

# 混凝土微裂纹受单向拉伸应力作用的弹脆性静力破坏分析

14

TU375

66-69

王 成

邓安福

(重庆交通学院桥梁系 400074)

(重庆建筑大学建筑工程学院 400045)

**摘 要** 混凝土是典型的受拉脆性材料, 内部微裂纹的受荷扩展破坏是土木工程界十分关心的问题。本文采用裂纹线附近分析方法, 从平衡方程和混凝土材料的破坏准则出发, 对混凝土内受单向拉伸的 I 型微裂纹进行弹脆性静力破坏分析, 得出了单向拉伸应力大小与微裂纹脆断长度之间的关系。

**关键词** 混凝土微裂纹; 弹脆性静力破坏分析; 裂纹线附近分析方法; I 型平面应力微裂纹

中图分类号 TU375

拉伸应力

混凝土是由水泥、骨料和水组成的, 是目前应用最广泛的和典型的建筑材料, 它的力学性能及使用效果深受关注。通过显微镜对混凝土内部微观结构进行的研究表明, 混凝土材料即使在加载以前, 混凝土内部已有微裂缝存在, 这是由于水泥砂浆在混凝土硬化过程中干缩形成的, 砂浆与粗骨料接触面是混凝土内部的薄弱环节, 从而导致混凝土具有较低的抗拉强度。由于骨料和砂浆的刚度不同, 在受力过程中微裂纹必将继续扩展。

本文将混凝土内的微裂纹受到拉伸应力作用的情形视为受远场单向拉伸应力作用的 I 型平面应力裂纹, 用平衡微分方程和混凝土材料的破坏准则组成求解这一问题的基本方程, 用裂纹线附近分析方法将该偏微分方程组化为常微分方程组求解, 从而进行弹脆性静力破坏分析。

## 1 平衡微分方程和混凝土破坏准则

考虑混凝土内的一条微裂纹受到单向拉伸应力作用, 为便于研究起见, 视为受远场单向拉伸应力作用的 I 型平面应力裂纹, 如图 1 所示。不为零的应力分量为  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , 平衡微分方程:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

在裂纹线附近,  $\tau_{xy} \ll 1$ , 故三个主应力分别为:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (4)$$

$$\sigma_3 = 0 \quad (5)$$

混凝土材料的破坏准则采用常用的 Mohr - Coulomb 准则:

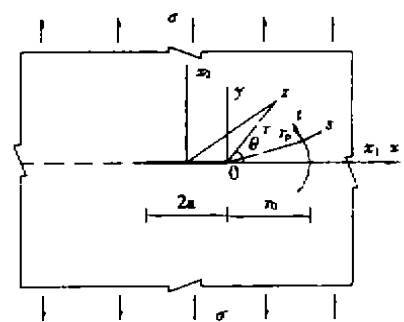


图 1 受单向拉伸的混凝土微裂纹及弹性应力场与脆断应力场的边界

收稿日期: 1999-03-01

王 成, 男, 1962 年生, 副教授

$$\sigma_1(1 + \sin\varphi) - \sigma_3(1 - \sin\varphi) = 2c \cos\varphi \quad (6)$$

将(3)、(5)式代入(6)式得:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = 4c \cos\varphi / (1 + \sin\varphi) \quad (7)$$

式中  $c, \varphi$  为混凝土材料的内聚力和内摩擦角, (7)式实为最大拉应力理论的表达式。

令

$$f_t = 2c \cos\varphi / (1 + \sin\varphi) \quad (8)$$

式中  $f_t$  为混凝土材料的极限抗拉强度。

## 2 混凝土裂纹线附近的脆断应力场

采用裂纹线分析方法, 与文[1]类同, 将脆断应力场按照  $y$  的幂级数展开到混凝土裂纹线附近区域, 由于  $y$  是无穷小量, 我们将  $y^3$  以上的项忽略不计, 得

$$\sigma_x = p_0(x) + p_2(x)y^2 \quad (9)$$

$$\sigma_y = q_0(x) + q_2(x)y^2 \quad (10)$$

$$\tau_{xy} = s_1(x)y \quad (11)$$

式中  $p_0(x), p_2(x), q_0(x), q_2(x)$  和  $s_1(x)$  分别为各场量的展开系数, 这里我们已经考虑了  $\sigma_x, \sigma_y$  关于裂纹线的对称性及  $\tau_{xy}$  关于裂纹线的反对称性。将式(9)~(11)代入平衡微分方程(1)、(2)和破坏条件(7), 比较等式两端  $y$  的同次幂的系数得下列方程组:

