文章编号:1006-7329(2000)01-0005-06

② 5-10

无粘结预应力混凝土连续梁的分析原理

TU378.20

简 斌[1], 刘宜丰[2]
(1.重庆建筑大学 建筑工程学院,重庆 400045;2.中国建筑西南设计研究院,四川 成都 610081)

摘要:采用能量法对无粘结预应力混凝土连续梁中次弯矩是否变化的问题进行了深入的研究,并与有粘结预应力连续梁进行对比。研究结果表明,在用增量法解无粘结预应力连续梁时,可以不必考虑初始次弯矩是否变化的问题,而将其作为一不变的量对待。而总的次弯矩却是变化的,这是因为无粘结梁中预应力筋应力增长引起了等效荷载的改变。

关 键 词:无粘结预应力;连续梁;次弯矩 混凝土连续梁
中图分类号:TU378.1 **文献标识码**:A

无粘结预应力混凝土结构因其在施工过程中不必象有粘结预应力那样预留孔道和灌浆,且无粘结预应力筋又能进行工业化生产,使施工过程变得和普通钢筋混凝土结构一样便利,因此无粘结预应力结构日益在工程建设中得以广泛推广。但是,在我国无粘结预应力的研究工作却大大滞后于工程实践。以至于最普遍、也是最重要之一的无粘结预应力连续梁板结构在设计上也存在重要理论问题未能较好解决。其中就包括连续梁、板结构中的次弯矩问题。由于无粘结预应力连续梁中的次弯矩问题与有粘结预应力连续梁中的次弯矩问题存在重大差异,因此有必要对其进行专门的理论研究。

所谓预应力次弯矩,简单说就是张拉预应力钢筋,连续梁将产生变形的趋势,但这种变形趋势受到赘余支承系统的约束。因此在那些赘余支点上产生了反力,并在梁内引起二次弯矩[1],此二次弯矩即为次弯矩。目前在国内外对有粘结预应力次弯矩的认识上存在变与不变两种对立的观点,而对于无粘结预应力混凝土结构中的次弯矩问题则还处于探索阶段。本文将采用能量法,并结合虚位移原理对无粘结预应力连续梁次弯矩演化的本质进行研究,同时与有粘结预应力连续梁次弯矩研究进行对比。本文中虽研究的是无粘结预应力连续梁问题,但其研究方法对无粘结预应力超静定结构中的次内力问题却具有普遍意义。

1 有粘结预应力连续梁两阶段受力分析模型

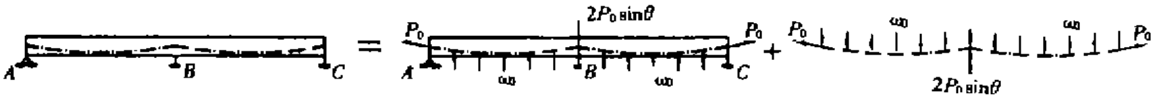
鉴于有粘结预应力结构与无粘结预应力结构的紧密联系,本文在此有必要先讨论有粘结问题。根据有粘结预应力混凝土连续梁在灌浆粘结前后不同的受力特性,可将其从预应力钢筋开始张拉至连续梁在加载中失效的整个过程划分为两个不同的受力阶段。第一阶段从张拉预应力钢筋开始至灌浆前;第二阶段从预应力钢筋和混凝土完全粘结开始至连续梁加载直至失效为止。

1.1 第一阶段(灌浆前)

本文研究的预应力连续梁中的预应力是通过张拉预应力钢筋来实现的,因此在孔道灌浆、预应力钢筋和混凝土粘结以前,虽然预应力已经一步步建立起来,但却没有形成真正意义上的后张有粘结预应力连续梁,而是普通钢筋混凝土连续梁和已张拉后的预应力钢筋的组合体。因为两者的变形相对独立,不宜作为一个整体进行受力分析,更适合作为两个研究对象分别进行受力分析,然后

