(11) 微分算子级数法 广义积分 . 计算

第 18 卷 第 1 期
1996 年 3 月

重庆建筑大学学报
Journal of Chongqing Jianzhu University

Vol. 18 No. 1
Mar. 1996

研究简报

110—113

用微分算子级数法计算广义积分

柯 红 路
（应用泛系研究所）

O175.3

摘 要 介绍微分算子级数法计算广义积分的依据和实例。

关键词 广义积分，微分算子级数法

中图法分类号 O175.35

微分积分互为逆运算，计算积分的问题一般不能转换为微分运算、若能实现这种转换，则计算积分就变得十分简单。本文就介绍可以这样转换的积分及其计算实例。

1 广义积分和算子符号

能用微分法来计算的积分是无穷限广义积分，即如 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ $\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 型的积分，其中 $f(x)$ 在相应区域上连续且为指数型函数。所谓指数型函数就是可以写为，

$f(x)=g[e^{\varphi(x)}]$，式中 g，φ 均是函数记号。设 $D_t=\frac{\partial}{\partial t}$，$\frac{1}{D_t}=\int_0^t[\ ]\mathrm{d}t$，$D=\frac{\partial}{\partial x}$，

$\Delta=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}=\sum_{k=1}^{n}D_k^2$，$(k=1,\cdots,n)$ 称它们为算子。当 $\Delta=D^2$ 时，$\sum_{i=0}^{\infty}\Delta^i=\sum_{i=0}^{\infty}(D^2)^i$。称 $\sum_{k=1}^{\infty}D_k^2$，$\sum_{i=0}^{\infty}\Delta^i$，$\sum_{i=0}^{\infty}D^{2i}$ 等为微分算子级数。我们将用算子级数来计算无穷限广义积分。

2 计算公式

传导方程 Cauchy 问题：

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=0\ , & (t>0\ ,-\infty<x<+\infty) \\ u\,|_{t=0}=\varphi(x)\ , & (-\infty<x<+\infty) \end{cases}$$

一般情况是：

收稿日期：1994－09－23.

柯红路，男，1938 年生，副教授，重庆建筑大学应用泛系研究所，(630045).

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta u = 0 , & (t > 0 , -\infty < x_i < +\infty , i = 1 , \cdots , n) \\ u\mid_{t=0} = \varphi(x) , & (x \in R^n) \end{cases}$$

上述问题用 Fourier 变换可得解（称为 Poisson 公式）：

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \mathrm{d}\xi \tag{1}$$

另一方面，利用算子 D_t 和 Δ，热传导方程可写为

$$(D_t - a^2\Delta) u = 0 \quad ,$$

它的解是

$$u(x, t) = \frac{1}{D_t - a^2\Delta} \cdot 0 = \frac{1}{1 - \frac{a^2\Delta}{D_t}} \frac{1}{D_t} \cdot 0 = \frac{1}{1 - \frac{a^2\Delta}{D_t}} \cdot c(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^2\Delta^k}{K!} c(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k} t^k}{K!} \Delta^k c(x)$$

由此式及初值条件定出：　$u\mid_{t=0} = c(x) = \varphi(x)$

代回前式，得到热传导方程 Cauchy 问题的解又可以表示成：

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^{2i} t^i}{K!} \Delta^i \varphi(x) \tag{2}$$

（2）式即为上述问题的微分算子级数解。

由（1）（2）式得到无穷限广义积分计算公式：

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \mathrm{d}\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k} t^k}{K!} \Delta^k c(x) \tag{3}$$

（3）式就是函数的积分用微分法或微分算子级数来计算的公式。利用（3）式可以计算几个著名的积分如：Euler－Poisson 积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x$，Frensnel 积分 $\int_0^{+\infty} \cos x^2 \mathrm{d}x$ 或 $\int_0^{+\infty} \sin x^2 \mathrm{d}x$ 和 Laplace 积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cdot \cos bx \ \mathrm{d}x \ (a>0, b>0)$、…。

3　计算积分举例

例 1　计算 Euler－Poisson 积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x$。

解、显然 $f(x) = e^{-x^2}$ 属指数型。对照（3）式有 $2a\sqrt{t} = 1$，$x = 0$，$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$，$\varphi(x) = 1$ 及 $a^2 t = \frac{1}{4}$ 代入公式（3）显然积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a^2 t)^k}{K!} \Delta^k \cdot 1\right]$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k \cdot 1}{4^k K!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad . \qquad \left(\text{其中}\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} = D^2\right)$$

