

文章编号: 1006-7329(2000)06-0045-05

# 粘性流下物体撞水分析的 Laplace 变换 ——边界元耦合方法

钱 勤, 黄玉盈<sup>√</sup>, 李其中, 邹时智

(华中科技大学 力学系, 武汉 430074)

03d7

**摘要:**对刚性物体撞水作用下的粘性流场分析,提出了一个 Laplace 变换—边界元耦合方法。文中基于线性化的二维 Navier—Stokes 方程,首先利用 Lamb 变换,在 Laplace 变换域内将不可压粘性流体的控制方程化为求解相应的势函数和流函数,它们分别满足 Laplace 方程和 Helmholtz 方程,采用边界元方法,获得了这两类方程的解答。然后,借助 Laplace 数值逆变换方法,得到了时间域的解。

**关键词:**粘性流场; 撞水响应; 边界元法; Laplace 数值逆变换

中图分类号: O327

文献标识码: A

近20年来,撞水问题的研究已取得了长足的进展,其中主要工作有 Geers<sup>[1]</sup>、Belytschko<sup>[2]</sup>和钱勤<sup>[3]</sup>等。这些工作都有一定的局限性,有的未知量数目多耗费机时,有的不便求解半无限域问题。本文在总体上克服了上述前人工作的不足,既计及流体粘性的影响,又充分发挥了边界元方法在解半无限流场的优势。由于文中在 Laplace 变换域内利用 Lamb 变换将不可压粘性流的控制方程化为求解 Laplace 方程和 Helmholtz 方程,从而给边界元方法解决二维粘性流问题创造了条件。最后再借助 Durbin<sup>[4]</sup>的 Laplace 数值逆变换技术得到时间域的解。

## 1 Lamb 变换下的流场控制方程

对于2-D 牛顿流体模型,应力和变形速度有下列关系:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= -P + 2\mu \frac{\partial U}{\partial x}, \sigma_{yy} = -P + 2\mu \frac{\partial V}{\partial y}, \sigma_{xz} = -P \\ \sigma_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right), P = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中,  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz})$  和  $(U, V)$  分别为点的应力张量和速度分量,  $P$  表示一点所受的平均压力,它们均是坐标和时间的函数,  $\mu$  为动力粘性系数。

对于不可压流体,线性化后的 Navier—Stokes 方程可写为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) - g \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

式中,  $\rho$  为流体的密度,  $g$  表示重力加速度。

• 收稿日期: 2000-05-01

基金项目: 国防科技预研基金资助项目 (98J14. 8. 1. JW05)

作者简介: 钱 勤 (1967-), 男, 副教授, 主要从事流固耦合力学和数值方法的研究。

将(1)~(3)式对时间进行 Laplace 变换,在零初始条件的前提下有

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx} &= -\bar{P} + 2\mu \frac{\partial \bar{U}}{\partial x}, \bar{\sigma}_{yy} = -\bar{P} + 2\mu \frac{\partial \bar{V}}{\partial y}, \bar{\sigma}_{xz} = -\bar{P} \\ \bar{\sigma}_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \right), \bar{P} = -\frac{1}{3} (\bar{\sigma}_{xx} + \bar{\sigma}_{yy} + \bar{\sigma}_{zz}) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} s\bar{U} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} \right) \\ s\bar{V} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial y^2} \right) - g \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

式中,  $\bar{U}(x, y, s)$  表示  $U(x, y, t)$  的拉氏变换。

由 Lamb 变换, 引进势函数  $\bar{\Phi}(x, y, s)$  和流函数  $\bar{\Psi}(x, y, s)$  表示  $\bar{U}, \bar{V}$  和  $\bar{P}$ :

$$\bar{U} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial y}, \bar{V} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x}, \bar{P} = -\rho s \bar{\Phi} - \rho g y \quad (7)$$

将其代入(6)和(5)式, 可得

$$\nabla^2 \bar{\Phi} = 0, \nabla^2 \bar{\Psi} + k^2 \bar{\Psi} = 0 \quad (8)$$

$$k^2 = -\frac{\rho s}{\mu} \quad (9)$$

由上可知, 势函数  $\bar{\Phi}$  满足 Laplace 方程, 而流函数则满足 Helmholtz 方程。

设  $\Gamma_1$  表示自由液面,  $\Gamma_2$  表示接触面(图1)。显然  $\Gamma_1$  面上的正应力  $\sigma_n$  和剪应力  $\tau_n$  为零; 而  $\Gamma_2$  面上的正应力、剪应力以及液体质点的速度必须满足与撞水物体相互作用的协调条件。由(4)和(7)式, 再利用关系(8)和(9), 半平面撞水问题流场的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{\sigma}_n}{2\mu} &= -\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial x \partial y} + \frac{\rho s}{2\mu} \bar{\Phi} = 0 \\ \frac{\bar{\tau}_n}{2\mu} &= \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x \partial y} - \frac{\rho s}{2\mu} \bar{\Psi} = 0 \end{aligned} \right\} \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上} \quad (10a)$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial x \partial y} + \frac{\rho s}{2\mu} \bar{\Phi} &= -\frac{\bar{\sigma}_{yy}^0}{2\mu} \\ \frac{\bar{\Phi}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} &= s\bar{w} - w(0) \end{aligned} \right\} \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上} \quad (10b)$$

