(7) 边界积分方程，边值 多重互反法

第17卷 第1期 重庆建筑工程学院学报 Vol. 17 No. 1
1995年3月 J. Chongqing Inst. of Archit & Engin. Mar. 1995
边界元法

43—48

求解三维 Helmholtz 方程外边值问题的一种新的边界积分方程法*

金朝嵩
(基础科学系)

O175.5

A **摘 要** 本文应用多重互反法(the multiple reciprocity method)给出了求解三维 Helmholtz 外边值问题的一种新的边界积分方程法。首先，在限制解在无穷远处性态的 Dirichlet 条件下，导出了解在外区域及边界上的积分表达式，其特点在于积分核是由 Laplace 方程的常规基本解衍生出来的无穷级数且与波数无关。在此基础上，对 Dirichlet 问题和 Neumann 问题导出了边界积分方程，并对数值求解这些方程所涉及的一些问题进行了评述。最后，总结了这一方法与传统边界元法相比较所具有的优点。

关键词 Helmholtz 方程的边值问题，边界积分方程，边界元法，多重互反法

中图法分类号 O175.5

研究求解 Helmholtz 方程各类边值问题的数值方法，近几十年来一直是一个热点课题。这是因为这类问题在多种技术领域的研究中，例如涉及声学、流体力学及无线电电子学的技术领域的研究中，是很好的数学模型。边界元法问世以来，将这些问题化归成各种各样的边界积分方程以求数值解，已有很多有效的方法[1][2]。但是，关于三维问题，不论是用直接法或间接法(位势法)，化归的边界积分方程不论是第一类或第二类 Fredholm 方程，传统上出发点都只有一个，那就是 Helmholtz 解表达式，它是以 Helmholtz 方程的一个含有因子 exp(ikr) 的基本解为基础导出的。因此，复数的运算不可避免，而且当波数 K 很大时，为了达到要求的精度，计算数值积分时往往要求网格划分特别精细。另外，对于波数 K 的每一个值，所有数值积分都要计算一次。这些都使计算工作显得相当繁复。最后，V. Sladek，J. Sladek 和 Tanaka 在文献[3]中，将 Nowak 和 Brebbia 提出的多重互反法[4]用于研究三维 Helmholtz 方程的齐次内边值问题，其目的是进行特征值分析。应该说这是一种新思维。

但很多实际问题，例如声波探測及无线电通讯技术中遇到的问题，可以归结成声波或电磁波的散射问题。这些纯粹是 Helmholtz 方程的外边值问题，与内问题毫无关系。有时为了化归边界积分方程的需要将它与内问题联系起来，不但显得不自然，还会带来破坏解的唯一性的弊病[5]。因此，本文将文献[3]的思想拓展到三维 Helmholtz 外问题的研究中。由于外问题没有特征值，本文着眼于边值问题的研究。首先，在限制解在无穷远处性态的 Dirichlet 条件

---

* 收稿日期：1994-04-30

金朝嵩，男，1943 年生，教授，重庆建筑大学基础科学系(630045)。

下，给出并证明了解在外区域及边界上的积分表达式，其特点在于积分核是由 Laplace 方程的常规基本解衍生出来的无穷级数且与波数 K 无关。在此基础上，对 Dirichlet 问题和 Neumann 问题导出了边界积分方程并对数值求解这些方程所涉及的一些问题进行了评述。最后，总结了这一方法与传统的边界元法相比较所具有的优点。数值试验结果将在另文给出。

1 解的边界积分表达式

设 Ω 是三维 Euclid 空间中的有界开区域，Γ 是其充分光滑的边界，Ω' 是 $\bar{\Omega}$ 的余集。用 n 表 Γ 的外法向量，r 表空间任意一点到原点距离。在 Ω' 中考虑 *Helmholtz* 方程的解，即求数值函数 u，使得

$$\triangle u + K^2 u = 0, \text{在 } \Omega' \text{ 中} \tag{1}$$

其中 K 是波数，可取任意复数。

由于 Ω' 是无界域，为了保证方程(1)有解，需要限制 u 在无穷远处的性态。传统上规定 u 满足下列 Sommerfeld 辐射条件：

$$\lim_{r\to\infty} u\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0$$

这是为了使方程(1)的解能用下列 *Helmholtz* 解表达式来表示[6]：

$$u(y) = \int_\Gamma \left[\frac{\partial u(x)}{\partial n} G(|x-y|) - u(x)\frac{\partial}{\partial n}G(|x-y|)\right] d_0 x, \quad y \in \Omega'$$