收稿日期:1999-09-30
作者简介:简 斌(1967-),男,江西樟树人,博士,主要从事钢筋混凝土及预应力混凝土研究。

组合。本文称这种将预应力钢筋从原预应力连续梁内脱离出来的分析方法为“抽筋”法。在“抽筋”法中虽然将预应力钢筋与原梁体脱离，但两者又是紧密联系的，联系的纽带则是预应力等效荷载。对于普通钢筋混凝土连续梁这一部分而言，预应力钢筋是力的能动的作用者，连续梁则是力的被动的承受者。并且预应力钢筋锚固之后，作用在预应力钢筋上的力和作用在普通钢筋混凝土连续梁上的等效荷载是一对作用力和反作用力的关系，各自形成一组自平衡力系。在此，通过图1将预应力连续梁受力分析的第一阶段表示出来。图中预应力配筋形式为两段抛物线，且在三个支座处分别通过截面形心位置。P_0 为初始有效预加力，θ 为预应力筋在支座处的切线与水平方向的夹角，ω_0 为初始预加力沿梁长产生的单位竖向分力。



(a) 灌浆前的有粘结预应力连续梁 (b) 普通钢筋混凝土连续梁部分 (c) 预应力钢筋部分

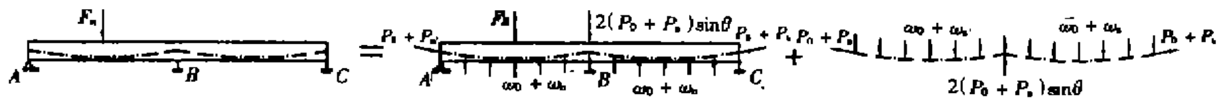
图1 有粘结预应力连续梁第一阶段受力模型

1.2 第二阶段(粘结后)

第二阶段的起始点为预应力钢筋和混凝土完全粘结之后，外载施加之前。此时与第一阶段结束前相比，如果忽略有关时间效应和预应力钢筋孔道所灌灰浆的影响，可认为预应力连续梁内混凝土和钢筋(包括普通钢筋和预应力钢筋)的应力、应变等均未发生改变。但其中却隐含着一个极重要的变化，也是第二阶段与第一阶段的根本区别。这就是从此之后，预应力钢筋部分和前面所提的普通钢筋混凝土连续梁部分将共同变形，形成真正意义上的后张有粘结预应力连续梁，并应作为一个整体进行受力分析，继续采用第一阶段中的“抽筋”法进行计算是不恰当的。

2 无粘结预应力连续梁受力分析模型

无粘结预应力连续梁在加载之前的受力分析同有粘结梁的受力分析是一样的。在此就不再复述。而加载后，无粘结梁的受力分析与有粘结梁则存在本质上的差别。因为施加外载后，无粘结梁由于没有进行灌浆，图1中的预应力钢筋部分始终无法与普通钢筋混凝土连续梁部分共同变形，仍不宜作为一个整体进行受力分析。因此，加载后无粘结预应力梁继续采用加载前的受力模型，用



(a)灌浆前的预应力连续梁 (b)普通钢筋混凝土连续梁部分 (c)预应力钢筋部分

图2 无粘结预应力连续梁加载时的受力模型

“抽筋”法进行分析。只不过此时连续梁上各部分的荷载有所变化。参见图2。q_n、P_n、ω_n 可以表示为：

$$F_n = \Delta F_1 + \Delta F_2 + \cdots\cdots \Delta F_k + \cdots\cdots + \Delta F_n \tag{1}$$

$$P_n = \Delta P_1 + \Delta P_2 + \cdots\cdots \Delta P_k + \cdots\cdots + \Delta P_n \tag{2}$$

$$\omega_n = \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2 + \cdots\cdots \Delta\omega_k + \cdots\cdots + \Delta\omega_n \tag{3}$$

其中：Δq_n、ΔP_n、$\Delta\omega_n$ 分别代表第 n 级荷载增量，以及该级荷载增量对应的力筋力增量和力筋力增量沿梁长产生的单位竖向分力增量。在本文的分析中外荷载虽然是以一集中荷载的形式出现，但对于其它形式的外加荷载同样适用。

