

# Winkler 地基上加肋板的弹性分析

②

5-9

邓安福

(重庆建筑大学建筑工程学院 400045)

吕镇江

(深圳龙岗质检站 深圳 518116)

干腾君

(重庆建筑高等专科学校 400030)

TU471.2

**摘要** 把加肋板分成板和肋梁两个部分,板作为 Winkler 地基上的板,用边界元方法分析;肋梁作为连续梁,用有限元方法分析,利用肋梁结点处力的平衡和位移的协调关系进行耦合求解。

**关键词** 加肋梁, Winkler 地基模型, 边界元, 有限元, 耦合 *弹性地基, 弹性分析*

中图分类号 TU471.2

软土地基上的高层建筑结构基础设计中,常采用筏式基础。为了加强这种基础的刚度,经常在纵横两个方向加肋梁,实际上就成为加肋板(图1)。对于加肋板,可以把板分成条带按独立基础梁进行简化计算,也可以利用有限差分法、有限元法进行计算。

文献[1]利用边界元分析 Winkler 弹性地基上的板,使板弯曲问题的研究得到有效的处理。本文把加肋板分成板和肋梁两个部分,板作为

Winkler 地基上的板,用边界元方法分析;肋梁作为连续梁,用有限元方法分析。板和肋梁之间的连接作为铰结(见图1),利用铰结点处力的平衡和位移的协调关系进行耦合求解。把加肋板分成板和肋梁两个部分,板作为 Winkler 地基上的板,用边界元方法分析;肋梁作为连续梁,用有限元方法分析。利用肋梁结点处力的平衡和位移的协调关系进行耦合求解。

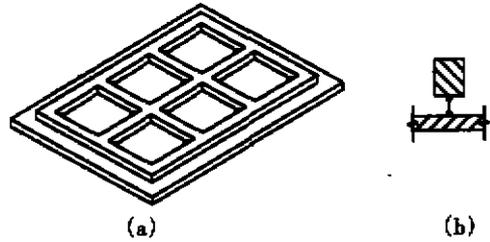


图1 加肋板

## 1 弹性地基板的边界元分析

### 1.1 控制微分方程及基本解

在 Winkler 弹性地基上板弯曲问题的控制微分方程为:

$$Lw = p/D \tag{1}$$

式中:  $D$  为板的弯曲刚度,  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ ;  $L$  为微分算子,  $L = \nabla^2 \nabla^2 + k/D$ 。

式(1)微分方程的基本解可以用二阶开尔文函数表示,其表达式为:

收稿日期:1997-10-23

邓安福,男,1936年生,教授

国家教委高校博士点基金资助项目(9562001)

$$w^* = -(l^2/2\pi D)\text{kei}(r/l) \quad (2)$$

式中:  $r$  为场点到源点的距离;  $l = \sqrt[3]{D/k}$

### 1.2 边界积分方程

利用 Rayleigh - Green 公式, 可得弹性地基上板弯曲问题的积分方程解答:

$$w(p) = \iint_{\Omega} w^* p d\Omega - D \int_{\Gamma} \left( w^* \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 w^* - w \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 w^* - \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 w + \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 w^* \right) d\Gamma \quad (3)$$

在板边界上, 如图 2 所示, 如果以  $n$  表示边界曲线的法向,  $t$  为切向,  $R$  为边界的曲率半径, 则边界转角、弯矩、扭矩和折算剪力与挠度的关系有:

$$\left. \begin{aligned} \theta(w) &= \frac{\partial w}{\partial n} \\ M(w) &= -D \left[ \nabla^2 - (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] w \\ T(w) &= -D (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t^2} \\ V(w) &= -D \left[ \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial^2}{\partial n \partial t} \right] w \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

而边界算子

$$\frac{\partial}{\partial s} = -\sin\beta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\beta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \left( \frac{\cos\beta}{r} - \frac{1}{R} \right) \frac{\partial}{\partial \beta}$$

运用以上边界物理量的表达式, 可以得到这些边界量表示的积分方程:

$$w(p) = \iint_{\Omega} q \cdot w^* d\Omega + \int_{\Gamma} w^* V(w) d\Gamma - \int_{\Gamma} w V(w^*) d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial w^*}{\partial n} M(w) d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial n} M(w^*) d\Gamma \quad (5)$$

对于积分方程 (5), 令  $p \rightarrow P \in \Gamma$ , 即可得到边界积分方程:

$$C(P)w(P) = \iint_{\Omega} q \cdot w^* d\Omega + \int_{\Gamma} w^* V(w) d\Gamma - \int_{\Gamma} w V(w^*) d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial w^*}{\partial n} M(w) d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial n} M(w^*) d\Gamma \quad (6)$$

