广义向量最优化问题的 Mond-Weir 型对偶

P
49-55

李声杰
(重庆建筑大学基础科学系 400045)

O224

摘　要　对广义向量最优化问题建立了 Mond-Weir 型对偶，证明了原问题和对偶问题之间的弱对偶定理、直接对偶定理和逆对偶定理。

关键词　广义向量最优化问题，切导数，Mond-Weir 型对偶
中图法分类号　O224

对偶理论是向量最优化问题的重要组成部分，它在最优化问题的理论和应用中扮演着极其重要的角色。对可微问题，已获得了许多结果，如对非光滑对偶问题得到的一些结果[1-3]；应用次微分的概念，讨论了非可微凸的多目标规划问题的 Wolfe 型对偶[4]；应用 Dini 导数讨论了 Wolfe 型对偶问题[5]。本文应用 Aubin 引入的切导数，讨论了非可微向量最优化问题的对偶理论。证明了原问题与对偶问题之间存在弱对偶性、直接对偶性和逆对偶性。

1　切导数，拟内部导数和它们的关系

定义 1[6]　设 C 是 Banach 空间 X 的子集，$x_0 \in X$，则称集

$$T_C(x_0) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{\alpha,\beta > 0} \bigcap_{x \in B_C(x_0,\alpha);\ 0 \le h \le \beta} [(1/n)(C - x) + \varepsilon B)]$$

为 C 在点 x_0 的切锥，其中 $B_C(x_0,\alpha) = C \bigcap (x_0 + \alpha B)$，$B$ 是以原点为心的单位球。

显然有 $v \in T_C(x_0) \Leftrightarrow$ 对任意 $x_n \in X \to x_0$ 和 $h_n \to 0^+$，存在子序列 $x_{a(n)} \to x_0$，$h_{a(n)} \to 0^+$ 和序列 $v_n \to v$，使得

$$x_{a(n)} + h_{a(n)} V_n \in C$$

定义 2[7]　设 $F: X \to 2^Y$ 是集值映射，$(x_0, y_0) \in \mathrm{grapb}(F)$

1) 设 $DF(x_0, y_0): X \to 2^Y$ 是集值映射，$y \in DF(x_0, y_0)(x)$ 的充要条件 $(x, y) \in T_{\mathrm{graph}(F)}(x_0, y_0)$。称 $DF(x_0, y_0)$ 为 F 在 (x_0, y_0) 的切导数。

2) 设 $QF(x_0, y_0): X \to 2^Y$ 是集值映射，$y \in QF(x_0, y_0)(x)$ 的充要条件是对任意 y 的邻域 W，存在 x_0 的邻域 V，y_0 的邻域 U，实数 $\varepsilon > 0$ 和 x 的邻域 N，使得

$$[(v, u) + t([v'] \times W)] \bigcap \mathrm{graph}(F) \ne \emptyset$$

对任意 $(v, u) \in (V \times U) \bigcap \mathrm{graph}(F)$，$t \in]0, \varepsilon[$，$v' \in N$。

收稿日期：1996-10-08
李声杰．男，1962 年生，副教授

自然有:① $y \in DF(x_0,y_0)(x) \Leftrightarrow$ 对任意 $(v_n,u_n) \in \mathrm{graph}(F) \to (x_0,y_0)$, $h_n \to 0^+$, 存在子序列 $(v_{\alpha(n)},u_{\alpha(n)}) \to (x_0,y_0)$, $h_{\alpha(n)} \to 0^+$ 和序列 $y_n \to y$, $x_n \to x$, 使得

$$u_{\alpha(n)} + h_{\alpha(n)}y_n \in F(v_{\alpha(n)} + h_{\alpha(n)}x_n) \qquad \forall n \tag{1}$$