其中，$G(|x-y|) = \frac{1}{4\pi|x-y|}e^{ik|x-y|}$ 是 *Helmholtz* 方程的一个基本解，$d_0 x$ 表面积元素。

但要导出方程(1)新的解表达式，规定 u 满足下列较弱的 Dirichlet 条件：

$$\left.\begin{aligned} |u(x)| &= 0\left(\frac{1}{|x|}\right), \\ |\nabla u(x)| &= 0\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \end{aligned}\right. \quad \text{当 } |x| \text{ 充分大} \tag{2}$$

引入下列函数序列：

$$u^*_{(\alpha)}(r) = \frac{1}{4\pi}\frac{r^{2\alpha-1}}{(2\alpha)!}, \quad \alpha = 0,1,2,\cdots$$

容易验证。

$$\triangle u^*_{(\alpha+1)} = u^*_{(\alpha)}, \quad \triangle u^*_{(0)} = -\delta(r)$$

后一式表明 $u^*_{(0)}$ 是 Laplace 方程的一个基本解。

先证明一个引理，证明方法参考了文献[7]。

引理　设 $u \in C^2(\Omega') \cap C^1(\overline{\Omega'})$ 且满足条件(2)，则有

$$\int_\Gamma \left[u^*_{(0)}(|x-y|)\frac{\partial u}{\partial n} - u(x)\frac{\partial}{\partial n}u^*_{(0)}(|x-y|)\right] d_0 x - \int_{\Omega'} u^*_{(0)}(|x-y|)\triangle u(x) dx$$

$$=\begin{cases} u(y), & y \in \Omega' \\ 0, & y \in \Omega \end{cases} \tag{3}$$

证明　当 $y \in \Omega'$，以 y 为心作一个半径为 ε 的球形区域 B_ε，另外以原点为心作一个半径为 R 的球形区域 B_R，使 B_R 包含 Ω 和 B_ε。将 $B_R \cap \Omega'$ 除去 B_ε 的区域记为 Ω^*，在 Ω^* 中对 $u_{(0)}^*$ 及 u 使用 Green 第二公式，有

$$\int_{\Omega^*} (u_{(0)}^* \triangle u - u \triangle u_{(0)}^*) dx = \int_{\Gamma+\partial B_R+\partial B_\varepsilon} \left(u_{(0)}^* \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u_{(0)}^*}{\partial n} \right) d_0 x$$

注意到在 Ω^* 中，$\triangle u_{(0)}^*(|x-y|) = 0$。由于

$$\int_{\partial B_\varepsilon} u \frac{\partial u_{(0)}^*}{\partial n} d_0 x = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon} u(x) d_0 x = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \cdot 4\pi\varepsilon^2 \cdot \bar{u} = \bar{u},$$

$$\int_{\partial B_\varepsilon} u_{(0)}^* \frac{\partial u}{\partial n} d_0 x = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} d_0 x = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot 4\pi\varepsilon^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = \varepsilon \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$$

其中 $\bar{u}$、$\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$ 分别是 u 及 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 在 ∂B_ε 上的平均值，故

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial B_\varepsilon} u \frac{\partial u_{(0)}^*}{\partial n} d_0 x = u(y) \\ &\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial B_\varepsilon} u_{(0)}^* \frac{\partial u}{\partial n} d_0 x = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

于是，当 $\varepsilon \to 0$ 有

$$\int_{B_R \cap \Omega'} u_{(0)}^* \triangle u dx = -u(y) + \int_{\Gamma+\partial B_R} \left(u_{(0)}^* \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u_{(0)}^*}{\partial n} \right) d_0 x$$

