13



89-92

# 双重幻方的一个充分条件*

章长才
(~~基础科学系~~)

O157.2

A

**摘　要**　本文用 1,2,3,…$n$($n$=8,16,32)这 $n$ 个自然数构造出一个数表为双重幻方的一个必要条件,且证明了表中的 $x>n(n+1)$ 及该数为双重幻方的一个充分条件。

**关键词**　双重幻方,幻方

充分条件

**中图法分类号**　O157

双重幻方的定义:双重幻方即满足下列三个条件的一个正方表:① 表中是不同的正整数,② 表中各行各列及两条对角线上的和均相等,③ 表中各行各列及两条对角线上的积均相等。

由于双重幻方编制的难度较大。目前国内外也都只对特殊的几个阶数的双重幻方进行编制,且理论上也很不深入。本文的主要任务是给出编制双重幻方的一个充分条件,从而大大地减少了编制双重幻方的工作量。本文只对 $n=8$ 的情形进行论证,对于 $n=16$、32,… 的情形论证方法完全一样。

为编制八阶双重幻方,先编制表 1.

表 1

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1(x+6)$ | $4(x+4)$ | $7(x+2)$ | $6(x+0)$ | $2(x+3)$ | $3(x+1)$ | $8(x+7)$ | $5(x+5)$ |
| $2(x+1)$ | $3(x+3)$ | $8(x+5)$ | $5(x+7)$ | $1(x+4)$ | $4(x+6)$ | $7(x+0)$ | $6(x+2)$ |
| $8(x+4)$ | $5(x+6)$ | $2(x+0)$ | $3(x+2)$ | $7(x+1)$ | $6(x+3)$ | $1(x+5)$ | $4(x+7)$ |
| $7(x+3)$ | $6(x+1)$ | $1(x+7)$ | $4(x+5)$ | $8(x+6)$ | $5(x+4)$ | $2(x+2)$ | $3(x+0)$ |
| $6(x+7)$ | $7(x+5)$ | $4(x+3)$ | $1(x+1)$ | $5(x+2)$ | $8(x+0)$ | $3(x+6)$ | $2(x+4)$ |
| $5(x+0)$ | $8(x+2)$ | $3(x+4)$ | $2(x+6)$ | $6(x+5)$ | $7(x+7)$ | $4(x+1)$ | $1(x+3)$ |
| $3(x+5)$ | $2(x+7)$ | $5(x+1)$ | $8(x+3)$ | $4(x+0)$ | $1(x+2)$ | $6(x+4)$ | $7(x+6)$ |
| $4(x+2)$ | $1(x+0)$ | $6(x+6)$ | $7(x+4)$ | $3(x+7)$ | $2(x+5)$ | $5(x+3)$ | $8(x+1)$ |

表 1 对任意的正整数 $x$,易验满足定义中的条件 ②,③,和为 $36x+126$. 积为 $1\cdot2\cdot3\cdots8x(x+1)\cdots(x+7)$. 但不一定满足定义中的条件 ①. 如 $x=1$ 时,表 1 中的第一行第四列的数等于第一行第六列的数 6. 即对每个 $x$ 代入表 1 后,必须检查是否有重复数字。这对

* 收稿日期:1993-04-02
章长才,男,1937 年生,副教授,重庆建筑工程学院(630045)

编制高阶双重幻方来说，检查工作量太大。如果能给出$x$的取值范围，保证表1中不再有重复数字，即满足定理中的条件 ①，这不仅是在编制方法上的一大进步，在理论上也是一个飞跃。

**定理**　表1中的$x$构成的幻方的充分条件是$x > 7 \times 8$.

**证明**　设表1中$y_i = k_i x + b_i$、$y_j = k_j x + b_j$是任意两个位置上的数。显然$y_i = k_i x + b_i$，$y_j = k_j x + b_j$各表示一条直线。① 当$k_i = k_j$时，由表1可知$b_i \neq b_j$，即两直线平行，$y_i \neq y_j$. ② 当$k_i \neq k_j$时，两直线必有一个交点，设$y_i = y_j$，即$k_i x + b_i = k_j x + b_j$，得$x = \dfrac{b_j - b_i}{k_j - b_j}$，由于$0 \leqslant b_i, b_j \leqslant 8 \times 7$，$|b_i - b_j| \leqslant 8 \times 7$，$|k_i - k_j| \geqslant 1$，

$$\therefore \quad x \leqslant 8 \times 7$$

即$x > 8 \times 7$时，$y_i \neq y_j$，即表1中再不会有重复和数字，即对任意的$x > 8 \times 7$，表1均表示一个双重幻方。定理证毕。