在自由液面小晃动的假设前提下, (10a) 式中的  $\Gamma_1$  液面近似用撞击前的静水面代替。  $w(t)$  表示撞击刚体的垂直位移,  $\bar{w}(s)$  为它的 Laplace 变换。(10b) 式实际上就是耦合条件。

## 2 粘性流场边界积分方程

对于 Laplace 方程(8), 利用熟知的 Green 恒等式有

$$C(p)\bar{\Phi}(p) + \int_{\Gamma} \bar{\Phi}(q) \frac{\partial \bar{\Phi}^*(q, p)}{\partial n} d\Gamma(q) = \int_{\Gamma} \bar{\Phi}^*(q, p) \frac{\partial \bar{\Phi}(q)}{\partial n} d\Gamma(q) \quad (11a)$$

式中,  $\bar{\Phi}^*(q, p)$  为 Laplace 方程对应的基本解, 对于 2-D 问题为

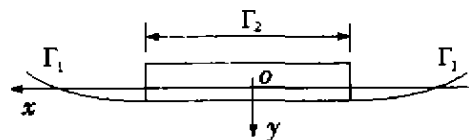


图1 撞水下的液面

$$\bar{\Phi}^*(q, p) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, r^2 = (x_f - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 \quad (11b)$$

另外,  $C(p)$  表示边界  $\Gamma$  上  $p$  点的形状系数, 如果  $\Gamma$  在该点光滑, 则  $C(p) = 1/2$ 。为保证精度, 又要避免离散区域过大, 可选取  $\Gamma_1$  为  $\Gamma_2$  的 6 倍左右<sup>[3]</sup>。

对于 Helmholtz 方程(9), 利用下列恒等式

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \bar{\Psi} + k^2 \bar{\Psi}) \bar{\Psi}^* d\Omega = \int_{\Omega} (\nabla^2 \bar{\Psi}^* + k^2 \bar{\Psi}^*) \bar{\Psi} d\Omega + \int_{\Gamma} (\bar{\Psi}^* \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial n} - \bar{\Psi} \frac{\partial \bar{\Psi}^*}{\partial n}) d\Gamma$$

可求得其对应的边界积分方程为

$$C(p) \bar{\Psi}(p) + \int_{\Gamma} \bar{\Psi}(q) \frac{\partial \bar{\Psi}^*(q, p)}{\partial n} d\Gamma(q) = \int_{\Gamma} \bar{\Psi}^*(q, p) \frac{\partial \bar{\Psi}(q)}{\partial n} d\Gamma(q) \quad (12a)$$

对于 2-D 问题方程(9)的基本解  $\bar{\Psi}^*(q, p)$  为

$$\bar{\Psi}^*(q, p, s) = -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(kr) \quad (12b)$$

式中,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $H_0^{(2)}(kr)$  为第二类零阶的 Hankel 函数。

### 3 拉氏域内撞水问题的边界元解

设撞水物体的质量为  $M_0$ , 自距离静水液面为  $h$  处的高度自由落下, 取撞水物体刚接触液面时为  $t=0$  时刻, 如图 2 所示。因此重物  $M_0$  的初始条件是

$$w(0) = 0, \dot{w}(0) = \sqrt{2gh} \quad (13)$$

式中,  $w(t)$  就是前面提到的撞水刚体的垂直位移, 自  $C$  点起算。

对于刚体, 由牛顿第二定律有

$$M_0 \ddot{w}(t) + F(t) = M_0 g \quad (14a)$$

式中,  $F(t)$  表示  $t$  时刻作用在重物上的总撞水力的垂直分量, 其值可写成

$$F(t) = \int_{\Gamma_2} \sigma_{yy}^0(x, y, t) d\Gamma_2 \quad (14b)$$

对方程(14a)作 Laplace 变换得

$$s^2 \bar{w} + \frac{\bar{F}}{M_0} = \frac{g}{s} + \dot{w}(0), \bar{F}(s) = \int_{\Gamma_2} \bar{\sigma}_{yy}^0(x, y, s) d\Gamma_2 \quad (15)$$