当 R 充分大，例如 $R > 2|y|$ 时，由于在球面 ∂B_R 上，有 $|x| = R$，故

$$|x-y| \geqslant |x| - |y| > \frac{R}{2}$$

由于 u 满足条件(2)，当 R 充分大，总存在正数 M，使得

$$|u(x)| < \frac{M}{R}, |\nabla u(x)| < \frac{M}{R^2}$$

于是

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\partial B_R} u(x) \frac{\partial}{\partial n} u_{(0)}^*(|x-y|) d_0 x \right| \\ &\leqslant \frac{M}{4\pi R} \left| \int_{\partial B_R} (\nabla |x-y|)^{-1} \cdot n) d_0 x \right| \\ &\leqslant \frac{M}{4\pi R} \int_{\partial B_R} \frac{d_0 x}{|x-y|^2} < \frac{M}{4\pi R} \cdot \frac{4}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{4M}{R} \end{aligned}$$

$$\left|\int_{\partial B_R} u^*_{(0)}(|x-y|)\frac{\partial u(x)}{\partial n}d_0x\right| < \frac{2}{4\pi R}\cdot\frac{M}{R^2}\cdot 4\pi R^2 = \frac{2M}{R}$$

令 $R\to\infty$，便得到

$$u(y) = \int_\Gamma\left[u^*_{(0)}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial u^*_{(0)}}{\partial n}\right]d_0x - \int_{\Omega'} u^*_{(0)}\triangle u dx$$

当 $y\in\Omega$，在区域 $B_R\cap\Omega'$ 上对 $u^*_{(0)}$ 及 u 使用 Green 第二公式，再令 $R\to\infty$，即可得到式(3) 的结果。

引理证毕。

现设 u 满足引理条件且是方程(1) 的解，则有

$$\int_{\Omega'}(\triangle u + k^2u)u^*_{(0)}dx = 0 \tag{5}$$

当 $y\in\Omega'$，据式(3) 及(5)，有

$$u(y) = \int_\Gamma\left[\frac{\partial u(x)}{\partial n}u^*_{(0)}(|x-y|) - u(x)q^*_{(0)}(x,y)d_0x\right.$$
$$+ K^2\int_{\Omega'}u(x)u^*_{(0)}(|x-y|)dx \tag{6}$$

这里 $q^*_{(a)}(x-y) = \dfrac{2a-1}{4\pi(2a)!}r^{2(a-1)}r_{,k}n_k(x),\ a = 0,1,2,\cdots$

其中 $r_{,k} = \dfrac{r_k}{r},\quad r_k = x_k - y_k,\quad r = \sqrt{r_kr_k},\quad k = 1,2,3$

且显然有

$$q^*_{(a)}(x,y) = \frac{\partial}{\partial n(x)}u^*_{(a)}(|x-y|)$$

又：据 Green 第二公式及函数 $u^*_{(a)}$ 的前述性质，有

$$\int_{\Omega'}u(x)u^*_{(a)}(|x-y|)dx = \int_{\Omega'}u(x)\triangle u^*_{(a+1)}(|x-y|)dx$$
$$=\int_\Gamma\left[u\frac{\partial}{\partial n}u^*_{(a+1)} - u^*_{(a+1)}\frac{\partial u}{\partial n}\right]d_0x + \int_\Omega u^*_{(a+1)}\triangle u dx$$
$$=\int_\Gamma\left[uq^*_{(a+1)} - u^*_{(a+1)}\frac{\partial u}{\partial n}\right]d_0x - K^2\int_{\Omega'}uu^*_{(a+1)}dx \tag{7}$$

注：因 u 满足条件(2)，可认为在充分远处 $|u|$ 小得可忽略不计，这样 Green 第二公式在 Ω' 上仍成立。

引入记号

$$I_{(a)} = \int_{\Omega'}u(a)u^*_{(a)}(|x-y|)dx$$

$$E_{(a)} = \int_\Gamma\left[u(a)q^*_{(a)}(x,y) - u^*_{(a)}(|x-y|)\frac{\partial u(x)}{\partial n}\right]d_0x$$

则(7)式可表示为

$$I_{(\alpha)} = E_{(\alpha+1)} + K^2 I_{(\alpha+1)}$$

据此递推公式，对任意自然数 n 就有

$$I_{(0)} = \sum_{\alpha=1}^{n} (-K^2)^{\alpha-1} E_{(\alpha)} + (-K^2)^n I_{(n)}$$