令 = 57，我们得下面的一个八阶双重幻方。

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 63 | 244 | 413 | 342 | 120 | 174 | 512 | 310 |
| 116 | 180 | 496 | 320 | 61 | 252 | 399 | 354 |
| 488 | 315 | 114 | 177 | 406 | 360 | 62 | 256 |
| 420 | 348 | 64 | 248 | 504 | 305 | 118 | 171 |
| 384 | 434 | 240 | 58 | 295 | 456 | 189 | 122 |
| 285 | 472 | 183 | 126 | 372 | 448 | 232 | 60 |
| 186 | 128 | 290 | 480 | 228 | 59 | 366 | 441 |
| 236 | 57 | 378 | 427 | 192 | 124 | 300 | 464 |

为了便于对高阶双重幻方进行研究，把表1写成矩阵的形式，设$\underset{(8)}{A} =$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&4&7&6&2&3&8&5\\2&3&8&5&1&4&7&6\\8&5&2&3&7&6&1&4\\7&6&1&4&8&5&2&3\\ \hdashline 6&7&4&1&5&8&3&2\\5&8&3&2&6&7&4&1\\3&2&5&8&4&1&6&7\\4&1&6&7&3&2&5&8\end{array}\right] = \begin{bmatrix}A_1 & A_3\\ A_2 & A_4\end{bmatrix},\quad \underset{(8)}{B} = \left[\begin{array}{cc:cc:cc:cc}6&4&2&0&3&1&7&5\\1&3&5&7&4&6&0&2\\4&6&0&2&1&3&5&7\\3&1&7&5&6&4&2&0\\ \hdashline 7&5&3&1&2&0&6&4\\0&2&4&6&5&7&1&3\\5&7&1&3&0&2&4&6\\2&0&6&4&7&5&3&1\end{array}\right] =$$

$$\begin{bmatrix}\underset{(8)}{B_1} & \underset{(8)}{B_2} & \underset{(8)}{B_3} & \underset{(8)}{B_4}\\ \underset{(8)}{B_4} & \underset{(8)}{B_3} & \underset{(8)}{B_2} & \underset{(8)}{B_1}\end{bmatrix}，设\underset{(n)}{X} = \begin{bmatrix}x & x & \cdots & x\\ x & x & \cdots & x\\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ x & x & \cdots & x\end{bmatrix}_{n\times n}$$

$A = (a_{ij})_{n\times n}$，$B = (b_{ij})_{n\times n}$，定义：$A \cdot B = (a_{ij}b_{ij})_{n\times n}$ 叫 $A$、$B$ 的点乘。于是8阶双重幻方的必要条件可以写成 $A \cdot \left[\underset{(8)}{X} + \underset{(8)}{B}\right]$—— 表1.

下面以16阶为例研究必要条件的找法。由8阶的矩阵形式可知，关键在于找出 $\underset{(16)}{A}$，$\underset{(16)}{B}$。

① 作 $\underset{(16)}{B}$

记 $L(8,0) = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{8\times 4}$，作 $\underset{(16)}{B_1} = \begin{bmatrix} \underset{(8)}{B_1} & \underset{(8)}{B_2} \\ \underset{(8)}{B_2} & \underset{(8)}{B_1} \end{bmatrix} + L(8,0)$，$\underset{(16)}{B_4} = \begin{bmatrix} \underset{(8)}{B_4} & \underset{(8)}{B_3} \\ \underset{(8)}{B_3} & \underset{(8)}{B_4} \end{bmatrix} + L(8,0)$，$\underset{(16)}{B_2} = E(1,8)E(2,7)E(3,6)E(4,5)\underset{(16)}{B_4}$，$\underset{(16)}{B_3} = E(1,8)E(2,7)E(3,6)E(4,5)\underset{(16)}{B_1}$，作 $\underset{(16)}{B} = \begin{bmatrix} \underset{(16)}{B_1} & \underset{(16)}{B_2} & \underset{(16)}{B_3} & \underset{(16)}{B_4} \\ \underset{(16)}{B_1} & \underset{(16)}{B_3} & \underset{(16)}{B_2} & \underset{(16)}{B_1} \end{bmatrix}$，（其中 $E(i,j)$ 是初等方阵）。② 作 $\underset{(16)}{A}$

设 $h_i = \begin{bmatrix} 4i-3 & 4i \\ 4i-2 & 4i-1 \end{bmatrix}$，$i = 1,2$，作 $A_{11} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2E(1,2) & h_1(E(1,2) \end{bmatrix}$，设 $g_i = \begin{bmatrix} 4i+7 & 4i+6 \\ 4i+8 & 4i+5 \end{bmatrix}$，$i = 1,2$，作 $A_{12} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_1E(1,2) & g_2(E(1,2) \end{bmatrix}$，设 $[C_1 \quad C_2] = E(1,2)E(3,4)A_{12}$，$[D_1 \quad D_2] = E(1,2)E(3,4)A_{11}$，其中 $C_i$ $D_i$ 均为2列矩阵。作 $A_{21} = [C_2 \quad C_1]$，$A_{22} = [D_2 \quad D_1]$，$A_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$，$A_2 = A_1E(1,8)E(2,7)E(3,6)E(4,5)$，$\begin{bmatrix} A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = E(1,2)E(3,4)E(5,6)\cdots E(15,16)\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$。

