(11)
第22卷 第6期 重庆建筑大学学报 Vol. 22 No. 6
2000年12月 Journal of Chongqing Jianzhu University Dec. 2000

文章编号:1006-7329(2000)06-0041-04

41-44

稳态 Navier-Stokes 问题边界积分方程的求积方法与外推*

吕 涛
(四川大学 数学学院,成都 610041)

O 351.3

摘要:采用简单迭代法解二维稳态 Navier—Stokes 问题的非线性边界积分方程组,迭代的每一步皆归结于解非齐次 Stokes 问题的边界积分方程组,故可用作者在[1]中提供的高精度机械求积方法和外推法得到高精度解。本方法不仅能用外推提高精度,而且省计算。

关 键 词:Navier-Stokes 问题;边界积分方程;求积方法
中图分类号:0351.3 **文献标识码**:A

1 导 论

考虑平面 Navier-Stokes 方程的第一边值问题.

$$-\nu\Delta \boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot \mathrm{grad}\boldsymbol{u}+\mathrm{grad}p=\boldsymbol{f}\quad(\Omega) \tag{1a}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u}=0\quad(\Omega) \tag{1b}$$

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0\quad(\Gamma) \tag{1c}$$

其中 Γ 可以是多连通的,如 $\Gamma=\Gamma_0\bigcup_{i=1}^{m}\Gamma_i$,$\Gamma_0$和 Γ_i 是简单闭曲线,并且 $\Gamma_i(i=1,\cdots,m)$被 Γ_0所包围。若 Γ_0不存在,则方程(1)便是外问题;反之,为内问题。借助 Stokes 方程的基本解

$$\begin{cases}U_{ik}(x,y)=[\delta_{ik}\ln(1/|x-y|)+(x_i-y_i)(x_k-y_k)/|x-y|^2]/(4\pi\nu)\\ P_i(x,y)=(x_i-y_i)/(2\pi|x-y|^2)\qquad i,k=1,2\end{cases} \tag{2}$$

方程(1)被转化为关于密度函数 t_1,t_2和常数 c_1,c_2的积分方程组[3,4]

$$U_{0k}(x)=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Gamma}U_{ik}(x-y)t_i(y)\mathrm{d}s_y+c_k+\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}F_i(u)U_{ik}(x,y)\mathrm{d}y\qquad\forall x\in\Gamma,k=1,2 \tag{3a}$$

$$\int_{\Gamma}t_i(y)\mathrm{d}s_y=0,\quad i=1,2 \tag{3b}$$

这里

$$F_i(\boldsymbol{u})=f_i-\sum_{j=1}^{2}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j},\ i=1,2 \tag{4}$$

欲使方程(3)解唯一,还应补充约束条件[1]

$$\sum_{i=1}^{2}\int_{\Gamma}t_i(y)n_i(y)\mathrm{d}s_y=0 \tag{5}$$

这里(n_1,n_2)是 Γ 的单位外法线向量,一旦非线性积分方程组(3)和(5)被解出,则速度向量 $\boldsymbol{u}$ 和压力 p 在 $\mathscr{R}\backslash\Gamma$ 的值由计算积分

$$u_k(x)=\sum_{i=1}^{2}\Big[\int_{\Gamma}U_{ik}(x-y)t_i(y)\mathrm{d}s_y+\int_{\Omega}U_{ik}(x-y)F_i(u)\mathrm{d}y\Big]+c_k\qquad k=1,2 \tag{6a}$$

$$p(x)=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Gamma}P_i(x-y)t_i(y)\mathrm{d}s_y \tag{6b}$$

---

* 收稿日期:2000-05-01
作者简介:吕 涛(1940-),男,四川乐山人,教授,主要从事计算数学的研究。

得到。由于(3a)中 $F_i(u)$ 涉及未知函数 u 和它的导数，它们和密度函数关系又由(6a)相关联，故直接解方程(3)和(5)是很难的，文献[2]中建议用迭代法计算，每步要计算 u 及其导数的内点值，但以下引理表明，可以免去内点导数的计算。

引理1 成立

$$\sum_{j,k=1}^{2}\int_{\Omega}u_k\frac{\partial u_j}{\partial x_k}U_{ij}\mathrm{d}x=-\sum_{j,k=1}^{2}\int_{\Omega}u_ku_j\frac{\partial U_{ij}}{\partial x_k}\mathrm{d}x \tag{7}$$

证明：由恒等式

$$I_0=\frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\sum_{j,k=1}^{2}u_ku_jU_{ij}\Big)=\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}u_jU_{ij}+\sum_{j,k=1}^{2}u_k\frac{\partial u_j}{\partial x_k}U_{ij}+\sum_{j,k=1}^{2}u_ku_j\frac{\partial U_{ij}}{\partial x_k}=I_1+I_2+I_3$$