② $y \in QF(x_0,y_0)(x) \Leftrightarrow$ 对任意 $(v_n,u_n) \in \mathrm{graph}(F) \to (x_0,y_0)$, $h_n \to 0^+$, $x_n \to x$ 存在子序列 $(v_{\alpha(n)},u_{\alpha(n)}) \to (x_0,y_0)$, $h_{\alpha(n)} \to 0^+, x_{\alpha(n)} \to x$ 和序列 $y_n \to y$, 使得

$$u_{\alpha(n)} + h_{\alpha(n)}y_n \in F(v_{\alpha(n)} + h_{\alpha(n)}x_{\alpha(n)}) \qquad \forall n \tag{2}$$

为了讨论方便起见，不妨把式(1)、(2)中子序列记作它本身。

定义 3 如果存在 x_0 的邻域 W, 使得

$$F(x_1) \subset F(x_2) + M\|x_1 - x_2\|B \qquad \forall x_1,x_2 \in W$$

称 F 在点 x_0 是李普希兹连续的。

命题 1 设 F 在点 x_0 是李普希兹连续的, $y_0 \in F(x_0)$

则 $DF(x_0,y_0)(x) = QF(x_0,y_0)(x) \qquad \forall x \in X$

证: 由[7]命题 2.9，此结论显然成立。

2 广义向量优化问题的 Mond-Weir 对偶

设 X、Y、Z 都是 Banach 空间, K、D 分别是 Y 与 Z 中的点凸锥。

$F:X \to 2^Y$ 是集值映射, $G:X \to 2^Z$ 是集值映射。若 $A \subset X$, 记 $F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x)$。

由 K 在 Y 上引入的偏序如下:对任意 $y_1,y_2 \in Y$。

$$y_1 < y_2 \Leftrightarrow y_2 - y_1 \in \dot{K} \ (\dot{K} \text{ 表示 } K \text{ 的内部})$$

设 $B \subset Y, C \subset Y$ 规定

$$B - C \geqslant 0 \Leftrightarrow y_2 - y_1 \in K, \forall y_2 \in B, y_1 \in C$$

定义 4 设 $B \subset Y$, $y_0 \in B$, 如果不存在 $y \in B$, 使得 $y_0 < y$, 则称 y_0 是 B 的上弱有效点，记 B 的全体上弱有效点为 $\mathrm{Wmax}B$。如果不存在 $y \in B$, 使得 $y < y_0$, 则称 y_0 是 B 的下弱有效点，记 B 的全体下弱有效点为 $\mathrm{Wmin}B$。

用 Y^*、Z^* 分别表 $Y \to R$ 与 $Z \to R$ 的全体线性连续泛函。

$$K^+ = \{l \in Y^* \mid l(y) \geqslant 0, \forall y \in K\}$$

$$D^+ = \{\mu \in Z^* \mid \mu(z) \geqslant 0, \forall z \in D\}$$

考虑广义向量最优化问题:

$$(VP)\begin{cases}\min F(x) \\ G(x) \cap (-D) \neq \emptyset, x \in E\end{cases} \tag{3}$$

其中 E 是凸集。

设 $M = \{x \in E \mid G(x) \cap (-D) \neq \emptyset\}$, 上述问题就是找 $x_0 \in M$ 使得存在 $y_0 \in F(x_0)$, 满足 $y_0 \in \mathrm{Wmin}F(M)$。

它的对偶问题:

$$(DVP)\begin{cases}\max y_0 \\ \lambda DF_E(x_0,y_0)(v)+\mu DG_E(x_0,z_0)(v)\geqslant 0 \quad \forall v \\ \mu z_0=0 \\ \mu\in D^+\end{cases} \tag{4}$$

其中 $F_E(x)=\begin{cases}F(x) & x\in E\\ \emptyset & x\notin E\end{cases}$，$G_E(x)=\begin{cases}G(x) & x\in E\\ \emptyset & x\notin E\end{cases}$，$z_0\in G(x_0)$，$\lambda\in Y^*$。