利用积分方程 (5), 对边界点  $P$  求法向导数, 然后令  $p \rightarrow P \in \Gamma$ , 可得到第二个边界积分方程:

$$C(P) \frac{\partial w(P)}{\partial n_P} = \iint_{\Omega} q \cdot w^* d\Omega + \int_{\Gamma} w^* V(w) d\Gamma - \int_{\Gamma} w V(w^*) d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial w^*}{\partial n} M(w) d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial n} M(w^*) d\Gamma \quad (7)$$

### 1.3 边界元法

方程 (6) 和 (7) 就是求解板弯曲问题的两个边界积分方程, 对板边界进行离散, 即可得到关于板边界量的方程组:

$$[H]\{u\} = [G]\{\tau\} + \{F\} \quad (8)$$

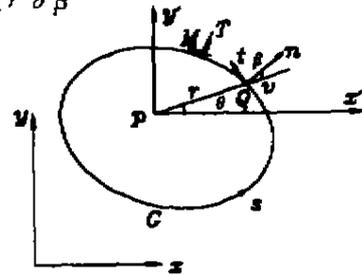


图 2 板的区域和边界

式中:  $\{u\}$ 、 $\{\tau\}$ 分别为板边界位移向量和板边界力向量,应用边界条件:

边界固定  $w = 0$ ;  $w_n = 0$  边界铰支  $w = 0$ ;  $M_n = 0$  边界自由  $M_n = 0$ ;  $V_n = 0$   
即可求解方程式(8)。

## 2 肋梁的有限元分析

对于板上的加肋梁,考虑双向布置的情况。这时,可采用常用的格栅单元,以加肋梁交界点结点进行单元划分,可得到刚度方程为:

$$[K]\{\delta\} = \{P\} \quad (9)$$

式中  $\{\delta\}$ 为结点位移列向量; $\{P\}$ 为荷载列向量; $[K]$ 为刚度矩阵。

每个结点有三个位移分量(一个挠度和两个转角)和三个力的分量(一个横向力和两个方向的弯(扭)矩)。在此,由于把板和肋梁的连接假定为铰支,在结点荷载列向量中力矩为零、只有横向力。把力矩和横向集中力项分开,则方程(9)可分块写成:

$$\begin{bmatrix} K_{II} & K_{I0} \\ K_{0I} & K_{00} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_I \\ \delta_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_I \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

将式(10)展开,即可得到

$$K_{II} \delta_I + K_{I0} \delta_0 = P_I \quad (11)$$

$$K_{0I} \delta_I + K_{00} \delta_0 = 0 \quad (12)$$

由式(11)和(12)消去 $\{\delta_0\}$ 得

$$(K_{II} - K_{I0} K_{00}^{-1} K_{0I}) \delta_I = P_I$$

令  $K_I = K_{II} - K_{I0} K_{00}^{-1} K_{0I}$ ,上式为

$$[K_I]\{\delta_I\} = \{P_I\} \quad (13)$$

$\{P_I\}$ 中包括外荷载 $\{P_0\}$ 和约束反力 $\{P_I\}$ ,在(14)中分开表示,则为

$$[K_I]\{\delta_I\} = \{P_I\} + \{P_0\} \quad (14)$$

## 3 耦合方程的建立

### 3.1 补充方程的建立

方程式(6)和(14)是Winkler地基上加肋板肋梁和板耦合的基本式。假如板边界划分为 $N$ 个单元,肋梁有 $M$ 个交界点,利用两式可以建立 $2N + M$ 个方程。而在板边界上,每个单元有两个知量,共有 $2N$ 个未知量;在肋梁的交界点,挠度和横向力都是未知的,共有 $2M$ 个未知量。总共有 $2N + M$ 个未知量。显然,两个基本式联合还不能求解,需采用一些补充方程。

