

关于三维无限元的一种新模型

⑦
30-34

张建辉

(河北大学数学系 保定 071002)

邓安福 严春风

(重庆建筑大学建筑工程学院 400045)

TU458.4

摘要 给出一个三维十二节点无限元的新模型,其映射函数概念明确、形式简洁。该模型不存在文献[7]中无限元模型在计算时出现的问题。另外,结合算例将该模型与文献[8]中无限元模型进行了比较。结果表明,本文的无限元新模型在性能和精度方面均具有优越性。

关键词 无限元、模型、有限元 岩土工程试验
中图分类号 TU458.4

在岩土工程数值分析中,无限域或半无限域的模拟占有重要的地位。虽然有限元法是分析岩土工程问题的灵活、实用和有效的手段,但对于涉及无限域或半无限域的问题,其应用受到一定的限制。无限元的提出和应用,使上述问题得到顺利解决。无限元的概念最早由 R. Ungless^[1]于1973年提出,后经过了 Bettess^[2]、Beer 和 Meek^[3]、Zienkiewicz^[4]等人的改进和发展,至今不过二十余年时间。张楚汉^[5]、赵崇斌^[6]、葛修润^[7]等人在80年代对无限元的研究使其应用范围更为广泛。虽然无限元模型已具有了几种不同的形式,但关于三维无限元模型的研究和三维问题的无限元分析,则是近十余年内才见报道^[7]。因此,无限元仍是一种新型的特殊单元,尚不成熟,有待继续研究和探讨。

无限元的特殊性在于:(1)局部坐标系中的有限域到整体坐标系中的无限域的映射,即局部坐标 $\xi \rightarrow 1$ 时,相应整体坐标趋向无穷大,从而实现计算范围伸向无穷远点;(2)无限域上位移衰减过程的描述,即 $\xi \rightarrow 1$ 时,位移趋向于零,从而实现无限远处位移为零的边界条件。

本文提出一种三维十二节点无限元的新模型,并与文献[7]和文献[8]中的不同形式的三维十二节点无限元进行了比较,说明本文新模型具有明显的优越性。另外,本文新模型可方便地与精度较高和应用十分广泛的三维六面体20节点等参元相耦合,顺利进行三维无限域或半无限域岩土工程问题的数值分析。

1 本文的无限元新模型

1.1 无限元坐标映射函数

几何变换式:

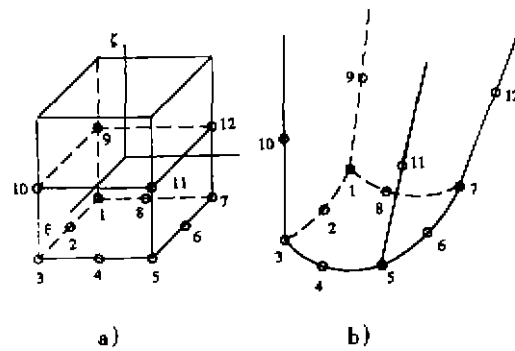


图1

收稿日期:1997-06-16

张建辉,男,1963年生,博士生

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^{12} N_i(\xi, \eta, \zeta) x_i \\ Y &= \sum_{i=1}^{12} N_i(\xi, \eta, \zeta) y_i \\ Z &= \sum_{i=1}^{12} N_i(\xi, \eta, \zeta) z_i \end{aligned} \quad (1)$$

其中 N_i 为映射函数, 当 $\zeta \leq 0$ 时, 与通常有限元相同, 我们直接将其取为关于此无限元十二个节点的 Serendipity 型函数, 即,

当 $\zeta \leq 0$ 时:

$$\begin{aligned} N_i &= (1/4)(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i - \zeta - 2) & i = 1, 3, 5, 7 \\ N_i &= (1/4)(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta) & i = 9, 10, 11, 12 \\ N_i &= (1/2)(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i) & i = 2, 6 \\ N_i &= (1/2)(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2) & i = 4, 8 \end{aligned} \quad (2)$$

当 $\zeta > 0$ 时, 我们取映射函数具有如下形式:

$$\begin{aligned} N_i &= N_1(\zeta)N^p(\xi, \eta) & i = 1, 3, 5, 7 \\ N_i &= N_2(\zeta)N^p(\xi, \eta) & i = 9, 10, 11, 12 \\ N_i &= 0 & i = 2, 4, 6, 8 \end{aligned} \quad (3)$$

其中 N_1, N_2 中, 分别为一维无限元始端节点 1 和中间节点 2 的映射函数,

$$\begin{aligned} N_1 &= -2\zeta/(1 - \zeta) \\ N_2 &= (1 + \zeta)/(1 - \zeta) \end{aligned}$$

$N^p(\xi, \eta)$ 为有限方向即 ξ, η 方向的 Serendipity 型函数, 因此,

当 $\zeta > 0$ 时

$$\begin{aligned} N_i &= -[1/2(1 - \zeta)](1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)\zeta & i = 1, 3, 5, 7 \\ N_i &= [1/4(1 - \zeta)](1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta) & i = 9, 10, 11, 12 \\ N_i &= 0 & i = 2, 4, 6, 8 \end{aligned} \quad (3')$$