3　无粘结预应力连续梁受力分析

3.1　基本假设

1) 一次加载；

2) 只考虑由非线性本构关系所引起的材料或物理非线性，而忽略几何非线性所产生的影响；

3) 忽略剪切变形的影响；

4) 假设无粘结力筋与梁内混凝土不存在任何摩擦。即认为预应力筋沿全长应力不变。

5) 忽略预应力筋轴向压力产生的二阶效应影响。

下面就以这些基本假设为前题条件，采用能量法对预应力连续梁的第二阶段受力进行理论分析。

3.2　施加第一级外荷载 ΔF_1

当施加第一级外荷载增量 ΔF_1 时，沿 ΔF_1 作用方向有相应的位移 $\Delta\delta_1$，其中 ΔF_1 与 $\Delta\delta_1$ 分别代表广义的力和位移。同时产生相应的等效荷载增量 ΔP_1 和 $\Delta\omega_1$ 等。"抽筋"梁上的总荷载如图 3 所示。

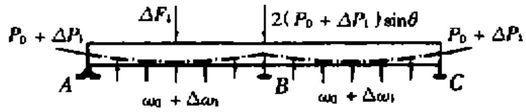


图 3　施加第一级外荷载 ΔF_1

因为此时连续梁尚未开裂，故暂不考虑裂缝的影响。根据能量守恒原理，外力所做的功，将作为连续梁内应变能的增量。首先计算外力功：

$$\text{外力功} = P_0' \times \Delta\delta_1' + \int_0^{\Delta\delta_1}\Delta F_1(\delta)\,\mathrm{d}\,\delta + \int_0^{\Delta\delta'_1}\Delta P_1'(\delta')\,\mathrm{d}\,\delta' \tag{4}$$

在此，P_0'为有效预应力产生的等效荷载，包括 P_0 和 ω_0 等在内；$\Delta P_1'$为第一级外荷载增量 ΔF_1 产生的等效荷载增量，包括 ΔP_1 和 $\Delta\omega_1$ 等在内；δ 为外荷载 ΔF_1 对应的位移，当 δ 由 0 增至 $\Delta\delta_1$ 时，$\Delta F_1(\delta)$ 由 0 增至 ΔF_1；δ'为等效荷载增量 $\Delta P_1'$对应的位移，当 δ'由 0 增至 $\Delta\delta_1'$时，$\Delta P_1'(\delta')$ 由 0 增至 $\Delta P_1'$。

要计算应变能的增量，则可从梁中取出任意一微段 d x 来进行研究，该微段上的内力如图 4 所示，其中忽略轴向变形和剪切变形的影响。其中 ΔM_1 与 $\Delta\theta_1/2$ 分别表示 ΔF_1 与 $\Delta P_1'$作用后梁截面上的弯矩增量和转角增量，M_{S0} 为初始次弯矩，其它同前。在此，初始次弯矩指的是张拉结束后，采用弹性方法计算出来的次弯矩。截面上的外力对于连续梁来说属于内力，但对于所取出的微段来说却又是外力。如果同样对这一微段应用能量守恒原理，则可求得该微段应变能的增量。由：

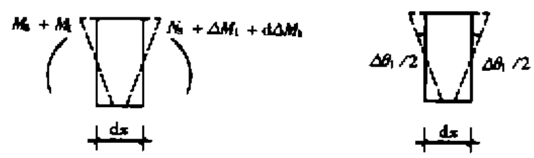


图 4　微段上的外力和变形

微段应变能增量 = 该微段上外力功

$$\text{该微段上外力功} = \int_0^{\frac{\Delta\theta_1}{2}}(M_{S0}+\Delta M_1(\theta))\,\mathrm{d}\,\theta + \int_0^{\frac{\Delta\theta_1}{2}}[M_{S0}+\Delta M_1(\theta)+\mathrm{d}\,\Delta M_1(\theta)]\,\mathrm{d}\,\theta \cong M_{S0}\,\Delta\theta_1 + \int_0^{\Delta\theta_1}\Delta M_1(\theta)\,\mathrm{d}\,\theta \tag{5}$$

$$\text{即：微段应变能增量} = M_{S0}\,\Delta\theta_1 + \int_0^{\Delta\theta_1}\Delta M_1(\theta)\,\mathrm{d}\,\theta \tag{6}$$

$$\text{或写成：微段应变能增量} = M_{S0}\,\Delta\varphi_1\mathrm{d}x + \int_0^{\Delta\varphi_1}\Delta M_1(\varphi)\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,x \tag{7}$$