利用积分方程式(5),可以建立肋梁交界结点处的挠度与板边界量和横向力之间的关系。每个未交界结点建立一个方程,可建立 $M$ 个方程。即

$$\{\delta_I\} = [R_I]\{P_I\} + [G_I]\{\tau\} + [H_I]\{u\} \quad (15)$$

这样,式(6)、(14)和(15)共建立 $2N + 2M$ 个方程,恰好能解出所有的未知量,从而能求解该问题。

### 3.2 耦合方程

(8)式右边第二项即为把 $\{P_i\}$ 作为荷载的面积分项。利用积分可得

$$\{F\} = [R_i]\{P_i\} \quad (16)$$

将上式代入(8)式得

$$[H]\{u\} = [G]\{\tau\} + [R_i]\{P_i\} \quad (17)$$

方程式(15)和(17)中边界量 $\{u\}$ 、 $\{\tau\}$ 包含板边界未知量和已知量。将它们分离开,并分别用 $\{x\}$ 和 $\{F\}$ 来表示,则有

$$\{\delta_i\} = [R_i]\{P_i\} + [G_i^*]\{x\} + [H_i^*]\{F\} \quad (18)$$

$$[H^*]\{F\} = [G^*]\{x\} + [R_i]\{P_i\} \quad (19)$$

由(14)、(18)和(19)式联合,即可得到矩阵形式的耦合方程

$$\begin{bmatrix} [G^*] & [R] & [0] \\ [G_i^*] & [R_i] & -[I] \\ [0] & [I] & -[K_i] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{P_i\} \\ \{\delta_i\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [H^*]\{F\} \\ -[H_i^*]\{F\} \\ \{P_o\} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

式中 $[I]$ 为单位矩阵

## 4 算例分析

作为算例(如图3),选取 Winkler 地基上的加肋板进行分析。板和肋梁的弹性模量为  $3 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ ,泊松比为 0.20。板的长为 26 m,宽为 20 m,板厚为 0.30 m。肋梁的高为 0.6 m;宽为 0.3 m。地基的基床系数为  $5 \times 10^8 \text{ kN/m}^3$ 。

在相同荷载作用下,计算了板短边中线半对称段的挠度,并同不加肋的情况进行了比较(如图4)。

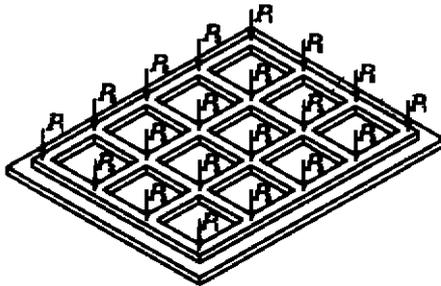


图3 算例

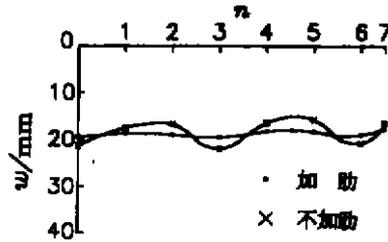


图4 板短边中线半对称段的挠度

计算了相同荷载作用下板短边中线半对称段的弯矩,并同不加肋的相同厚度的平板进行了比较(见表1)。

表1 板短边中线半对称段的弯矩

情况	0	1	2	3	4	5	6	7
加肋	119.1	-139.2	-132.9	128.6	-140.4	-212.6	-27.4	0.0
不加肋	113.4	-143.5	-133.9	142.5	-123.6	-224.0	-55.9	0.0

## 5 结 论

本文利用有限元、边界元的耦合方法,分析了 Winkler 地基上的加肋板,并进行了算例分析。通过算例表明:板加肋可以显著地减小板的挠度,特别是在板的端部最明显;可以减小板的内力。

### 参 考 文 献

- 1 J. T. Katsikadelis and A. E. Armenakas. Plate on elastic foundation by BIE method. Journal of engineering mechanics, 1984, 110(7)
- 2 G. Bezine. A new boundary element method for bending of plates on elastic foundations. Int. J., Solids structures, 1998, 24(6): 557 ~ 565
- 3 干腾君,李正良,邓安福. 空间框架与地基基础耦合分析新方法. 重庆建筑大学学报, 1997, 19(2)
- 4 金康宁. BEM 和 FEM 耦联分析加劲板. 工程力学增刊, 1995

## Elastic Analysis of Beam-Plate Foundation with Winkler Model

*Deng Anfu*

(Faculty of Civil Engineering, Chongqing Jianzhu University, 400045)

*Lü Zhengjiang*

(Station of Quality Testing of Shengzheng Longgang, Shengzheng. 518116)

*Gan Tengjun*

(Chongqing Architectural College, Chongqing 400030)

**Abstract** The beam-plate foundation is divided into two parts. The boundary element methods are applied to analyze the plates with Winkler model. The finite element methods are used to evaluate the beams. The coupling equation is obtained by the coordination of both force and displacement.

**Key Words** beam-plate, Winkler model, boundary element method, finite element method, coupling

(编辑:王秀玲)