图 5 和图 6(a)、(b)。

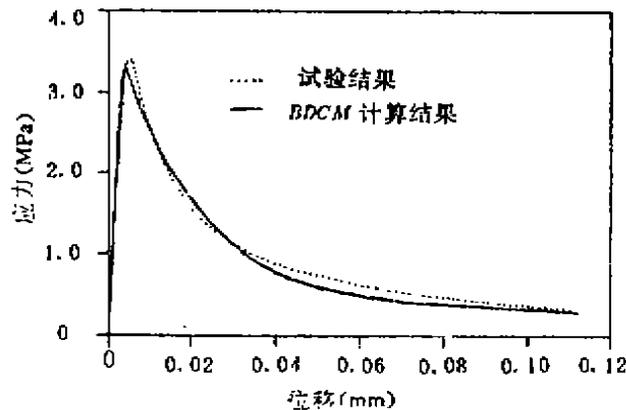


图 4 直接拉伸情况下应力—位移关系的 BDCM 计算结果与 Reinhardt 的试验结果对比

试件尺寸: 250 × 60 × 50 mm (长 × 宽 × 厚) 每边切口深度为 5 mm

砼力学性质: $f_t = 3.5$ MPa $E = 39270$ MPa $G_f = 100$ N/m

图4是损伤带裂缝模型的计算结果与Reinhardt等的直接拉伸试验结果^[5]的对比。Reinhardt采用的试件几何尺寸为:250×60×50 mm(长×宽×厚),试件两边开深度为5 mm的切口,开切口后使试件的净截面尺寸为50×50 mm,砼性质见表1。图中的虚线为Reinhardt的试验结果,应力为荷载除净截面面积,变形为两边切口的平均值,测量范围为35 mm。实线是采用损伤带裂缝模型的计算结果,计算时假定砼应软化关系为(9)式的形式,其它参数与Reinhardt所给出的相同。

表1 Reinhardt采用的砼配合比与力学性能^[6]

配合比(水泥:砂:水)	1:3.38:1.44:0.5
(石子粒径 4~8mm)	
抗压强度	47.1MPa
弹性模量	39270MPa
抗拉强度	3.5MPa
断裂能	100N/m

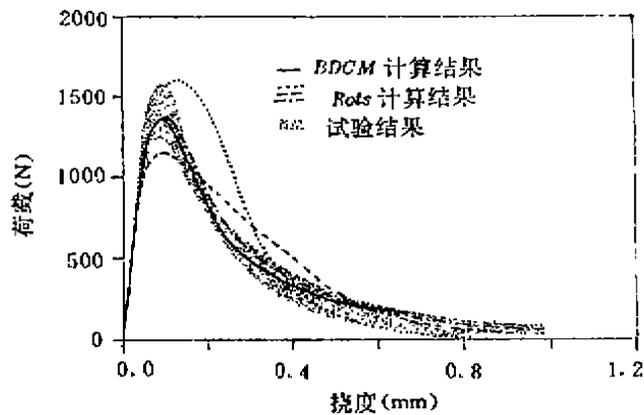


图5 切口梁三点弯曲时荷载—挠度曲线的BDCM计算结果与Kormeling等试验结果和Rots的计算结果对比

试件尺寸:450×100×100 mm,切口深度=50 mm

砼力学性质: $f_t = 2.4 \text{ MPa}$ $E = 20000 \text{ MPa}$ $G_f = 113 \text{ N/m}$

图5是切口梁的三点弯曲情况。梁的几何尺寸为450×100×100 mm(长×高×宽),相对切口深度为0.5,砼性质为:弹性模量 $E = 20000 \text{ MPa}$,抗拉强度 $f_t = 2.4 \text{ MPa}$,断裂能 $G_f = 113 \text{ N/m}$,泊松比为0.2。图中阴影部分是荷载—挠度试验测试结果的范围,实线是损伤带裂缝模型的计算结果,计算时仍假定砼的应变软化关系为(9)式的形式。图中另外三条虚线是Rots^[6]采用混合型片裂缝模型(Mixed-Mode Smearred Crack Model),以不同

的砼 应变软化关系的数值计算结果。

图 6 也是切口梁的三点弯曲情况,其中(a)为荷载—挠度关系,(b)为荷载—裂缝口张开位移关系。试件几何尺寸为:800×100×100mm(长×高×宽),相对切口深度为 0.5,砼的性质见表 2. 图中的黑点为 Carpinteri 等^[8]的试验结果,实线为采用损伤带裂缝模型的计算结果,计算时同样假定砼的软化关系符合(9)式的形式,图中的三条虚线为 Carpinteri 等采用 FCM 的数值计算结果,且三条虚线的断裂能输入参数不同,分别为 50,60 和 70 N/m。

表 2 Carpinteri 采用的砼配合比与力学性能^[8]

配合比(水泥:砂+石:水)	1:3.43:0.469
(石子最大粒径 100 mm)	
抗压强度	60.6 MPa
抗拉强度	4.31MPa
弹性模量	28900 MPa
泊松比	0.20
断裂能	66 N/m