其中 $\Delta\varphi_1$ 为截面曲率增量。再将上式微段应变增量沿连续梁全长积分，即可求得整个连续梁应变能的增量为：

$$连续梁应变能增量 = \int_L [M_{S0}(x)\Delta\varphi_1(x) + \int_0^{\Delta\varphi_1(x)} \Delta M_1(x,\varphi)\mathrm{d}\varphi]\mathrm{d}x \tag{8}$$

此时再以整个连续梁为研究对象，应用能量法原理，外力功与连续梁的应变能相等，由式(4)和式(8)可得：

$$P_0' \times \Delta\delta_1' + \int_0^{\Delta\delta_1}\Delta F_1(\delta)\mathrm{d}\delta + \int_0^{\Delta\delta'_1}\Delta P_1'(\delta')\mathrm{d}\delta' = \int_L [M_{S0}(x)\Delta\varphi_1(x) + \int_0^{\Delta\varphi_1(x)}\Delta M_1(x,\varphi)\mathrm{d}\varphi]\mathrm{d}x \tag{9}$$

根据质点和质点系的虚位移原理，质点和质点系处于平衡状态的必要和充分条件是作用在其上所有的力对于虚位移所做的总功为零。对于这里所研究的预应力连续梁，也可以将其看成是一个质点系，作用在其上的力可以分为外力和内力两组。其中外力指的是包括自重及等效荷载在内的外荷载和支座反力，内力则为截面上各部分间的相互作用力。因此，对于一根处于平衡状态下的预应力连续梁，其外力和内力对任意给定的虚位移所做的总虚功也必然等于零[2]，即：

$$W_e + W_i = 0 \tag{10}$$

式中 W_e、W_i 分别代表外力和内力对虚位移所做的虚功。

连续梁上作用外荷载 ΔF_1 与 $\Delta P_1'$之前，除有效预应力产生的等效荷载 $\Delta P_0'$外，尚无其它外荷载，并且也是处于平衡状态。如果将 ΔF_1 与 $\Delta P_1'$作用下产生的微小位移当成是虚位移时，利用虚位移原理进行分析，结果可求得：

$$P_0' \times \Delta\delta_1' = \int_L M_{S0}(x)\Delta\varphi_1(x)\mathrm{d}x \tag{11}$$

将这一结果代入式(9)，则有：

$$\int_0^{\Delta\delta_1}\Delta F_1(\delta)\mathrm{d}\delta + \int_0^{\Delta\delta'_1}\Delta P_1'(\delta')\mathrm{d}\delta' = \int_0^{\Delta\varphi_1(x)}\Delta M_1(x,\varphi)\mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}x \tag{12}$$

如果假设图 3 中“抽筋”梁截面的 $M-\varphi$ 曲线如图 5 所示，图中 M_L 为外载 ΔF_1 与 $\Delta P_1'$产生的弯矩，φ 为截面曲率。当 ΔF_1 足够小时，则上式还可以写成：

$$\int_0^{\Delta\delta_1}\Delta F_1(\delta)\mathrm{d}\delta + \int_0^{\Delta\delta'_1}\Delta P_1'(\delta')\mathrm{d}\delta' = \int_L \Delta M_1(x)\frac{\Delta M_1(x)}{EI_0(x)}\mathrm{d}x \tag{13}$$

其中 $EI_0(x)$ 表示预应力连续梁张拉后梁截面上的初始刚度。上式的含义表明：当在预应力连续梁上施加第一级外荷载时，截面弯矩的增量就相当于将此级外荷载增量和由它产生的等效荷载增量作用在初始刚度的“抽筋”连续梁上，其截面上的弯矩即为上述预应力连续梁截面弯矩的增量，这也正是对无粘结预应力连续梁采用增量法的表达式。在此，有效预应力产生等效荷载的作用仅在 $EI_0(x)$中得到体现。在用增量法求解时，它对连续梁后续加载的影响是通过它对连续梁刚度的贡献来实现的。此时截面上的弯矩为：