$$\frac{d p_0(x)}{d x} + s_1(x) = 0 \quad (12)$$

$$\frac{d s_1(x)}{d x} + 2q_2(x) = 0 \quad (13)$$

$$q_2(x)[q_0(x) - p_0(x)] + 2s_1^2 = 0 \quad (14)$$

$$q_0(x) = f_t \quad (15)$$

由此可见, 式(12)~(15)四个方程尚不能确定式(9)~(11)中的5个待定函数, 为此只有根据实际问题求其合理解答。经过分析, 对于这一问题, 设  $p_2(x) = 0$  是合适的。同时由式(12)~(14)可求得一组解, 代回式(9)~(11)得混凝土裂纹线附近脆断应力场的合理解答:

$$\sigma_x = p_0(\text{常数}) \quad (16)$$

$$\sigma_y = f_t = 2c \cos\varphi / (1 + \sin\varphi) \quad (17)$$

$$\tau_{xy} = 0 \quad (18)$$

## 3 混凝土裂纹线附近的弹性应力场

对图1所示的受单向均匀拉伸的裂纹问题, 可按经典方法求其应力场, 选取 Westergaard 应力函数

$$Z_1(z) = \frac{\sigma_1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (19)$$

其中  $z = x_1 + i x_2$  ( $i^2 = -1$ ) 是复变函数, 弹性应力分量为

$$\sigma_x = \operatorname{Re} Z_1(z) - y \operatorname{Im} Z_1'(z) - \sigma \quad (20)$$

$$\sigma_y = \operatorname{Re} Z_1(z) + y \operatorname{Im} Z_1'(z) \quad (21)$$

$$\tau_{xy} = -y \operatorname{Re} Z_1'(z) \quad (22)$$

在图1所示的极坐标系中,  $z = a + r e^{i\theta}$ , 对于裂纹线附近的弹性应力场, 可将式(20)~(22)按小  $\theta$  的幂级数展开, 并忽略  $\theta^3$  以上的项得:

$$\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{r(2a+r)}} \left[ (a+r) + \frac{4a^2 r + 5a^3}{2(2a+r)^2} \theta^2 \right] - \sigma \quad (23)$$

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{\sqrt{r(2a+r)}} \left[ (a+r) + \frac{4a^2 + 5a^3}{2(2a+r)^2} \theta^2 \right] \quad (24)$$

$$\tau_{\theta r} = \frac{\sigma}{\sqrt{r(2a+r)}} \frac{a^2}{2a+r} \theta \quad (25)$$

#### 4 裂纹线附近弹性场与脆断应力场的匹配结果

如图 1 所示,混凝土微裂纹在受拉伸过程中,当拉伸荷载较小时裂纹尖端附近由于应力集中而已经开始断裂,随着荷载的增加,断裂区域长度  $r_0$  逐渐增长。在混凝土裂纹扩展整体断裂之前,裂纹线附近断裂区与弹性区之间一定存在一个边界。为了得到裂纹线上的断裂区长度  $r_0$  与外加荷载  $\sigma$  之间的关系,我们必须将弹性区应力场和断裂区应力场在它们之间的边界上进行匹配,为此,定义这一边界为 [1] ~ [5]

$$r = r_p(\theta) = r_0 + r\theta^2 \quad (26)$$

式中已忽略了  $\theta$  的高次方项,由此可得该边界上任意一点的单位法向量  $n = (n_x, n_y)$  为:

$$n_x = 1 - \frac{1}{2} B_1 \theta^2 \quad (27)$$

$$n_y = B_1 \theta \quad (28)$$

式中  $B_1 = 1 - 2r_2/r_0c$

在裂纹线附近的弹性区与断裂区的边界上,沿着法向和切向的应力分别为:

$$\sigma_n = \sigma_x n_x^2 + \sigma_y n_y^2 + 2\tau_{xy} n_x n_y \quad (29)$$

$$\sigma_t = (n_x^2 - n_y^2) \tau_{xy} + (\sigma_x - \sigma_y) n_x n_y \quad (30)$$

将弹性区应力场 (23) ~ (25) 式及 (27)、(28) 式代入 (29) 和 (30) 式可得弹性与脆性断裂区边界上靠弹性区一侧的应力分量  $\sigma_n^e$  和  $\sigma_t^e$ ; 将断裂区应力场 (16) ~ (18) 式及 (27)、(28) 式代入 (29) 和 (30) 式可得该边界上靠断裂区一侧的应力分量  $\sigma_n^f$  和  $\sigma_t^f$ 。根据匹配条件,即在弹性区与断裂区边界上应力必须连续 ( $\sigma_n^e = \sigma_n^f, \sigma_t^e = \sigma_t^f$ ), 在此方程中比较等式两端的  $\theta$  同次幂的系数得一组方程,解之得:

$$r_0 = \left[ \sqrt{\frac{2\lambda^2 + 3 + \sqrt{16\lambda^2 + 9}}{6(1-\lambda^2)}} - 1 \right] a \quad (31)$$

$$\frac{r_2}{r_0} = \frac{a + 2r_0}{2(2a + r_0)} \quad (32)$$

$$P_0 = \left[ \frac{a + r_0}{\sqrt{r_0(2a + r_0)}} - 1 \right] \sigma \quad (33)$$