式中 ξ_i, η_i 为节点 i 的局部坐标值。

1.2 无限元位移函数

位移场函数表达式:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{12} M_i u_i \\ v &= \sum_{i=1}^{12} M_i v_i \\ w &= \sum_{i=1}^{12} M_i w_i \end{aligned} \quad (4)$$

式中 M_i 为位移插值函数, 其形式如下:

$$M_i = M^p f(r_i/r) \quad (5)$$

其中 M^p 取 $\zeta \leq 0$ 时的 N_i 表达式, $f(r_i/r)$ 称为衰减函数。此衰减函数应满足 $f(\xi_i, \eta_i,$

$\zeta_i = 1$, 及 $r \rightarrow \infty$ 时, $f(r_i/r) \rightarrow 0$, 以得到无限远处位移为零的边界条件。我们取:

$$f(r_i/r) = (r_i/r)^k \quad k \geq 1 \quad (6)$$

式中 r_i , r 分别为节点 i 和计算点的衰减半径。令整体坐标系的原点为衰减中心, 则,

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

2 关于文献[7]中的三维十二节点无限元模型

文献[7]提出如下形式的三维十二节点无限元(图 1):

其几何变换式的形式同(1), 但其形函数(映射函数)为,

当 $\zeta \leq 0$ 时:

$$\begin{aligned} N_i &= (1/4)(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)\zeta(\xi\xi_i + \eta\eta_i - \zeta - 2) & i = 1, 3, 5, 7 \\ N_i &= (1/4)(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 - \zeta^2) & i = 9, 10, 11, 12 \\ N_i &= -(1/2)(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i)\zeta & i = 2, 6 \\ N_i &= (1/2)(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2)\zeta & i = 4, 8 \end{aligned} \quad (2)$$

当 $\zeta > 0$ 时:

$$\begin{aligned} N_i &= [-1/4(1 - \zeta)](1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)\zeta & i = 1, 3, 5, 7 \\ N_i &= [1/4(1 - \zeta)](1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) & i = 9, 10, 11, 12 \\ N_i &= 0 & i = 2, 4, 6, 8 \end{aligned}$$

其位移函数变换式与(4)式相同。

我们在对三维地基进行弹塑性分析时, 应用文献[7]的无限元模型与 20 节点等参元耦合, 对该文中给出的算例进行了反复验算, 发现此无限元模型存在如下两个问题:

1) 若采用 $2 \times 2 \times 2$ 高斯积分计算无限元单元刚度矩阵, 则可求得节点位移及相应高斯点的应力, 但不能求得节点的应力。

2) 若无限元单元采用 $3 \times 3 \times 3$ 高斯积分计算, 则在 $\zeta = 0$ 的高斯点上, 雅可比行列式的值全部为负值, 将导致总刚非正定, 不能求解。

应用本文的新模型对文献[7]中的算例进行计算, 则不存在上述问题, 若用 $2 \times 2 \times 2$ 高斯积分计算无限元单元, 其节点位移和高斯点应力结果与文献[7]中模型的结果精度相同, 并可以方便地计算节点应力及应用 $3 \times 3 \times 3$ 高斯积分对无限域或半无限域问题进行数值分析, 且具有良好的精度。同时, 本文新模型 $\zeta \leq 0$ 时的映射函数比文献[7]中模型的对应函数低一次, 形式较为简洁。

3 关于文献[8]中的无限元模型

文献[8]中给出如下三维 12 节点无限元:

几何变换式同(1), 而映射函数为

$$\begin{aligned} N_i &= [1/2(1 - \zeta)](1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(-\zeta - \eta - \xi - 2) & i = 1, 3, 5, 7 \\ N_i &= [1/4(1 - \zeta)](1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta) & i = 9, 10, 11, 12 \end{aligned}$$

$$N_i = [1/(1 - \zeta)](1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i) \quad i = 2, 6$$

$$N_i = [1/(1 - \zeta)](1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2) \quad i = 4, 8$$

位移变换式为(4)式, 而 M_i 为 20 节点六面体等参元对应节点的形函数。

通过算例分析, 我们发现, 此无限元模型对其边(伸向无穷远)中节点 9, 10, 11, 12 的整体坐标设置有较严格的要求。即这些节点的整体坐标须不小于近域边缘有限元对应节点整体坐标的几倍以上, 才能保证在高斯点雅可比行列式的值为正及对节点位移的顺利求解。另外, 此无限元模型的位移函数 M_i 选择了 20 节点六面体等参元对应节点形函数的形式, 不便于灵活地描述无限域位移的分布规律及衰减过程, 对下述的算例一, 其节点位移的精确度与本文新模型的精确度相近, 但对算例二, 其精确度明显低于后者。

