(13)
第 15 卷 第 3 期 重庆建筑工程学院学报 Vol. 15 No. 2
1993 年 9 月 J. Chongqing Inst. of Archit. & Engin. Sept. 1993

88-93

n 阶双重幻方的构造*

周寅亮**
(基础部)

O157.2

摘 要 本文得出了 n 阶方阵为双重幻方的一个充分条件.由此构造出了一个 64 阶双重幻方,并用电子计算机进行了验算,使得幻方的质量比较高。

关键词 幻方,双重幻方,64 阶双重幻方,正交拉丁方,对角拉丁方 n阶方阵 计算机

中图分类法 O157

引 言

幻方是一个古老的组合数学问题。

构造单重幻方已有较成熟的方法[1]. 但是构造双重幻方至今没有成熟的可靠方法,且可能某些阶数的双重幻方根本不存在。因此目前双重幻方都是按各自的方法构造。

1955 年和 1956 年霍纳先后造出了 8 阶和 9 阶双重幻方[3][4]. 1982 年梁培基造出了 8 阶和 16 阶双重幻方各一个。1989 年章长才用另外的方法造出了质量更高的 8 阶和 16 阶双重幻方[6],91 年又造出了 32 阶双重幻方[7].

由于双重幻方的计算量太大,所以用手算很难造出更高阶的。借助于电子计算机却可以造出更高阶的双重幻方。

1 n 阶方阵为双重幻方的充分条件

n 阶双重幻方是一个 n 阶方阵。它的 n^2 个元素为互不相等的正整数,并且它的每行,每列以及两条对角线的各元素之和相等,之积也相等。称此和为幻和,称此积为幻积。

评价同阶幻方质量高低的标准是幻和越小,质量越高。

为方便计,以下总假设数组 $\alpha: a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是由 n 个互不相等的正整数组成,数组 $\beta: b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是由 n 个互不相等的非负整数组成。

定义 1 设数组 $\alpha: a_1, a_2, \cdots, a_n$,若 n 阶方阵

$A = (a_{ij})_{n\times n}$ 的每一行或每一列都是 α 的不同排列,则称 A 为数组 α 的 n 阶拉丁方。若 n 阶拉丁方 A 的两条对角线也是 α 的一个排列,则称 A 为 n 阶对角拉丁方。

定义 2 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}, B = (b_{ij})_{n\times n}$ 是两个 n 阶拉丁方,若矩阵

---

* 收稿日期:1991-11-11.

** 周寅亮,男,1945 年出生,讲师,重庆建筑工程学院(630045).

$$((a_{ij},b_{ij}))_{n\times n}$$

中的 n^2 个有序数组元素 (a_{ij},b_{ij}) 互不相同 $(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 A 与 B 正交。

若 $r_{ij}=a_{ij}b_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 n 阶方阵 $R=(r_{ij})_{n\times n}$ 为 A、B 的内积，记作 $R=[AB]$.

定理 设数组 $\alpha:a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为确定的正整数，数组 $\beta:b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为方程组

$$(1)\quad\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}=K & (i=1,2,\cdots,n)\\ \sum\limits_{j=1}^{n}a_{ji}b_{ji}=K & (i=1,2,\cdots,n)\\ \sum\limits_{j=1}^{n}a_{jj}b_{jj}=K & \\ \sum\limits_{j=1}^{n}a_{j,(n-j+1)}b_{j,(n-j+1)}=K & \end{cases}$$

(其中 K 为正常数)的一组非负整数解，A，B 分别为 α，β 的 n 阶对角拉丁方，且 A 与 B 正交。则存在正整数 x，使得 n 阶方阵

$$C=xA+[AB]$$

成为 n 阶双重幻方。

证 对于任意正整数 x，因为 $C=xA+[AB]$，若设 $C=(c_{ij})_{n\times n}$，则 $c_{ij}=a_{ij}(x+b_{ij})$，$(i,j=1,2,\cdots,n)$. 不难验证，矩阵 C 的每行、每列以及两对角线的各元素之积都等于

$$a_1a_2\cdots a_n(x+b_1)(x+b_2)\cdots(x+b_n)$$

下面证明 C 的每行、每列以及两对角线的各元素之和都相等。

因为对角拉丁方 A 的每行、每列以及两对角线的元素都是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一个排列，若设

$$\sum_{j=1}^{n}a_j=L$$

则有

$$(2)\quad\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}=L & (i=1,2,\cdots,n)\\ \sum\limits_{j=1}^{n}a_{ji}=L & (i=1,2,\cdots,n)\\ \sum\limits_{j=1}^{n}a_{jj}=L & \\ \sum\limits_{j=1}^{n}a_{j,(n-j+1)}=L & \end{cases}$$

将(2)的第 p 个方程 $(1\leqslant p\leqslant 2n+2)$ 两端分别乘上 x 后与(1)的第 p 个方程两端相加，得

$$
(3)\quad \begin{cases}
x\sum_{j=1}^{n} a_{ij} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} = xL + K & (i = 1,2,\cdots,n) \\
x\sum_{j=1}^{n} a_{ji} + \sum_{j=1}^{n} a_{ji}b_{ji} = xL + K & (i = 1,2,\cdots,n) \\
x\sum_{j=1}^{n} a_{jj} + \sum_{j=1}^{n} a_{jj}b_{jj} = xL + K \\
x\sum_{j=1}^{n} a_{j,(n-j+1)} + \sum_{j=1}^{n} a_{j,(n-j+1)}b_{j,(n-j-1)} = xL + K
\end{cases}
$$

(3) 式表明 C 的每行、每列以及两对角线的各元素之和分别都等于 $xL+K$ 这个常数。

下面证明，存在正整数 x，使得矩阵 C 的 n^2 个元素互不相同，从而 C 为 n 阶双重幻方。

假设当 $x = x_1 (> 0)$ 时，C 的两个不在同一位置的元素 c_{ij} 和 c_{st} 相等，即 $c_{ij} = c_{st}$，$(1 \leqslant i,j,s,t \leqslant n)$，其中 $i \neq s$ 或 $j \neq t$. 则

$$x_1 a_{ij} + a_{ij}b_{ij} = x_1 a_{st} + a_{st}b_{st} \tag{4}$$

即
$$a_{ij}(x_1 + b_{ij}) = a_{st}(x_1 + b_{st}) \tag{5}$$

因为 A、B 正交，则二维数组 (a_{ij}, b_{ij}) 与 (a_{st}, b_{st}) 不相同，即 $a_{ij} \neq a_{st}$ 或 $b_{ij} \neq b_{st}$.