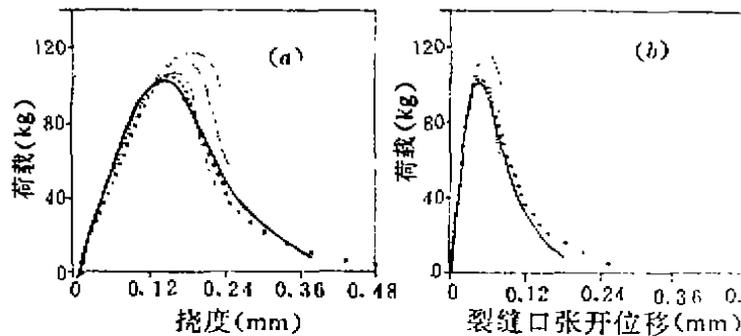


图 6 切口梁三点弯曲时的 BDCM 计算结果(实线)

与 Carpinteri 试验结果(点)和计算结果(点线)对比

(a)荷载—挠度曲线 (b)荷载—CMOD 曲线

试件尺寸:800×100×100 mm, 切口深度=50 mm

砼力学性质: $f_c = 43.3 \text{ kg/cm}^2$ $E = 289000 \text{ kg/cm}^2$ $G_f = 66 \text{ N/m}$

从图 4、图 5 和图 6 不难看出,不同情况下采用损伤带裂缝模型的数值计结果与试验

结果较好吻合,相比于其他研究者的数值结果,本文的计算结果有较高的计算精度。

4 结 论

4.1 损伤带裂缝模型的原理

损伤思想通常只能用于研究砼中大范围的微开裂,损伤带裂缝模型通过采用带的概念,将砼断裂时断裂区域设定为有一定宽度的损伤带,将砼中裂缝的形成与扩展对应于损伤的开始与增加,并以材料弹性模量和抗拉强度的降低来表示,降低的程度直接根据砼直接拉伸时的应变软化关系确定,从而将损伤思想用于研究砼中裂缝的形成与扩展。

继而,结合有限元方法的特点,损伤带裂缝模型将损伤带宽度设定为单元的宽度,然后根据能量平衡原理由单元尺寸确定单元所遵循的应力应变关系。

4.2 损伤带裂缝模型的特点

4.2.1 实施方便

损伤带裂缝模型在有限元分析中非常易于实施,具体表现在:分析中不必预知裂缝的扩展路径,不仅能用于对砼中已有裂缝扩展的分析,还可以用于分析砼中裂缝的形成,特别可用于多个断裂区域的形成与发展的分析。

可以很方便地得出整个断裂过程的荷载变形关系曲线。借助于损伤思想和程序设计中的技巧,该模型可以很方便地模拟和计算砼的一些复杂的断裂行为。借助于程序JQ517中关于砼性质的随机模拟,该模型更有利于从细观上对砼的断裂行为进行研究。

4.2.2 模型参数易于获得

该模型所需参数可由砼直接拉伸时的应变软化关系确定,当应变软化关系的函数形式确定以后,模型所需的参数即为砼的抗拉强度和断裂能,这实际为大多数断裂模型所必需的参数。

4.2.3 有较高的计算精度

在有限元分析中,由于将损伤带宽度设定为单元的宽度,同时采用了损伤思想,可以不对砼的应变软化关系进行简化,而能方便地采用曲线形式的砼应变软化关系,由于曲线形式的应变软化关系相比于线性与双线性软化关系来说,更接近于砼的真实的软化关系,因此采用损伤带裂缝模型的计算结果更能接近实际情况。

参 考 文 献

- 1 Loland K. E. Damage theory applied to concrete. Fracture Mechanics of Concrete (Ed. by Wittmann, F. H.), Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, The Netherland, 1983
- 2 Bazant, Z. P. Mechanics of fracture and progressive cracking in concrete structure. Fracture Mechanics of Concrete; Structure Application and Numerical Calculation (Ed. by Sih, G. C., and DiTommaso, A.), Marinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, The Netherland, 1985
- 3 Pertersson P. E. Crack growth and formation of fracture zones in concrete and similiar materials. Report

- TVBM-1006, University of Lund, 1981
- 4 Gopalaratnam V. S. and Shah S. P. Softening response of plain concrete in direct tension. ACI, Journal Vol. 82, No. 3, 1985
 - 5 Reinhardt H. W. et al. Tensile tests and failure analysis of concrete. Journal of Structural Engineering ASCE, Vol. 112, No. 11, pp. 2426—2477
 - 6 Rots J. G. Strain-softening analysis of concrete fracture specimens. Fracture Toughness and Fracture Energy of Concrete (Ed. by Wittmann, F. H.), Elsevier science publishers, 1986
 - 7 钱觉时. 砼断裂行为及断裂参数研究. 同济大学博士学位论文, 1992 年 8 月
 - 8 Garpinteri A. et al. Experimental evaluation of concrete fracture energy through a new identification method. Fracture Toughness and Fracture Energy of Concrete (Ed. by Wittmann, F. H.), Elsevier science publishers, 1986

(编辑: 姚国安)

BAND DAMAGING CRACK MODEL OF CONCRETE

Qian Jueshi

(Chongqing Institute of
Architecture & Engineering)

Wu Kern

(Tongji University)

ABSTRACT This paper presents a fracture model of concrete, band damaging crack model (BDCM). The BDCM can be used to analyze mechanical behaviour of concrete effectively and easily. Compared with test results, numerical results calculated by the BDCM are very precise.

KEY WORDS fracture model, damage of concrete, strain softening, concrete