其中  $\lambda = \sigma/f_t = \sigma(1 + \sin\varphi)/2c \cos\varphi$ , 即拉伸应力与混凝土抗拉强度之比值。

式 (31) 即为所求的拉伸应力与裂纹线上脆断区长度之间的关系,如图 2 所示。这一关系表明,随着拉伸应力的增加,逐渐增大,当拉伸应力趋近于混凝土抗拉强度时,即裂纹扩展整体断裂,这一点正好满足裂纹线上的应力与外载的静力平衡条件。

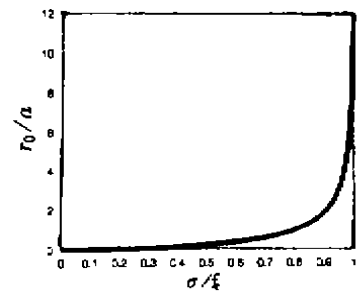


图 2 拉伸应力与裂纹线上脆断区长度之间的关系

#### 5 结 语

(1) 本文针对混凝土内的微裂纹受到远处拉伸应力场作用的情形,视为 I 型平面应力裂纹受力。运用裂纹线附近分析方法,将反映混凝土材料强度特性的 Mohr - Coulomb 破坏准则和静力平衡

方程共同组成求解的基本方程,分析裂纹线附近的弹性应力、脆断应力及其二者在边界上的匹配关系,得出了裂纹线上脆性断裂区长度与外荷载之间的关系。

(2)本文是通过静力平衡方程和混凝土材料的破坏条件出发求得结果的,因此称为弹脆性静力破坏分析。在目前对混凝土材料的断裂破坏机理还没有弄得十分清楚的今天,本文的分析可作为一种有意义的理论探索。

### 参 考 文 献

- 1 易志坚,王士杰. 理想弹塑性 I 型平面应力裂纹线场的精确解. 应用数学和力学, 1996, 17(4): 335 ~ 342
- 2 王 成, 易志坚. 断续节理在 II 型受载下的弹塑性分析. 岩石力学与工程学报, 1998, 17(2): 153 ~ 158
- 3 王 成, 张录坤. 有限宽板裂纹在裂纹面受两对反平面集中力时裂纹线场的弹塑性分析. 应用数学和力学, 1998, 19(6): 513 ~ 520
- 4 王 成, 张建辉, 邓安福. 共线张开型节理受压剪荷载的弹塑性分析. 重庆建筑大学学报, 1998, 20(4): 58 ~ 63
- 5 王 成, 干腾君, 邓安福. 有限宽板偏心裂纹在裂纹面受两对反平面集中力时裂纹线场的弹塑性分析. 工程力学增刊, 1998: 384 ~ 389.
- 6 王 成, 邓安福. 岩体断续节理受压剪荷载的弹塑性分析. 重庆建筑大学学报, 1997, 19(2): 31 ~ 35
- 7 Wang Cheng, Deng Anfu. Damage Mechanics Analysis of Fissures in Rockmass Loaded by Shear. Proc. Ninth Int. Conf of I-ACMAG, A. A. Balkema Publishers, Netherlands, Dec 1997 p725 ~ 728
- 8 Wang Cheng, Li Xiaohong, Deng Anfu. Study of Shear Strength on Collinear Multi - Cracked Plate, Proceedings of International Symposium on Strength Theories—Applications and Developments & Prospects for 21st Century. Science Press in Beijing and New York, ISBN 1 - 880132 - 34 - 6 £ - 1998: 841 - 846

## Elastic-Brittle Fracture Analysis of Micro-Crack in Concrete Loaded by Stretching Stresses

*Wang Cheng*

(Dept. of Bridge and Structure Engineering, Chongqing Jiaotong Institute, Chongqing, 400074)

*Deng Anfu*

(Faculty of Civil Engineering, Chongqing Jianzhu University, 400045)

**Abstract** The concrete is a typical brittle material. The fracture and propagating failure of the micro - crack in loaded concrete are very important problem in civil engineering. In this paper, from the equilibrium differential equations and failure criterion, the elastic - brittle static fracture analysis of the plane stress micro - crack in concrete loaded by stretching stresses was done near crack line. The relations between the stretching stresses and the length of brittle fracture zone on the crack line were obtained.

**Key Words** micro - crack in concrete; the elastic - brittle static fracture analysis; near crack line analysis method; plane stress micro - crack of mode I