$$M_1 = M_{S0} + \Delta M_1 \tag{14}$$

可以发现初始次弯矩是以一不变量的形式出现的，它仅通过改变“抽筋”梁初始刚度影响后续加载。如果将 ΔF_1 与 $\Delta P_1'$作用产生的弯矩增量 ΔM_1 区分开来，既写成：

$$\Delta M_1 = \Delta M_{F1} + \Delta M_{S1} \tag{15}$$

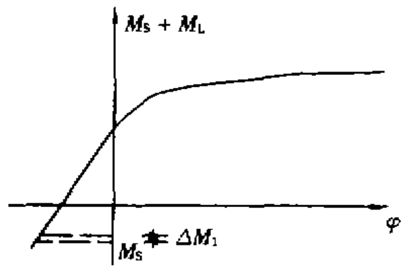


图 5 预应力连续梁 M－φ 曲线示意图

$$M_1 = \Delta M_{S0} + \Delta M_{F1} + \Delta M_{S1} \tag{16}$$

其中 ΔM_{F1} 和 ΔM_{S1} 分别为 ΔF_1 和 $\Delta P_1'$产生的弯矩。因为 $\Delta P_1'$为预应力等效荷载增量，在此循惯例将其产生的弯矩用次弯矩增量的形式表示。截面上总的次弯矩即为：

$$M_{S1} = M_{S0} + \Delta M_{S1} \tag{17}$$

可见初试次弯矩虽然没有改变，但总的次弯矩却是变化的。这一点与有粘结预应力连续梁有所不同，在有粘结连续梁中不存在预应力筋应力改变引起次弯矩变化的问题。

有必要再来看一下有粘结预应力连续梁的分析结果。当对未"抽筋"的有粘结预应力连续梁采用上述方法求解可得[3]：

$$\int_0^{\Delta\delta_1}\Delta F_1(\delta)\mathrm{d}\,\delta=\int_L\Delta M_1(x)\frac{\Delta M_1(x)}{EI_0(x)}\mathrm{d}\,x \tag{18}$$

$$M_1=\Delta M_{S0}+\Delta M_{F1} \tag{19}$$

通过与式(13)、(16)对比可以发现，有粘结连续梁与无粘结连续梁相同之处在于初始次弯矩仅对初始截面刚度产生影响，其计算量不变；不同之处在于无粘结连续梁次弯矩总量要产生变化，而有粘结连续梁则无此变化。其根本原因是无粘结连续梁采用了"抽筋"模型，而有粘结连续梁采用的是未"抽筋"模型。在有粘结连续梁的受力过程中，预应力筋虽然也产生力筋增量，但不产生真正意义上的等效荷载。有粘结梁更详细分析可参见文献[3]。

3.3　施加第 n 级外荷载 ΔF_n

施加第 n 级外荷载 ΔF_n 时的计算简图如图 3(b)所示。与施加第一级外荷载增量所不同的情况是，施加第 n 级外荷载增量时的初始状态如图 6 所示。采用施加第一级外荷载同样的方法进行分析。并将 ΔF_n 作用下产生的位移当成是虚位移。经计算分析可得：

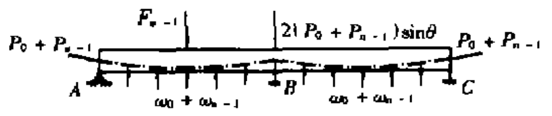


图 6　施加第一级外荷载 ΔF_1

$$\int_0^{\Delta\delta_n}\Delta F_n(\delta)\mathrm{d}\,\delta+\int_0^{\Delta\delta'_n}\Delta P_n'(\delta')\mathrm{d}\,\delta'=\int_L\Delta M_n(x)\frac{\Delta M_n(x)}{EI_{n-1}(x)}\mathrm{d}\,x \tag{20}$$