于是(6)式可写为

$$u(y) = -E_{(0)} + K^2 I_{(0)} = -\sum_{\alpha=0}^{n} (-K^2)^{\alpha} E_{(\alpha)} - (-K^2)^{n+1} I_{(n+1)}$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{n} (-K^2)^{\alpha} \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial u(x)}{\partial n} u^*_{(\alpha)}(|x-y|) - q^*_{(\alpha)}(x,y) u(x)\right] d_0 x + R_n(y)$$

其中

$$R_n(y) = -(-K^2)^{n+1} \int_{\Omega'} u(x) u^*_{(n)}(|x-y|) dx$$

现在来说明当 $n \to \infty$，$R_n(y) \to 0$。

以原点为心，l 为半径作球形区域 B_l。取 l 充分大，不但使 B_l 包含 Ω 及 y，而且由于 u 满足条件(2)，还使得在 B_l 以外的区域上 $|u|$ 小得可以忽略不计，即 $u \equiv 0$，于是

$$Rn(y) = -(-K^2)^{n+1} \int_{\Omega' \cap B_l} u(x) u^*_{(n)}(|x-y|) dx$$

$$|Rn(y)| \leqslant (K^2)^{n+1} \int_{\Omega' \cap B_l} |u| |u^*_{(n)}| dx \leqslant (K^2)^{n+1} \int_{B_l} |u| |u^*_{(n)}| dx$$

据文献[3]的附录，最后一个积分当 $n \to \infty$ 以零为极限，故当 $n \to \infty$，$Rn(y) \to 0$。

综上所述，证明了以下的定理：

定理 1　设 $u \in C^2(\Omega') \cap C^1(\overline{\Omega'})$ 满足条件(2)，且是方程(1)的解，则当 $y \in \Omega'$ 时，

$$u(y) = \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial u(x)}{\partial n} \hat{u}^*(|x-y|) - u(x) \hat{q}^*(x,y)\right] d_0 x \tag{8}$$

这里

$$\hat{u}^*(r) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} (-K^2)^{\alpha} u^*_{(\alpha)}(r) \tag{9}$$

$$\hat{q}^*(x,y) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} (-K^2)^{\alpha} q^*_{(\alpha)}(x,y) \tag{10}$$

下面的定理给出了边界量之间的关系。

定理 2　设 u 满足定理 1 的全部条件。当 $y \in \Gamma$，

$$\frac{1}{2} u(y) = \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial u(x)}{\partial n} \hat{u}^*(|x-y|) - u(x) \hat{q}^*(x,y)\right] d_0 x \tag{11}$$

证明　重复引理及定理 1 的证明，只是因 $y \in \Gamma$，在 Ω^* 中对 $u^*_{(0)}$ 及 u 使用 Green 第二公式后，注意到

$$\int_{\partial B_\varepsilon \cap \Omega'} u \frac{\partial u^*_{(0)}}{\partial n} d_0 x = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon \cap \Omega'} u(x) d_0 x = \frac{\theta(y)}{2\pi} \bar{u}$$

其中 $\bar{u}$ 是 u 在 $\partial B_\varepsilon \cap \Omega'$ 上的平均值，$\theta(y)$ 是曲面 Γ 在 y 点的两张切平面构成的二面角夹在 Ω' 中的部份。由于 Γ 是光滑的，故 $\theta(y) = \pi$，于是

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B_\varepsilon \cap \Omega'} u \frac{\partial u^*_{(0)}}{\partial n} d_0 x = \frac{1}{2} u(y)$$

以此代替式(4)即可推得定理的结论。

定理证毕。

2 边界积分方程的建立及求解

分别考虑下列 Helmholtz 方程的 Dirichlet 和 Neumann 外边值问题，即在条件(2)下求函数 u，使得

$$\begin{cases} \triangle u + K^2 u = 0, \text{在 } \Omega' \text{ 中} \\ u|_\Gamma = g \end{cases} \tag{12}$$

或

$$\begin{cases} \triangle u + K^2 u = 0, \text{在 } \Omega' \text{ 中} \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = h \end{cases} \tag{13}$$