作 $\underset{(16)}{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{bmatrix}$。

作 $\underset{(16)}{A} \cdot \left[\underset{(16)}{X} + \underset{(16)}{B}\right]$——表2，表2为16阶双重幻方的一个必要条件，和为 $136x + 1020$，积为 $16!x(x+1)(x+2)\cdots(x+17)$。同理可证 $x > 16 \times 15$ 及表2为16阶双重幻方的一个充分条件。（注 $x > 16 \times 15$ 不是必要条件）。

令 $x = 200$，得下面一个16阶双重幻方

| ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ | ⑦ | ⑧ | ⑨ | ⑩ | ⑪ | ⑫ | ⑬ | ⑭ | ⑮ | ⑯ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 214 | 848 | 1050 | 1664 | 3090 | 2856 | 2222 | 2000 | 414 | 615 | 1218 | 1407 | 3440 | 2769 | 2532 | 1881 |
| 402 | 609 | 1230 | 1449 | 3344 | 2743 | 2556 | 1935 | 208 | 840 | 1060 | 1712 | 3000 | 2828 | 2244 | 2060 |
| 1696 | 1070 | 832 | 210 | 2040 | 2266 | 2800 | 3030 | 1435 | 1242 | 603 | 406 | 1917 | 2580 | 2717 | 3376 |
| 1421 | 1206 | 621 | 410 | 1899 | 2508 | 2795 | 3408 | 1680 | 1040 | 856 | 212 | 2020 | 2200 | 2884 | 3060 |
| 2520 | 1872 | 3424 | 2756 | 1212 | 1400 | 412 | 612 | 2233 | 2010 | 3105 | 2870 | 1055 | 1672 | 215 | 852 |
| 2255 | 2070 | 3015 | 2842 | 1065 | 1720 | 209 | 844 | 2544 | 1926 | 3328 | 2730 | 1224 | 1442 | 400 | 606 |
| 2704 | 3360 | 1908 | 2568 | 600 | 404 | 1428 | 1236 | 2814 | 3045 | 2050 | 2277 | 836 | 211 | 1704 | 1075 |
| 2898 | 3075 | 2030 | 2211 | 860 | 213 | 1688 | 1045 | 2782 | 3392 | 1890 | 2496 | 618 | 408 | 1414 | 1200 |
| 2150 | 2343 | 2954 | 3135 | 1656 | 1025 | 812 | 201 | 1854 | 2448 | 2626 | 3200 | 1498 | 1272 | 630 | 416 |
| 1800 | 2424 | 2652 | 3296 | 1456 | 1260 | 636 | 428 | 2090 | 2321 | 2982 | 3225 | 1608 | 1015 | 820 | 207 |
| 3195 | 3010 | 2299 | 2110 | 205 | 828 | 1005 | 1624 | 3264 | 2678 | 2400 | 1818 | 424 | 642 | 1248 | 1470 |
| 3232 | 2600 | 2472 | 1836 | 420 | 624 | 1284 | 1484 | 3165 | 2926 | 2365 | 2130 | 203 | 804 | 1035 | 1640 |
| 633 | 418 | 1505 | 1278 | 2639 | 3216 | 1863 | 2460 | 808 | 200 | 1648 | 1020 | 2940 | 3120 | 2140 | 2332 |
| 816 | 206 | 1600 | 1010 | 2968 | 3210 | 2080 | 2310 | 639 | 430 | 1463 | 1266 | 2665 | 3312 | 1809 | 2436 |
| 1254 | 1477 | 426 | 645 | 2412 | 1827 | 3280 | 2691 | 1000 | 1616 | 204 | 824 | 2288 | 2100 | 3180 | 2996 |
| 1030 | 1632 | 202 | 800 | 2354 | 2120 | 3150 | 2912 | 1290 | 1491 | 422 | 627 | 2484 | 1845 | 3248 | 2613 |

其和为 28220,其积为 $16\times200\times201\times\cdots\times215$.

类似要以对 32 阶双重幻方进行研究,有同样的结论(本文略)。

## 参 考 文 献


1 攀上"世界之最"的人梯.中国青年报,1987,1,9

2 梁培基著.双料幻方.数学研究与评论,1982 年,第二期

3 章长才著.八阶及十六阶双重纵横图的编制.重庆建工学院学报,1989 年,第 3 期


(编辑:姚国安)

# A SUFFICIENT CONDITION OF TWOFOLD MAGIC SQUARE


*Zhang Changcai*

(Dept. of Natural Science)



**ABSTRACT** This paper uses n nature numbers from 1 to n to form a numerical table of twofold magic square's necessary condition. It also proves that $x>n(n-1)$ and the numerical table is the sufficient condition of the basic solution.



**KEY WORDS** twofold magic square, magic square