其中：$\Delta P_n'$代表第 n 级外荷载 ΔF_n 引起预应力筋应力增长产生的等效荷载增量；δ 为外荷载增量 ΔF_n 对应的位移，当 δ 由 0 增至 $\Delta\delta_n$ 时，$\Delta F_n(\delta)$由 0 增至 ΔF_n；δ'为等效荷载增量 $\Delta P_n'$对应的位移，当 δ'由 0 增至 $\Delta\delta_n'$时，$\Delta P_n'(\delta')$由 0 增至 $\Delta P_n'$；$EI_{n-1}(x)$为施加第 n 级荷载时的截面刚度，即前一级荷载作用后梁截面刚度；$\Delta M_n(x)$为对应第 n 级荷载的截面弯矩增量。并且 $\Delta M_n(x)$可以表示为：

$$\Delta M_n=\Delta M_{Fn}+\Delta M_{Sn} \tag{21}$$

式中 ΔM_{Fn}、ΔM_{Sn} 分别对应 ΔF_n 和 $\Delta P_n'$在前一级荷载作用后梁刚度为 $EI_{n-1}(x)$ 时产生的弯矩。至此，该无粘结预应力连续梁截面上总弯矩 M_n 和总次弯矩 M_{Sn} 可表示为：

$$M_n=M_{S0}+\Delta M_1+\Delta M_2\cdots\cdots+\Delta M_n \tag{22}$$

$$M_{Sn}=M_{S0}+\Delta M_{S1}+\Delta M_{S2}\cdots\cdots+\Delta M_{Sn} \tag{23}$$

对于在后续加载过程中可能出现的梁开裂问题，其处理方法与有粘结梁完全一样，可参见文献[3]。本文限于篇幅不再详述。

4　结　论

通过以上的分析计算，可以得出以下几条结论：

1) 以"抽筋"梁的模型，用能量法分析无粘结预应力连续梁时，可以不必考虑初始次弯矩是否变化的问题。因为随着外荷载的作用，次弯矩的独立概念已不复存在。虽然在采用增量法进行计算时仍然存在初始次弯矩这个量，但它已不再具有初始时期的物理意义，它对后续加载的影响仅仅体现在其对连续梁截面刚度等的贡献之中。

2) 采用该方法进行全过程分析时，无粘结梁总的次弯矩是变化的。因为随着预应力筋应力的增长，等效荷载产生增量，从而导致次弯矩增量。这一次弯矩增量可以将等效荷载增量作用在前一级荷载增量作用后的梁的刚度上求得。总次弯矩可以表示为：$M_S=M_{S0}+\Delta M_{S1}+\Delta M_{S2}\cdots\cdots+\Delta M_{Sn}$

3) 可以采用增量法进行无粘结预应力连续梁的全过程非线性分析，当作用第 n 级荷载增量时，梁截面上的弯矩表达式可以表示为：$M=M_{S0}+\Delta M_1+\Delta M_2\cdots\cdots+\Delta M_n$，在这一表达式中 M_{S0} 表

示的是初始次弯矩，ΔM_1、ΔM_2、……、ΔM_n 分别表示 ΔF_1、ΔF_2、……、ΔF_n 以及对应等效荷载增量，作用在前一级荷载增量作用后的梁的刚度上求得的截面弯矩增量。

参考文献：

[1] [美]H·尼尔森著．姚玲森，沈莲芬合译．预应力混凝土设计[M]．北京：人民交通出版社，1984

[2] 孙训方，方孝淑，关来泰编．材料力学（第二版）[M]．北京：高等教育出版社，1987

[3] 简 斌．对后张有粘结部分预应力混凝土连续梁次内力及内力重分布规律的试验研究[D]．重庆建筑大学，1999.1

Analysis Theory of Unbonded Prestressed Concrete Continuous Beams

JIAN Bin[1], *LIU Yi-feng*[2]

(1. Faculty of Civil Engineering, Chongqing Jianzhu University, 400045, China; 2. China Southwest Architecture Design and Research Institute, Chengdu, 610081, China)

Abstract: In this paper, the energy method has been used to study the change of the secondary moment of unbonded prestressed concrete continuous beams and it has been contrasted with bonded prestressed beams. The question, whether the secondary moment changes or not while loading, was answered. It shows that the primary secondary moment does not change when increment method is adopted to study the beams, but the total secondary moment will change while the force in prestressed reinforcement changes.

Keywords: unbonded prestressed concrete; continuous beams; secondary moment