其中，g 和 h 是已知函数。

关于问题(12)，据式(11)，有

$$\int_\Gamma \frac{\partial u(x)}{\partial n} \hat{u}^*(|x-y|) d_0 x = \frac{1}{2} g(y) + \int_\Gamma g(y) \hat{q}^*(x,y) d_0 x \tag{14}$$

这是一个以 $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma$ 为未知量的第一类 Fredholm 边界积分方程。解得 $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma$，连同 $u|_\Gamma = g$ 代入解的表达式(8)，即可得到问题(12)的解。

关于问题(13)，据式(11)，有

$$\frac{1}{2} u(y) + \int_\Gamma u(x) \hat{q}^*(x,y) d_0 x = \int_\Gamma h(x) \hat{u}^*(|x-y|) d_0 x \tag{15}$$

这是一个以 $u|_\Gamma$ 为未知量的第二类 Fredholm 边界积分方程。解得 $u|_\Gamma$ 后，连同 $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = h$ 代入解的表达式(8)，即得问题(13)的解。

对于混合边值问题，也可类似处理，不赘述。

数值求解边界积分方程(14)及(15)时，要计算积分核 $\hat{u}^*$ 及 $\hat{q}^*$，可选取适当自然数 n，以代替式(9)及(10)中的 ∞。注意到仅当 $a = 0$ 时，$q^*_{(0)}$ 才具有 r^{-2} 阶的奇异性，$u^*_{(0)}$ 只具有弱奇异性，其余的 $q^*_{(a)}$ 及 $u^*_{(a)}$ 均不具有奇异性，故可将 $q^*_{(0)}$ 从和式(10)中分离出来，用处理奇异积分方程的数值方法单独计算。用多项式近似表示密度函数和边界，在每个边界单元上即可用解线性方程组的程序算出未知量。与传统的以 Helmholtz 解表达式出发导出边界积分方程的方法相比较，本文提出的方法有下列明显的优点：

1) 完全不涉及复数运算；

2) 即使在波数 K 取各种不同数值时，所有需要计算的数值积分均可一次完成；

3) 不须再象传统方法那样，计算数值积分时，对大波数 K 要用特别精细的网格。

参 考 文 献

1 Kleinman R E. & Roach G F. Boundary integral equations for the three-dimensional Halmholtz equation. SIAM Rev. 1974, 16(2): 214～236

2 Nedlec J. C. Integral equations with non integrable kernels. Integral Equations and Operator Theory, 1982, 5: 562～572

3 Sladek V. and J. Tanaka M. Eigenvalue analysis of three-dimensional Helmholtz equation. Engineering Analysis with Boundary Elements, 1993, 11(2)

4 Nowak A. J. & Brebbia C. A. The multiple reciprocity method-A new approach for transforming BEM domain integrals to the boundary. Eng. Analysis, 1989, 6: 164～167

5 Jin C. A direct boundary integral equation method for the acoustic scattering problem Engineering Analysis with Boundary Elements, 1993, 12: 39～46

6 Sokolnikoff I. S. & Redheffer R. M. Mathematics of Physics and Modern Engineering. McGBAW-HILL BOOK COMPANY, INC. 1958

7 祝家麟. 椭圆边值问题的边界元分析. 科学出版社, 1991

（编辑：姚国安）

A NEW BOUNDARY INTEGRAL EQUATION METHOD FOR SOLVING EXTERIOR BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF THREE-DIMENSIONAL HELMHOLTZ EQUATION

Jin Chaosong

(Dept. of Natural Science)

ABSTRACT　This paper pressnts a new boundary integral equation method for solving exterior boundary value problems of three-dimensional Helmholtz equation by using the multiple reciprocity method. Firstly, integral representations of the solution in an exterior domain as well as on its boundary, which have the peculiarity that integral kernels are infinite serieses developed from the normal fundamental solution of Laplace equation and independent of the wavenumber, are given and proved under the Dirichlet condition. Then, based on the representation of the solution on the boundary, boundary integral equations for solving the Dirichlet and the Neumann boundary value problems are obtained, and remark.. for some problems concerned with solving these integral equations numerically are made. Finally, the advantages of the proposed method, as compared with the conventional boundary element methods, are summarized.

KEY WORDS　boundary value problems of Helmholtz equation, boundary integral equations, boundary element methods, multiple riciprocity method