一类拓扑等价度量空间的生成及性质

⑥ 23-27
吴新生
0177.3
(重庆建筑大学基础科学系 400045)

摘 要 拓扑等价度量之研究在理论与应用上均甚有价值。已故李孝传教授在这方面作了一系列研究。本文在有界而非全有界之度量空间上定义一拓扑等价之新度量，并研究了所生成的新的度量空间的一些性质。

关键词 度量化，拓扑等价，度量空间
中图法分类号 0177.3

1 定义及引理

定义 1 X——为任一集合，若映射 $d:X\times X\longrightarrow R^{+}\cup\{0\}$ 且满足：

(d_1) $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$

(d_2) $d(y,x)=d(x,y),\forall x,y\in X$

(d_3) $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z),\forall x,y,z\in X$

则称 d 为 X 上之一度量，称 (X,d) 为一度量空间。若 (d_1) 改为 $(d_1)'$，$d(x,y)=0\Leftarrow x=y$，则称 d 为 X 上之一伪度量，此时 (X,d) 称为伪度量空间。

定义 2 (X,d)——度量(或伪度量)空间，令 $B(x,\varepsilon)=\{y\mid d(y,x)<\varepsilon,x,y\in X\}$ 而由 $\beta_d=\{B(x,\varepsilon)\mid x\in X,\varepsilon>0\}$ 产生的拓扑 T_d 称为 X 上之一度量拓扑。

定义 3 β_1 与 β_2 为 X 上之二拓扑基，若其分别产生之拓扑 τ_1 与 τ_2 相等，则 β_1 与 β_2 称为等价之拓扑基。

定义 4 同一集上之度量 d_1，d_2 为等价的，如果它们产生 X 上相同的度量拓扑：即 $\tau_{d1}=\tau_{d2}$。

定义 5 (X,d) 是一度量空间且 $A\subset X$；称 A 在 (X,d) 中是 ε——稠密的，如果 $\forall x\in X,\exists x'\in A,\ni:\rho(x,x')<\varepsilon$。称度量空间是全有界的，如果 $\forall\varepsilon>0,\exists$ 有限集 $A\subset X$，且 A 在 (X,d) 中是 ε——稠密的。

引理 1 集 X 上之度量 d_1,d_2 为拓扑等价的，当且仅当 $\forall x\in X$ 以及序列 $\{x_i\mid i=1,2,\cdots\}\subset X$，$\lim\limits_i d_1(x_i,x)=0$ 与 $\lim\limits_i d_2(x_i,x)=0$ 同时成立。

引理 2 若 d 为拓扑空间 (X,τ) 上之一度量，则 $\tau=T_d$ 之充要条件为 $\forall A\subset X,\rho(x,$

收稿日期：1998-06-08
吴新生，男，1943年生，副教授

$A) = 0$ 当且仅当 $x \in \bar{A}_\tau$

证： $\because$ $\bar{A}_{Td} = \{x \mid d(x,A) = 0\} = \bar{A}_\tau$，则

$\forall G \in T_d \Leftrightarrow G$ 是 T_d 一闭集 $\Leftrightarrow G = \bar{G}^c_{Td} = \bar{G}^c_\tau \Leftrightarrow C$ 是 τ 一闭集 $\Leftrightarrow G \in \tau$。

$\therefore \quad T_d = \tau$

引理 3 ρ 与 d 同为 X 中之度量，则 $T_\rho = T_d$ 之充要条件为 $\forall x \in X$; $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $B_d(x,\delta) \subset B_\rho(x,\varepsilon)$；且 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $B_\rho(x,\delta) \subset B_d(x,\varepsilon)$。

引理 4 对任意空间 (X,ρ) 均存在与 ρ 等价之 X 上的度量 d，且 $\forall (x,y) \in X \times X$, $d(x,y) \leqslant 1$。

证：只须令

$d(x,y) = \min\{1, \rho(x,y)\} \quad \forall x,y \in X$ 则 d 与 ρ 易证为拓扑等价的。

2 定理及证明

定理 1 $f: X \longrightarrow R$，又 d 为 X 上之一度量，定义映射 $d^*: X \times X \longrightarrow R$，$\forall (x,y) \in X \times X$

$$d^*(x,y) = d(x,y) + |f(x) - f(y)|$$

则 d^* 必为与 d 拓扑等价之度量。

事实上，$\forall x,y \in X$，

(a) 非负性成立，$d^*(x,y) \geqslant 0$

(b) $d^*(x,y) = 0 \Leftrightarrow d(x,y) + |f(x) - f(y)| = 0$

$\Leftrightarrow d(x,y) = 0, f(x) = f(y)$

$\Leftrightarrow x = y$

(c)对称性成立：即 $d^*(x,y) = d^*(y,x)$

(d)三角不等式成立，即

$d^*(x,y) \quad = d(x,z) + |f(x) - f(z)| \leqslant d(x,y) + d(y,z) + |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)| = d(x,y) + |f(x) - f(y)| + d(y,z) + |f(y) - f(z)|$