设自由液面  $\Gamma_1$  剖分为  $n_1$  段, 接触面  $\Gamma_2$  剖分为  $n_2$  段(见图 1), 因(10a, b)式中出现对  $x$  的二阶导数, 为提高精度采用二阶插值, 这时每个边界元必须增加一个中点, 以便控制二次插值, 故全长计算节点总数  $N = 2(n_1 + n_2) + 1$ 。若记  $\Gamma_2$  段的计算节点数为  $M (M = 2n_2 + 1)$ , 则整个系统的待求未知量数目为  $(4N + M + 1)$ 。

按常规的边界元技术, 边界场函数经插值后, (11a) 和 (12a) 可化为下列边界元方程:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Phi}_1 \\ \bar{\Phi}_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Phi}'_1 \\ \bar{\Phi}'_2 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Psi}_1 \\ \bar{\Psi}_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Psi}'_1 \\ \bar{\Psi}'_2 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

其中,  $\bar{\Phi}_1, \bar{\Psi}_1$  和  $\bar{\Phi}_2, \bar{\Psi}_2$  分别表示  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  上的相应函数拉氏变换的节点值列向量, 右上角“'”则表示对应的法向导数节点值列向量。式中各系数矩阵的元素按边界元方法不难形成, 为节省篇幅, 表达式从略。

采用加权残数方法令边界条件(10a)和耦合条件(10b)沿边界域加权平均得到满足。以(10a)中第一个方程为例, 这样做该式就变为

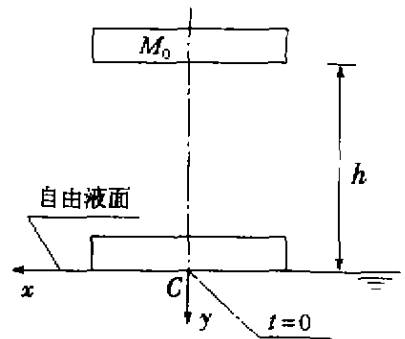


图 2 自由落体撞击液面

$$\int_{\Gamma_1} \left( -\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} \right) N_i(x) d\Gamma_1(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, (N - M) \quad (18)$$

式中, 权函数选取各节点的插值函数  $N_i(x)$ , 故上述方程可列出  $(N - M)$  个。其他几个方程可类似得到。它们同样可写成下列矩阵方程的形式:

$$[E]\{\bar{\Phi}_1\} = [F]\{\bar{\Psi}_1\}, \quad [G]\{\bar{\Psi}_1\} = [H]\{\bar{\Phi}_1\} \quad (19a)$$

$$\left. \begin{aligned} [J]\{\bar{\Phi}_2\} + [K]\{\bar{\Psi}_2\} &= \{\bar{\sigma}\}, \quad [L]\{\bar{\Phi}_2\} = [P]\{\bar{\Psi}_2\} \\ [R]\{\bar{\Phi}_2\} + [T]\{\bar{\Psi}_2\} &= \{f\}(s\bar{w} - w(0)) \end{aligned} \right\} \quad (19b)$$

注意, (19b) 中第一个方程右边的  $\bar{\sigma}_y^0$  是一个待求的分布函数, 它也必须按二次式插值, 故 (19b) 式中的  $\{\bar{\sigma}\}$  就是表示  $\bar{\sigma}_y^0$  的节点值列向量。

方程 (16, 17) (19a, b) 和 (15) 耦合求解, 显然就可得到全部待求未知量  $\{\bar{\Phi}_1\}$ 、 $\{\bar{\Phi}_2\}$ 、 $\{\bar{\Psi}_1\}$ 、 $\{\bar{\Psi}_2\}$ 、 $\{\bar{\Phi}_1\}$ 、 $\{\bar{\Phi}_2\}$ 、 $\{\bar{\Psi}_1\}$ 、 $\{\bar{\Psi}_2\}$ 、 $\{\bar{\sigma}\}$  以及  $\bar{w}$ 。

### 4 数值结果和结论

由积分变换理论可知, 令  $s = \gamma + i\omega$ , 变换函数  $\bar{f}(s)$  和原函数  $f(t)$  的关系是

$$f(t) = \frac{e^{-\gamma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\gamma + i\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (20)$$

现将  $\omega$  轴等间距剖分, 并设该间距  $\Delta\omega = 2\pi/T$ ,  $T$  为对撞水过程感兴趣的所需计算时间。Durbin 通过数值逆变换, 由拉氏域的解可得到时间域的解, 具体做法可参阅 [4]。

为了考察本文方法的有效性, 现计算一平底刚体的撞水响应。已知物体 (单位宽度) 的长度为  $D$ , 质量为  $M_0$ , 流体密度为  $\rho$ 。

图3给出了物体垂直位移  $y$  在不同动力粘性系数  $\mu$  下随时间的变化, 此时下落高度  $h = 1$  m。为了结果无量纲化, 图中  $h_0 = M_0 / (\rho D)$  表示静止时物体浸入流体的深度;  $V_0$  表示物体从  $h = 1$  m 下落刚接触液面时的速度。