若 $a_{ij} \neq a_{st}$，由 (5) 式知 $x_1 + b_{ij} \neq x_1 + b_{st}$. 即 $b_{ij} \neq b_{st}$. 同理，若 $b_{ij} \neq b_{st}$，则 $a_{ij} \neq a_{st}$.

总之，当 A、B 正交，而 $c_{ij} = c_{st}$ 时，有 $a_{ij} \neq a_{st}$. 设 $y > 0$，则

$$ya_{ij} \neq ya_{st} \tag{6}$$

(4) 式与 (6) 式相加，有

$$a_{ij}(x_1 + y + b_{ij}) \neq a_{st}(x_1 + y + b_{st})$$

令 $x = x_1 + y (> x_1)$，则　　$a_{ij}(x + b_{ij}) \neq a_{st}(x + b_{st})$

上述论证表明，当取 $x = x_1$ 时，若 C 中有两个元素相等，只要将 x 增大，这两个元素就再也不会相等了。

在用式 $C = xA + [AB]$ 计算 C 时，总可以先取 $x = 1$，如果这时 C 中有两个元素相等，就将 x 增加 1，那么这两个元素就不相等了。若这时又有另两个元素相等，再把 x 增加 1，那么前面两对元素都不相等了。以后每次把 x 加 1 时，若 C 有相等元素出现，就把 x 再加 1. 这样以前相等的元素就再也不会相等了。而 n 阶方阵 C 只有 n^2 个元素，最多有 $\binom{n^2}{2}$ 个数对，因此最多重复上述手续 $\binom{n^2}{2}$ 次，就能使 C 的 n^2 个元素互不相等。

所以至少存在一个不超过 $\binom{n^2}{2} + 1$ 的正整数 x，使 $C = xA + [AB]$ 为 n 阶双重幻方。证毕。

在实际构造幻方时，一般 x 不会取到 $\binom{n^2}{2} + 1$ 这么大，而是比它小得多。

2 双重幻方的构造与实例

综上所述，构造 n 阶双重幻方的步骤如下：

2.1 构造数组 $\alpha: a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的对角拉丁方 A.（参看[7]）.

2.2 构造数组 $\beta: b_1, b_2, \cdots, b_n$ 的对角拉丁方 B，使 B 与 A 正交。（参看[7]）.

2.3 取 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为一组互不相等的确定的正整数，代入方程组(1)，求出(1)的一组互不相等的非负整数解 $b_1, b_2, \cdots, b_n$.

2.4 确定一正整数 z，使 $C = zA + [AB]$ 的 n^2 个元素互不相等。

由本文的定理知，C 就是一个 n 阶双重幻方。

以上四步，每一步都有一定的技巧。由[2]中关于正交拉丁方的理论知，若 p 是素数，a 是正整数，则存在 p^a 阶的正交拉丁方。但是不一定存在任意阶的正交拉丁方。所以对任意的 n，第2步不一定能执行下去。这样，编制双重幻方并非易事，而编制高质量的双重幻方就更难。

实例：编制64阶双重幻方

$n = 64$，给定数组 $\alpha = (1,2,3,\cdots,32,34,35,36,\cdots,65)$，构造的 α 的对角拉丁方 A 是附件中的 A 矩阵。不难验证，数组 $\beta = (0,6,12,\cdots,186,2,8,14,\cdots,188)$ 是方程组(1)的一组解。构造的 β 的对角拉丁方 B 如附件中的 B 矩阵。不难验证 B 与 A 正交。

然后取 $z = 4613$ 就能使 C 的各元素互不相等。这样就得出了一个幻和为 $s = 9941184$ 的64阶双重幻方。见附件中的 C 矩阵。

本文的矩阵A，B和C(即64阶双重幻方表)因篇幅较长，未刊登。

参 考 文 献

1 C.L.Liu 著，魏万迪译.《组合数学导论》

2 卢开澄.组合数学，上册.清华大学出版社，1983

3 W.W.Horner. Addition-Multiplication Magic Square of Orde Eight. ScriptaMathematica, 1955. p23

4 W.W.Horner. Addition-Multiplication Magic Squares. Recreational Mathématica, 1956, p300

5 梁培基.双重幻方.数学研究与评论，1982，(2)：14

6 章长才.8阶及16阶纵横图的编制.重庆建筑工程学院学报，1989，11(3)：60

7 章长才.2^m 阶双重纵横图的编制及矩阵表示法.重庆建筑工程学院学报，1991，13(2)：60

(编辑：姚国安)

THE CONSTRUCTION OF TWOFOLD MAGIC SQUARE OF ORDER n

Zhou Yinliang

(Dept. of Natural Science)

ABSTRACT This paper presents the sufficient condition for a square matrix of order n to the twofold magic square, with which the twofold magic square of order 64 is constructed. It is tested by the computer.

KEY WORDS magic square, twofold magic square, orthogonal Latin square, diagonal Latin square