$= d^*(x,y) + d^*(y,z)$

故 d^* 为 X 上之一度量。

下证 d 与 d^* 在 X 上拓扑等价。

事实上，若 $x \in X$, $\{x_i \mid i = 1,2,\cdots\} \subset X$ 且 $\lim\limits_{i\to\infty} d^*(x_i,x) = 0$，由于 $0 \leqslant d(x_i,x) \leqslant d^*(x_i,x)$

$$\therefore \quad \lim_{i\to\infty} d(x_i,x) = 0$$

反之，若 $\lim\limits_{i\to\infty} d(x_i,x) = 0$，则

$$\lim_{i\to\infty} d^*(x_i,x) = \lim_{i\to\infty}[d(x_i,x) + |f(x_i) - f(x)|]$$

$$= \lim_{i\to\infty} d(x_i,x) + \lim_{i\to\infty} |f(x_i) - f(x)|$$

$=0$　（因为 d 与 f 均连续）

∴　由引理1　d 与 d^* 为拓扑等价的度量。

定理2　(X,d)——有界而非全有界之度量空间，一定存在与 d 拓扑等价之度量 ρ^*，使得 ρ^* 是无界的。

证：d 为有界而非全有界之度量空间

先证 (X,d) 存在一不完备拓扑等价度量化 $\rho: X\times X \longrightarrow R^+\cup\{0\}$

∵　(X,d) 不是全有界的，故 $\exists\, \varepsilon_0>0$，$\exists$ 序列 $\{x_1,x_2,\cdots\}$，$d(x_i,x_j)\geq\varepsilon_0\quad(i\neq j)$

令

$$A_1=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$$
$$A_2=\{x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots\}$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$A_n=\{x_n,x_{n+1},\cdots,\cdots,\cdots\}$$

因为 $\forall i, A'_i=\varnothing$，故 A_i 为闭集。

令

$$\rho_i(x,y)=|d(x,A_i)-d(y,A_i)|+\min[d(x,A_i),d(y,A_i)]d(x,y)\qquad\forall\quad x,y\in X$$

易知　$\{i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 X 上之一伪度量可数族。则 $\{i\}_{i=1}^{\infty}$ 满足

1)　$\rho_i: X\times X\longrightarrow R$ 是 $d\times d$ 连续的

2)　对 $\forall$ 闭集 $F\subset X, x\,\overline{\in}\, F$，$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=\varnothing$，

∴　$\exists N$，$\forall\ i\geq N, x\,\overline{\in}\, A_i$

若　$F\cap A_i=\varnothing$，因为 $d(F,A_i)>0$，所以

$$\rho_i(x,F)=|d(x,Ai)-d(F,A_i)|+\min[d(x,A_i),d(F,A_i)]d(x,F)>0$$

若　$F\cap A_i\neq\varnothing$，则 $d(F,A_i)=0$

所以　$\rho_i(x,F)=d(x,A_i)>0$　　(1)

3)　由引理4，不妨令 ρ_i 以1为界

令

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\rho_i(x,y)\qquad \rho: X\times X\longrightarrow R$$ 下证，ρ 为 X 上的度量，且 $T_\rho=T_d$

事实上，ρ 满足度量公理，即 $\rho: X\times X\longrightarrow R^+\cup\{0\}$

且 (d_1)　$\forall x\in X, \rho(x,x)=0$

∵　(X,d) 是 T_1 的，$\forall x,y\in X, x\neq y, x\,\overline{\in}\,\{y\}=\overline{\{y\}}$

∴　由(A)必 $\exists\rho_i$，$\ni:\rho_i(x,y)>0$，∴　$\rho(x,y)>0, x=y\Leftrightarrow\rho(x,y)=0$

(d_2)，(d_3) 由 $\forall\rho_i$ 是伪度量直接可得

欲证 $T_d=T_\rho$，由引理2，只须证 $\bar{A}_{Td}=\bar{A}_{T\rho}$

事实上，若 $x\,\overline{\in}\,\bar{A}_{Td}$，必 $\exists i$，$\ni:\rho_i(x,\bar{A}_{Td})=r>0$，又 $\rho(x,A)=\inf_{y\in A}\rho(x,y)$