图4给出了物体底面  $D$  上对称五点处正应力随时间的变化, 此时  $\mu = 0.0114$  kg/s·m,  $h = 1$  m。

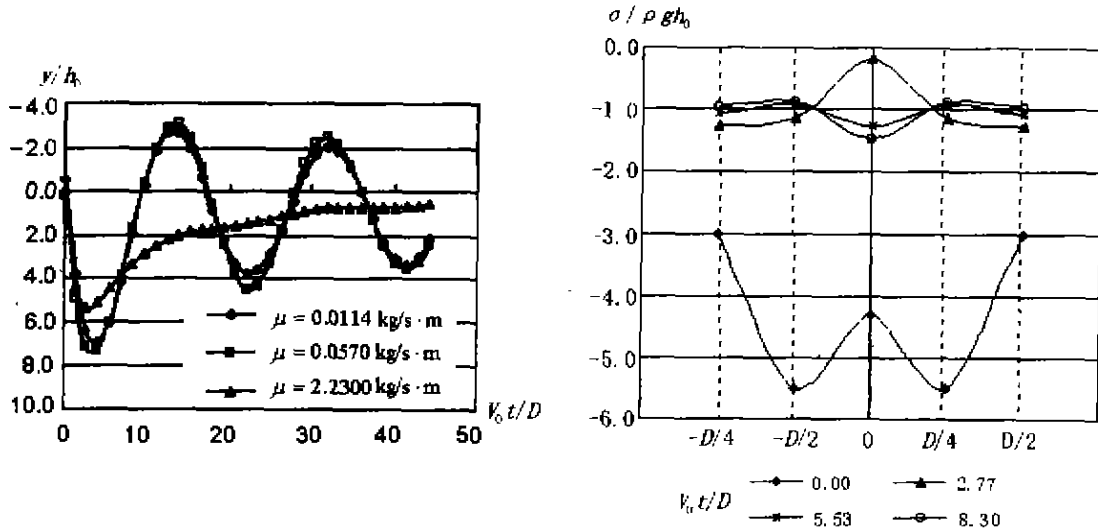


图3 物体在不同粘性系数下的垂直位移曲线

图4 物体底面对称五点处的正应力曲线

由上不难看出, 当粘性系数增大到  $\mu = 2.23$  kg/s·m 时, 物体位移达到峰值后逐渐衰减, 且振动很快消失。此外, 物体底部撞水正应力的峰值是发生在撞水开始瞬间, 以后逐渐减小, 而且最大压应力并非在平板中点。

## 参考文献:

- [1] Geers T L. A boundary-element method for slamming analysis[J]. *J. of Ship Research*, 1982-26(2):117~124
- [2] Belytschko T, Mullen R. Two-dimensional fluid-structure impact computations with regularization[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1981, 27:139~154
- [3] 钱勤, 黄玉盈. 时域边界元法分析撞水响应[J]. *固体力学学报*, 1996, 17(1):49~57
- [4] Durbin F. Numerical inversion of Laplace transform: An efficient improvement to Duber and Abate's method [J]. *Computer Journal*, 1973, 17(4):371~376

## Laplace Transform-BE Coupling Method for Viscous Fluid-Structure Impact Analysis

QIAN Qin, HUANG Yu-ying, LI Qi-shen, ZOU Shi-zhi

(Dept. of Mechanics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

**Abstract:** Based on linearized 2D Navier-Stokes equation, a Laplace transform-BE coupling method for viscous fluid-structure impact analysis is proposed. Under assumption of incompressibility for the fluid, the corresponding equivalent boundary integral equation in terms of the potential function and stream function is first established by Lamb's transform in the Laplace transform domain. It enables us to solve impact water problems with viscosity by the BEM. Then a complete solution of the problem under consideration in the time domain is obtained by means of Durbin's formulas for the numerical inversion of the Laplace transform.

**Keywords:** viscous flow; response of water impact; boundary element method; numerical inversion of Laplace's transform

---

(上接第40页)

## A Boundary Element Separation Solution to the Elastic Contact Problems and the Optimal Penalty Factor

LIU De-yi, CHEN Yi-ming, SHEN Guang-xian

(Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

**Abstract:** In this paper the boundary element separation to the elastic contact problems proposed by Kamiya is improved. It gives another optimal penalty factor to accelerate the iteratively saluting procedure, which makes a theoretical foundation for the application of computers' parallel processing method to reduce the calculation time and memory. A practical example is given to confirm the validity of the present method in comparison with Kamiya method.

**Keywords:** elastic contact; boundary element method; separation solution; penalty factor