易知，此种计算方法比其它方法，如夹逼法计算简单、迅速。

例 2 计算 Laplace 积分 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\cos bx\ dx\ (\alpha>0)$

解，对照(3)式的左端，易知 $f(x)=e^{-\alpha x^2}\cos bx$ 属于指数型函数，且 $2a\sqrt{t}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$，

$a\sqrt{t}=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$，$x=0$，$\varphi(x)=\cos bx$，$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$，$a^2t=\frac{1}{4\alpha}$，

由(3)式积分

$$\int_0^{+\infty}\cos bx\, e^{-\alpha x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos bx\, e^{-\alpha x^2}dx\right]$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a^2t)^k}{K\,!}\Delta^k\cos bx\right]_{x=0}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k b^{2k}}{(4\alpha)^k K\,!}\cos bx\right]_{x=0}=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}e^{-\frac{b^2}{4\alpha}}$$

可见微分算子级数法计算的结果和其它计算方法完全一样，但计算却省事省时得多。

例 3 计算 Frensnel 积分 $\int_0^{+\infty}\cos x^2 dx$，$\int_0^{+\infty}\sin x^2 dx$.

解，考虑积分 $I=\int_0^{+\infty}e^{-ix^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(\cos x^2-i\sin x^2)dx$ 将 I 的右端和(3)左端的积分比较，显然 $f(x)=e^{-ix^2}$ 属指数型函数且在定义域内解析，易知 $4a^2t=\frac{1}{i}$，$a^2t=\frac{1}{4i}$

$$\varphi(x)=1,\ x=0,\ \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}=\sqrt{\frac{i}{\pi}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1+i)$$

故

$$I=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{i}}\left[\sqrt{\frac{i}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix^2}dx\right]=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{i}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{K\,!(4i)^k}\Delta^k\cdot 1\right]_{x=0}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{i}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1-i)$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\cos x^2\,dx=ReI=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

同理

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2\,dx=ImI=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

和 Frensnel 积分的残数计算方法比较即知用微分算子级数方法计算它的确简单、快速、准确，计算之巧定叫读者称“绝”。

仅此数例，不难发现用微分方法或微分算子级数法计算无穷型广义积分的概貌和它的快速、准确等优越性。

最后指出，微分算子级数算法的理论根据是参考文献[1]、[2]。

参 考 文 献

1 柯红路．一类可西问题的算级数解法．重庆建筑工程学院学报，1989，(3)

2 柯红路编．工程应用偏微分方程(工科研究生用)下册．重庆建工学院研究生处印，1986

3 复旦大学数学系主编．数学物理方程．上海科技出版社，1987

4 钟玉泉编．复变函数论　北京：高等教育出版社，1988

5 Г М 菲赫尔金哥尔兹著，吴亲仁等译．微积分学教程．第二卷第二分册．北京：人民教育出版社，1978

6 刘玉莲编　数学分析讲义(下)　北京：人民教育出版社，1982

(编辑：王秀玲)

CALCULATION OF GENERALIZED INTEGRALS USING DIFFERENTIAL OPERATOR SERIES METHOD

Ke Honglu

(Applied Pansystems Institute)

ABSTRACT This paper introduced computational basis and examples of generalized integrals using differential operator series method.

KEY WORDS generalized integral, differential operator series method.

(上接 70 页)

THE NEURAL NETWORK CONROL TECHNOLOGY USED IN HYDRAULIC LOGIC VALVE SYSTEM

Sun Xiaonan　*Sun Xiaosong*　*Xu Kelin*

(Chongqing Jiangzhu University)　(Chongqing University)　(Chongqing Jianzhu University)

ABSTRACT This paper is concerned with artifical neural network used in hydrauic logic valve control technique, the characters and structure of hydraulic logic valve, the main characters and topological construction of artifical neural network are analyzed in detail. The pre－feedback used in logic valve . is focused, the training method was derived and improved. Using this improved BP training method, the net work was traioed and satisfactory experiment results were gained.

KEY WORDS hydraulic logic valve, neural net work, control