而 $\forall y\in A$：

$$\rho(x,y)\geq\frac{1}{2^i}\rho_i(x,y)\geq\frac{1}{2^i}\rho_i(x,\bar{A}_{Td})=\frac{r}{2^i}$$

所以 $\rho(x,A)\geqslant\frac{r}{2^i}>0$ 故 $x\notin\overline{A}_{T\rho}$

另一方面 $\because$ $\forall\rho_i:X\times X\longrightarrow R$ 是 $d\times d$ 连续的。

$\therefore$ $\varphi_n(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}\rho_i(x,y)$ 也是 $X\times X$ 连续函数,且一致收敛于 $\rho(x,y)$

事实上, $$\rho(x,y)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}\rho_i(x,y)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x,y)$$

$\forall\varepsilon>0,\exists N$,当 $\forall n>N$ 时,有 $\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\varepsilon$,所以有

$$|\varphi_n(x,y)-\rho(x,y)|=\left|\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\rho_i(x,y)-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}\rho_i(x,y)\right|$$

$$=\left|\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\rho_i(x,y)\right|\leqslant\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\varepsilon$$

$\therefore$ ρ 在 $X\times X$ 上是 $d\times d$ 连续的

又由 $|\rho(x,A)-\rho(y,A)|\leqslant\rho(x,y)$

知 $f(x)=\rho(x,A)$ 是 T_d—连续的。事实上,若 $d(x_n,x)\longrightarrow0$,则 $(x_n,x)\longrightarrow(x,x)$,故有

$$|\rho(x_n,A)-\rho(x,A)|\leqslant\rho(x_n,x)\longrightarrow\rho(x,x)=0$$

所以, 若 $x\in\overline{A}_{Td}$,则

$$f(x)\in f(\overline{A}_{Td})\subset\overline{f(A)}=\overline{\{0\}}=\{0\}$$

所以 $\rho(x,A)=f(x)=0$

$\therefore$ $x\in\overline{A}_{T\rho}$

从而得 $\overline{A}_{Td}=\overline{A}_{T\rho}$

由引理 X 上必存在无界的连续实值函数 $f:X\longrightarrow R$

定义映射 $\rho^*:X\times X\longrightarrow R$ $\forall x,y\in X$

$$\rho^*(x,y)=\rho(x,y)+|f(x)-f(y)|$$

由定理1知:ρ^* 与 ρ 为 X 上拓扑等价之度量。

下证 ρ^* 在 X 上无界。

事实上,$\because f$ 为无界函数,必 $\exists\{x_i\}\subset X$,

使得 $\lim_i|f(x_i)|=\infty$,从而 $\forall x\in X$

$$d^*(x,x_i)=d(x,x_i)+|f(x_i)-f(x)|\geqslant|f(x_i)-f(x)|$$

令 $i\longrightarrow\infty$,上式取极限,得

$$\lim_i d^*(x,x_i)=+\infty$$

参 考 文 献

1 Lee,Hsiaochuan,On metric space in which every bounded set is totally bounded, formally accepted for publication

in the Bull. Calcutta Math. Soc. 1982
2 Kahtoporыч: 泛函分析(苏), 1990
3 蒲保明, 蒋继光, 胡淑礼. 拓扑学. 成都: 四川大学出版社, 1978
4 吴新生. 斯来尔洛夫度量化定理的一个应用. 重庆建筑工程学院学报, 1988(2)
5 Arhangelsk: A. V. New criteria for metrigability of an arbitrary T1 space. Dokl. Akad. Nauk SSS 141, 1051 - 1055, 1981
6 郭大均. 非线性泛函分析. 山东: 山东科技出版社, 1988
7 Kelley General Topologn, 1955
8 Metrigation. Amer. Math Mouth 1966, 73: 571 - 576

Generation and Properties of a Class of the Topological Equivalent Metric Spaces

Wu Xinsheng

(Dept. of Fundamental Sciences, Chongqing Jianzhu University, 400045)

Abstract　The study on topological equivalent metric is valuable both to theories and applications. Many studies had been doneon this aspect. by late Professor Li Xiaochuan This paper defines a new topological equivalent metric on the bounded and nototally bounded metric space, and some properties of the new metric space generated by the new topological equivalent metric are studied.

Key Words　Metrigation, topological equivalent metric

(编辑: 陈　蓉)