设 $H(x_0)=\left\{y_0\in F(x_0)\left|\begin{array}{l}\text{存在}\mu\in D^+,z_0\in G(x_0),\text{使得}\mu(z_0)=0\\ lDF_E(x_0,y_0)(v)+\mu DG_E(x_0,z_0)(v)\geqslant 0\quad \forall v\end{array}\right.\right\}$

(4)就是找(x_0,y_0,μ)，使得 $y_0\in \mathrm{Wmax}H(A)$，其中 $A=\{x_0\in E\mid$ 存在 $u\in D^+,y_0\in F(x_0),z_0\in G(x_0)$，使得 $\mu z_0=0$，$\lambda DF_E(x_0,y_0)(v)+\mu DG_E(x_0,z_0)(v)\geqslant 0\}$。

定理1(弱对偶)　设graph(F)，graph(G)是凸集，则(VP)的可行解 x 和(DVP)的可行解(x_0,y_0,u)，有

$$\lambda y\geqslant \lambda y_0,\ \forall\ y\in F(x)$$

证：由 F,G 的图象是凸的，则对任意 $x\in E,y\in F(x),z\in G(x)$，有

$$h(x,y)+(1-h)(x_0,y_0)\in \mathrm{graph}F_E \qquad 0\leqslant h\leqslant 1$$
$$h(x,z)+(1-h)(x_0,z_0)\in \mathrm{graph}G_E \qquad 0\leqslant h\leqslant 1$$

$$\therefore\ y-y_0\in(F_E(x_0+h(x-x_0))-y_0)/h$$
$$z-z_0\in(G_E(x_0+h(x-x_0))-z_0)/h$$

由[6](Ch7,Sec1)命题5，有

$$y-y_0\in DF_E(x_0,y_0)(x-x_0)$$
$$z-z_0\in DG_E(x_0,z_0)(x-x_0)$$

又由 x 是(VP)的可行解，所$G(x)\cap(-D)\neq\emptyset$，取 $z\in G(x)\cap(-D)$，则有
$\lambda y-\lambda y_0+\mu z-\mu z_0\in \lambda DF_E(x_0,y_0)(x-x_0)+\mu DG_E(x_0,z_0)(x-x_0)\geqslant 0$
而 $\mu\in D^+,\mu z_0=0$，所以上式变成

$$\lambda y-\lambda y_0\geqslant 0$$

故 $\lambda y\geqslant\lambda y_0\quad \forall\ y\in F(x)$。结论成立。

定理2(直接对偶)　设 F 在点 x_0 是李普希兹连续的，$x_0\in \mathrm{int}E,\dot{K}\neq\emptyset,\dot{D}\neq\emptyset$，且 x_0 是(VP)在点 y_0 的弱有效解，则对任意 $z_0\in G(x_0)\cap(-D)$，存在 $l\in K^+,\mu\in D^+$ $(l,u)\neq 0$，使得(x_0,y_0,μ)是(DVP)关于 l 的弱有效解(即对任意(DVP)的可行解(x',y',u')，有 $ly'\leqslant ly_0$)。

证：设$(F_E,G_E):X\to 2^{Y\times Z}$是集值映射，且

$$(F_E,G_E)(x)=F_E(x)\times G_E(x)$$

下面先证

$$D(F_E,G_E)(x_0,y_0,z_0)(x)=DF_E(x_0,y_0)(x)\times DG_E(x_0,z_0)(x)$$

事实上：设$(y,z)\in D(F_E,G_E)(x_0,y_0,z_0)(x)$，则对任意$(w_n,u_n,v_n)\in \mathrm{graph}(F_E,G_E)\to(x_0,y_0,z_0),h_n\to 0^+$存在 $y_n\to y,z_n\to z,x_n\to x$ 使得

$$(u_n,v_n)+h_n(y_n,z_n)\in F_E(w_n+h_nx_n)\times G_E(w_n+h_nx_n)$$

$$\therefore \begin{cases} u_n + h_n y_n \in F_E(w_n + h_n x_n) \\ v_n + h_n z_n \in G_E(w_n + h_n x_n) \end{cases}$$