4 算例

算例一: 受均布内压力的球形洞室问题

无限域内一球形洞室, 内径为 2 m, 承受均布内压力 $q = 10$ kPa。其材料常数 $E = 20$ MPa, $\mu = 0.167$ 。

由于对称, 取 1/8 区域, 计算网格见图 2。本文新模型(模型 1, 取 $k = 1$)与文献[8]中模型(模型 2)的计算结果见图 3。

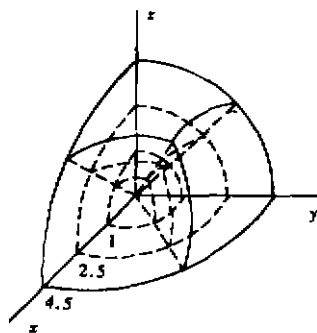


图 2

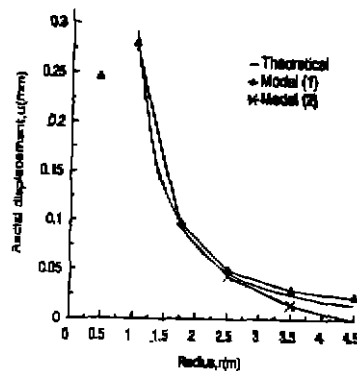


图 3

算例二: 方形均布荷载作用下半无限地基问题

半无限地基承受均布荷载 10 kPa, 承受荷载面积 $8 \text{ m} \times 8 \text{ m}$ 。 $E = 50$ MPa, $\mu = 0.3$ 。

由于对称性, 计算只取 1/4 区域。计算网格如图 4 所示。对本文新模型, 取衰减系数 $k = 2$ 。本文新模型(模型 1)和文献[8]中模型(模型 2)的计算结果见图 5。

应用本文无限元新模型进行数值分析, 不存在文献[7]中无限元模型所出现的问题。并且, 由上述算例可以看出, 本文新模型可以方便地根据不同的问题调整位移衰减函数(与理论解位移函数尽量一致[7]), 以获得最理想的结果, 而文献[8]中的模型不具备这一特征。通过试算算例及分析(4)、(5)、(6)式发现, 无限元的网格形态(无穷边辐射角及其边上节点 9、10、11、12 对应的整体坐标)与无限元位移函数的分布规律或衰减过程密切相关, 直接影响着解的精度, 因此, 应适当选择无限元的网格形态。

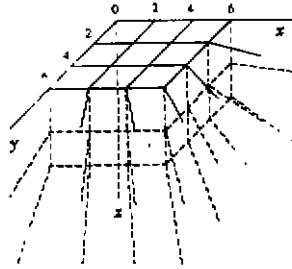


图 4

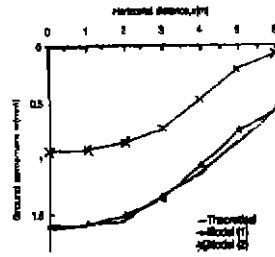


图 5

5 结 语

(1) 在划分无限元时, 映射极点须位于无限元之外, 延伸至无限远的边或面宜平行或呈以近域对应有有限元面为基本面的辐射状, 且其无穷远边的反向延长线在近域有限元内不宜相交; (2) 对于本文无限元十二节点新模型, 无限元单刚采用 $2 \times 2 \times 2$ 高斯数值积分计算时, 其无限远边上节点的整体坐标宜取为近域边缘对应节点坐标的 4 倍左右, 以获得良好的精确度; (3) 通过分析与算例比较, 容易看到, 无论是在性能方面, 还是在精确度方面, 本文的三维十二节点无限元新模型均具有优越性。

参 考 文 献

- 1 R. F. Ungless, An infinite finite element, M. A. Sc. Thesis, University of British Columbia, 1973
- 2 Peter Bettess, More on infinite element, Int. J. Numer. Meth. Eng. 1980, 15: 1613 ~ 1626
- 3 G. Beer and J. L. Meek, Infinite domain element, Int. J. Numer. Meth. Eng. 1981, 17: 43 ~ 52
- 4 O. C. Zienkiewicz et al. A novel boundary infinite element, Int. J. Numer. Meth. Eng. 1983, 19: 393 ~ 404
- 5 张楚汉, 王光纶. 无限域的数值模拟与无限单元.
- 6 赵崇斌等. 用无限元模拟半无限平面弹性地基. 清华大学学报(自然科学版), 1986(3)
- 7 葛修润等. 三维无限元和节理无界元. 岩土工程学报, 1986(5)
- 8 潘昌实. 隧道力学数值方法. 北京: 中国铁道出版社, 1995(6)

A Novel Model about Three-Dimensional Infinite Element

Zhang Jianhui

(Hebei University, Baoding, 071002)

Deng Anfu Yan Chunfeng

(Faculty of Civil Engineering, Chongqing Jianzhu University, 400045)

Abstract A novel model of 3D 12-node infinite element is presented in this paper. The mapping functions in the novel model are clear-cut in the concept and concise in the form. The problems, which emerge in using the infinite element model of the reference [7], don't appear in using the novel model. A comparison between the novel model and the infinite element model of the reference [8] is made by computing the examples. The results show that the novel model has the advantages in performance and accuracy.

Key Words infinite element, model, finite element

(编辑: 袁 江)