显然，由 $\mathrm{div}\boldsymbol{u}=0$ 得 $I_1=0$，更由流体不穿过 Γ，知 $\sum_{k=1}^{2}u_kn_k|_{\Gamma}=0$，导出

$$\int_{\Omega}I_0\mathrm{d}x=-\int_{\Gamma}\sum_{j,k=1}^{2}u_ju_kn_kU_{ij}\mathrm{d}x=0 \tag{8}$$

这便证得(7)成立。

2 迭代方法

解 Navier－Stokes 方程的简单迭代法的每步是解 Stokes 方程，算法如下：设 u^0 作为(1)弃去非线性项的 Stokes 方程的解已被解出，若 u^n 已得到，u^{n+1} 满足 Stokes 方程

$$\begin{cases}-v\Delta\boldsymbol{u}^{n+1}+\mathrm{grad}p^{n+1}=\boldsymbol{f}-\boldsymbol{u}^n\mathrm{grad}\boldsymbol{u}^n & (\Omega)\\ \mathrm{div}\boldsymbol{u}^{n+1}=0 & (\Omega)\\ \boldsymbol{u}^{n+1}=u_0 & (\Gamma)\end{cases} \tag{9}$$

专著[6]已证明：若广义雷诺数充分小，乃至

$$\alpha=4Nv^{-2}\|\boldsymbol{f}\|_*<1 \tag{10}$$

则上述简单迭代收敛，且有误差估计

$$|\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}|\leqslant\alpha^{n+1}|\boldsymbol{u}^0-\boldsymbol{u}|_1 \tag{11}$$

这里有关记号意义请见[6]。

由于迭代(9)可以按上节方法转化为解边界积分方程组，故得到解 Navier-Stokes 方程的算法如下：

步1 解 Stokes 方程求出初始 u^0，置 $n=0$。

步2 求密度函数 t_1^{n+1}, t_2^{n+1} 及常数 c_1^{n+1}, c_2^{n+1} 满足边界积分方程

$$u_{0k}(x)=\sum_{i=1}^{2}\Big[\int_{\Gamma}U_{ik}(x-y)t_i^{n+1}(y)\mathrm{d}s_y+\int_{\Omega}f_i(y)U_{ik}(x-y)\mathrm{d}y\Big]$$
$$+c_k^{n+1}+\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\Omega}u_i^nu_j^n\frac{\partial U_{kj}}{\partial x_i}\mathrm{d}x,\quad x\in\Gamma,\quad k=1,2 \tag{12a}$$

$$\int_{\Gamma}t_i^{n+1}(x)\mathrm{d}s_x=0,\quad i=1,2 \tag{12b}$$

$$\sum_{i=1}^{2}\int_{\Gamma}t_i^{n+1}(x)n_i(x)\mathrm{d}s_x=0 \tag{12c}$$

步3 按下面公式计算内点值

$$u_k^{n+1}(x)=\sum_{i=1}^{2}\Big[\int_{\Gamma}U_{ik}(x-y)t_i^{n+1}(y)\mathrm{d}s_y+\int_{\Omega}f_i(y)U_{ik}(x-y)\mathrm{d}y\Big]$$
$$+c_k^{n+1}+\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\Omega}u_i^nu_j^n\frac{\partial u_{kj}}{\partial y_i}\mathrm{d}y,\quad x\in\Omega,k=1,2 \tag{13}$$

步4 若 $\alpha^{n+1}<\epsilon$ 则迭代终止，否则置 $n=n+1$ 转步2。

3 离散方法

实际计算必须使用数值方法解 Stokes 边界积分方程(12),用求积公式计算(13)。解 Stokes 边界积分方程通常用 Galerkin 方法或配置法。这两种方法缺点是离散矩阵元素生成要计算反常积分(Galerkin 方法甚至要算二重反常积分),由于矩阵是满阵,因此大量机时消耗在生成矩阵元素上。在[1]中,作者借助求积公式,给出解齐次 Stokes 边界积分方程方法,证明了近似解误差有 h^3幂的渐近展开,故能用 h^3－Richardson 外推提高精度阶。下面我们用此方法解 Navier-Stokes 方程,为简单起见,设 Γ 是单连通的光滑闭曲线(多连通情形无本质困难),可用参数方程描述为 $x(s)=[x_1(s),x_2(s)]:[(0,2\pi)\to\Gamma]$。且 $|x'(s)|^2=|x'(s)|^2=[x_1(s)]^2+[x_2(s)]^2>0$。取步长 $h=2\pi/m, s_i=ih, i=0,\cdots,m-1$。由于(12a)和(13)关于 Ω 上积分计算需要回避奇点。我们假定有两套求积公式

$$\int_\Omega F(y)\mathrm{d}y-\sum_{i=1}^{N_k}\omega_i^k F(A_i^k)=o(h^5),\quad k=0,1 \tag{14}$$

且两套求积公式的基点无一相同,则可据以下步骤求解:

步1 置 $u_i^0(A_l^0)=0,\quad i=1,2;\quad l=1,\cdots,N_0,\quad n=0$

步2 置 $n\equiv M(\mathrm{mod}2)$,据(12a)求离散方程的右端项

$$g_{rm}(S_k)=u_{0r}(z_k)-\sum_{i=1}^{2}\sum_{l=1}^{N_M}\omega_l^M f_i(A_l^M)U_{ir}(z_k-A_l^M)-\sum_{i,j=1}^{2}\sum_{l=1}^{N_M}\omega_l^M f_i(A_l^M)U_{ir}(z_k-A_l^M)$$
$$k=0,\cdots,m-1;\quad r=1,2 \tag{15}$$

这里 $z_k=[x_1(s_k),x_1(s_k)]$, $U_{rj,i}=\dfrac{\partial}{\partial y_i}U_{rj}$

步3 解$2m+3$个未知数的线性方程组

$$\begin{bmatrix} A_{0m}+K_{0m} & K_{0m} & 1 & 0 & n_1 \\ K_{0m} & A_{0m}+K_{4m} & 0 & 1 & n_2 \\ l_m(1,.) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_m(1,.) & 0 & 0 & 0 \\ l_m(n_1,.) & l_m(n_2,.) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_{1m}^{n+1} \\ t_{2m}^{n+1} \\ c_1^{n+1} \\ c_2^{n+1} \\ \mu \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} g_{1m} \\ g_{2m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

这里 A_{0m},K_{0m},K_{3m}和 K_{4m}是 m 阶方阵,块结构矩阵意义及生成方法见[1]。

步4 置 $n+1=T(\mathrm{mod}2)$,据(3a)用求积公式计算 $u_k^{n+1}(A_l^T), l=1,\cdots,N_T$,如下

$$u_k^{n+1}(A_l^T)=\sum_{i=1}^{2}\{h\sum_{r=0}^{m-1}U_{ik}(A_l^T-z_r)t_i^{n+1}(r)+\sum_{r=1}^{N_M}\omega_r^M f_i(A_r^M)U_{ik}(A_l^T-A_l^M)\}+c_k^{n+1}$$
$$+\sum_{i,j=1}^{2}\sum_{r=1}^{N_M}\omega_r^M u_i(A_r^M)u_j(A_r^M)U_{kj,i}(A_l^T-A_r^M)\qquad k=1,2 \tag{17}$$

步5 若

$$\frac{1}{N_T}\sum_{l=1}^{N_T}\sum_{k=1}^{2}|u_k^{n+1}(A_l^T)-u_k^{n-1}(A_l^T)|\leqslant\varepsilon$$

则迭代终止,否则置 $n=n+1$转步2。

也可使用一套求积公式,但奇点的权要按乘积积分法则(Product rule)算。

致谢 引理1及其证明,曾与祝家麟先生讨论,谨向祝先生表示感谢。

参考文献:

[1] 吕涛,黄晋.定常 Stokes 问题的边界积分的高精度求积方法与外推[J].计算物理,1999,16(6):511~567

[2] 吕涛,黄晋.解第一类边界积分方程的机械求积法与外推[J].计算数学,2000,22(1):59~72

[3] 祝家麟. 定常 Stokes 问题的边界积分方程法[J]. 计算数学, 1986, 8(3): 281~289

[4] Zhu Jialin et al. Boundary element method for numerical solutions of steady Navier—Stoles equations[M]. Numerical Methods for Partial Differential Equations. World Scientific, 1994. 176~184

[5] 余德浩. 自然边界元方法的数学理论[M]. 北京: 科学出版社, 1993

[6] 李开泰, 黄艾香. 有限元方法及其应用[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1988

Quadrature Methods and Their Extrapolations for Solving Boundary Integral Equations of Steady Navier-Stokes Problems

LÜ Tao

(Institute of Mathematics. Cichuan University, Chengdu, 610041 China)

Abstract: This paper presents an iteration method of solving non-linear boundary integral equations (BIE) of the plane Navier-Stokes problem, which each step of the iteration is to solve a linear BIE of nonhomogeneous Stokes problem. Using the quadrature methods of [1], we give a new algorithm with a high order accuracy. The algorithm not only saves work, but also the accuracy can be improved by Richardson extrapolation.

Key words: Navier-Stokes problem; boundary integral equation; quadrature mehtod

(上接第36页)

Numerical Analysis of Viscous Fluid Flow past a Circular Cylinder near a Plane with Boundary Element Method

LIN Chang-sheng

(Department of Physics, Inner Mongolia Teachers' College for Nationalities. Tongliao 028043, China)

Abstract: The boundary element method was used for incompressible viscous fluid flow past a circular cylinder near a plane. The various phases of the flow passing the cylinder are studied numerically with different g/d. The numerical simulation of velocity fields is in good agreement with Davis' theoretical results and Taneda's experiments. In particular, the distributive curves of the surface force and the pressure on the circular cylinder were calculated numerically.

Keywords: low-Reynolds-number; incompressible viscous fluid flow; flow past a cylinder; boundary element method