所以$(y,z) \in DF_E(x_0,y_0)(x) \times DG_E(x_0,z_0)(x)$

即 $D(F_E,G_E)(x_0,y_0,z_0)(x) \subset DF_E(x_0,y_0)(x) \times DG_E(x_0,z_0)(x)$

反过来，设$(y,z) \in DF_E(x_0,y_0)(x) \times DG_E(x_0,z_0)(x)$

则对任意$(w_n,v_n) \in \mathrm{graph}G_E \to (x_0,z_0)$，存在 $z_n \to z$，$x_n \to x$，使得

$$v_n + h_n z_n \in G_E(w_n + h_n x_n) \tag{5}$$

由已知，显然有 F_E 也是李普希兹连续的。

又由命题1，有

$$DF_E(x_0,y_0)(x) = QF_E(x_0,y_0)(x)$$

所以对上述 $h_n \to 0^+$，$(w_n,u_n) \in \mathrm{graph}F_E \to (x_0,y_0)$，$x_n \to x$ 存在 $y_n \to y$，使得

$$u_n + h_n y_n \in F_E(w_n + h_n x_n) \tag{6}$$

由(5)、(6)有：

$$(u_n,v_n) + h_n(y_n,z_n) \in F_E(w_n + h_n x_n) \times G_E(w_n + h_n x_n) = (F_E,G_E)(w_n + h_n x_n)$$

由定义有：$(y,z) \in D(F_E,G_E)(x_0,y_0,z_0)(x)$

因此 $D(F_E,G_E)(x_0,y_0,z_0)(x) = DF_E(x_0,y_0)(x) \times DF_E(x_0,z_0)(x)$。用[8]定理5.1同样的证法和上述结果，同样可证：对任意 $z_0 \in G(x_0) \cap (-D)$，存在 $l \in K^+$，$\mu \in D^+$，使得

$$\mu(z_0) = 0$$

$$lDF_E(x_0,y_0)(x) + \mu DG_E(x_0,z_0)(x) \geq 0 \qquad \forall x$$

下面证明(x_0,y_0,u)是(DVP)关于 l 的弱有效解。

事实上：如果(x_0,y_0,u)不是(DVP)关于 l 的弱有效解，则存在(DVP)可行解(x',y',u')，其中 $y' \in F(x')$，$u' \in D^+$，使得

$$ly' > ly_0$$

由于 x_0 是(VP)的可行解 $y_0 \in F(x_0)$，则由定理1，有 $ly_0 \geq ly'$矛盾，所以(x_0,y_0,u)是(DVP)关于 l 的弱有效解。

定理3(逆对偶) 设$\mathrm{graph}(F)$，$\mathrm{graph}(G)$是凸集，存在$x' \in E$（E 是凸集），使得 $G(x') \cap (-\mathring{D}) \neq \emptyset$，$x_0 \in E$，$y_0 \in F(x_0)$，$z_0 \in G(x_0)$，且对任意非零 $a \in K^+$，$b \in D^+$，有

$$aDF_E(x_0,y_0)(x) + bDG_E(x_0,z_0)(x) \geq 0 \qquad \forall x$$

并且存在非零正的 $l \in K^+$，$u \in T_{(-D)}^-(z_0) = \{u \in z^* \mid u(z) \leq 0 \quad \forall z \in T_{(-D)}(z_0)\}$，使得

$$lDF_E(x_0,y_0)(x) + uDG_E(x_0,z_0)(x) \geq 0 \qquad \forall x \in T_E(x_0)$$

且(x_0,y_0,u)是(DVP)关于 l 的弱有效解，则 x_0 是(VP)在点 y_0 的弱有效解。

证：设

$$H(x_0) = \left\{ y_0 \in F(x_0) \left| \begin{array}{l} 存在\mu \in D^+, z_0 \in G(x_0), 使得\mu(z_0) = 0 \\ lDF_E(x_0,y_0)(v) + \mu DG_E(x_0,z_0)(v) \geq 0 \quad \forall v \end{array} \right. \right\}, A = \{x_0 \in E \mid 存在$$

$\mu \in D^+$，$y_0 \in F(x_0)$，$z_0 \in G(x_0)$，使得

$$lDF_E(x_0,y_0)(x)+uDG_E(x_0,z_0)(x)\geqslant 0,\forall\ x\in z,u(z_0)=0\}$$

下面证明：$DH_A(x_0,y_0)\cap\mathring{K}=\emptyset$

事实上：若结论不成立，则存在$\hat{y}\in DH_A(x_0,y_0)(\hat{x})\cap\mathring{K}$

所以$\hat{y}\neq 0$，且$(\hat{x},\hat{y})\in T_{\mathrm{graph}H_A}(x_0,y_0)$

因此存在 $y_n\to\hat{y},x_n\to\hat{x},h_n\to 0^+$，使得

$$y_0+h_nx_n\in H_A(x_0+h_nx_n)$$

所以存在 $z_n\in H_A(x_0+h_nx_n)$，使得

$$y_n=(z_n-y_0)/h_n\to\hat{y}(n\to\infty)$$

而$\hat{y}\in\mathring{K}$，所以存在 $N>0$，使得

$$(z_N-y_0)/h_N\in\mathring{K}\text{，即}(z_N-y_0)\in\mathring{K}$$

由于 l 是正的，则 $lz_N-ly_0>0$

由 $z_N\in H_A(x_0+h_Nx_N)$，所以 $x_0+h_Nx_N\in A,z_N\in H(x_0+h_Nx_N)$

这与(x_0,y_0,u)是(DVP)相对 l 的弱有效解矛盾。

因此　$DH_A(x_0,y_0)(x)\cap\mathring{K}=\emptyset$

其次证明 $z_0\in(-D)$，即 $z_0\in G(x_0)\cap(-D)$。

事实上：由[6](Ch4,Sec1)命题2，$DH_A(x_0,y_0)(x)$是凸集，而$\mathring{K}$是凸锥，则由凸集分离定理，存在$l'\in Y^*$，使得

$$l'DH_A(x_0,y_0)(x)\leqslant\zeta\tag{7}$$

$$l'(\mathring{K})\geqslant\zeta\tag{8}$$

由$\mathring{K}$是凸锥，则上式(7)、(8)可推得

$$l'DH_A(x_0,y_0)(x)\leqslant 0$$

$$l'(\mathring{K})\geqslant 0$$

即$l'\in K^+$

显然有 $DH_A(x_0,y_0)(x)\subset DF_E(x_0,y_0)(x)$

而由已知有

$$l'DF_E(x_0,y_0)(x)+bDG_E(x_0,z_0)(x)\geqslant 0\quad\forall\ b\in D^+$$

$\therefore\quad bDG_E(x_0,z_0)(x)\geqslant 0\quad\forall\ b\in D^+$

又由 E 和 graph$G$ 是凸集，则 G_E 的图象也是凸集。

因此由定理1的证明过程可知

$$G_E(x)-z_0\subset DG_E(x_0,z_0)(x-x_0)$$

再由 $G(x')\cap(-\mathring{D})\neq\emptyset$，所以存在$-d\in G(x'),d\in\mathring{D}$，使得

$$-d-z_0\in DG_E(x_0,z_0)(x-x_0)$$

$\therefore\quad b(d-z_0)\geqslant 0\quad\forall\ b\in D^+$

由 b 的任意性和凸集分离定理可得

$\therefore\ d-z_0\geqslant 0$，即 $z_0\in(-\mathring{D})$

即 $z_0\in G(x_0)\cap(-\mathring{D})$，$x_0$ 满足(VP)的约束品性。

最后证明 x_0 是(VP)在点 y_0 的弱有效解。

事实上:由 E 是凸集和[6](CH7,Sec1)命题5，有

$$x - x_0 \in T(E, x_0) \quad \forall x \in E$$

设 $z \in DG_E(x_0, y_0)(x - x_0), x \in E$，则对任意$(u_n, v_n) \in \mathrm{graph}(G_E) \to (x_0, z_0), h_n \to 0^+$,存在 $x_n \to (x - x_0)$，$z_n \to z$，使得

$$v_n + h_n z_n \in G_E(u_n + h_n x_n) \quad \forall n$$

由 $z_0 \in (-\mathring{D})$，而 $v_n + h_n z_n \to z_0$，所以存在 $N > 0$，当 $n \geqslant N$ 时，有

$$v_n + h_n z_n \in -D$$

因此 $z \in T_{(-D)}(z_0)$

又由 $\mu \in T_{(-D)}^{*}(z_0)$，因此

$$\mu DG_E(x_0, z_0)(x - x_0) \leqslant 0 \quad \forall x \in E$$

所以 $lDF_E(x_0, y_0)(x - x_0) \geqslant 0 \quad \forall x \in E$

再由 l 是非零正的，则

$$DF_E(x_0, y_0)(x - x_0) \cap (-\mathring{K}) \neq \emptyset$$

由 graph(F)和 E 是凸集以及定理1的证明过程知

$$F_E(x) - y_0 \subset DF_E(x_0, y_0)(x - x_0) \quad \forall x \in E$$

因此 x_0 是(VP)在点 y_0 的弱有效解。

3 结束语

对于一般向量最优化问题

$$\begin{cases} \min f(x) \\ g(x) \leqslant 0 \\ h(x) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

其中 $f: X \to Y$，$g: X \to z$，$h: X \to z_1$ 是向量值映射，h 是仿射映射。

令 $F(x) = f(x) + \mathring{K}$，$G(x) = g(x) + D$，$E = \{x \in X \mid h(x) = 0\}$，显然 E 是凸集，且

$$g(x) \leqslant 0,\ h(x) = 0 \Leftrightarrow G(x) \cap (-D) \neq \emptyset,\ x \in E$$

由(9)可变成广义向量最优化问题:

$$\begin{cases} \min F(x) \\ x \in E \\ G(x) \cap (-D) \neq \emptyset \end{cases} \tag{10}$$

显然：x_0 是(9)的弱有效解$\Leftrightarrow$ x_0 是(10)在点 $f(x_0)$ 的弱有效解。

因此本文讨论广义向量最优化问题的方法也可用来讨论向量最优化问题。

参考文献

1 Luc D T. On duality theory in multiobjective programming, J. of Opti. Th. and Appl, 1984, 43(4)

2 Zowe J. A duality theorem for a convex progtamming problem in order complete vector lattices. J. Math and Appl, 1985, 50: 273 ~ 287

3 林锉云，董加礼．多目标优化的方法与理论．长春:吉林教育出版社，1992

4 Lai H C.and Ho C P, Duality theorem of nondifferentiable comex multiobjective programming.J of Opti Th.and Appl, 1986, 50:407 ~ 420

5 刘三阳．非光滑非凸多目标规划的Wolfe型对偶性．数学研究与评论，1991，11(1)

6 Aubin J.P.and Edeland I.Applied nonlinear analysis, John Wiley, New York, 1984

7 Thiboult L.Tangent cones and quasi-interiorly tangent cones to multifunction, Transactions of the American mathematical society, 1983, 227(2)

8 Corley H W.Optimality condition for maximization of set-valued function, J.of Opti Th.and Appl, 1988, 58(1)

Mond-Weir Duality for Generalized Vector Optimization

Li Shengjie

(Department of Fundamental Sciences, Chongqing Jianzhu University, 400045)

Abstract　The Mond-Weir duality for generalized vector optimization is dealt with in this paper. This paper proves the theorems on weak duality between primary problem and dual problem, direct duality and inverse duality.

Key Words　generalized vector optimization, tangent derivative, Mond-Weir duality

(编辑：刘家凯)