文章编号:1006－7329(2001)01－0021－04

Newmark 法在负刚度条件下的收敛性和稳定性*

吴云芳
(重庆大学B区 建工学院,重庆 400045)

摘要:研究了在负刚度条件下 Newmark 法的收敛性及稳定性。在负刚度条件下,该法是收敛的和条件稳定的。

关键词:动力方程;负刚度;收敛性;稳定性
中图分类号:O241.8 **文献标识码**:A

由于许多结构或材料在加载至屈服点后都存在着变形增加荷载反而减少的现象,所以当采用增量刚度的形式来求解动力方程时,其恢复力骨架曲线将遇到负刚度现象。随着这种负刚度现象被越来越多地引入结构动力反应分析中,原有的在通常的正刚度条件下所使用的计算方法是否能继续应用于负刚度条件下的计算中,就成了日益突出的问题。文献[1]研究了负刚度条件下中心差分法,Z-变换法,Wilson-θ 法及二步 Adams 显式方法的收敛性和稳定性。文献[2]研究了一种显式直接积分法的收敛性和稳定性。本文将讨论 Newmark 法在负刚度条件下的收敛性和稳定性。

1 在负刚度条件下 Newmark 法的收敛性和稳定性

将结构恢复力分段线性化后,单自由度系统在 $t+\Delta t$ 时刻的动力方程可简写成

$$\ddot{x}_{t+\Delta t}+2\xi\omega\dot{x}_{t+\Delta t}+\beta\omega^2x_{t+\Delta t}=r(t+\Delta t) \tag{1}$$

式中,ξ 为临界阻尼比;ω 为圆频率;β 为刚度比,弹性阶段 $\beta=1$,在屈服后 $\beta=K_2/K_0$,K_0 为初始刚度,K_2 为屈服后刚度;$r(t+\Delta t)$为动干扰荷载 $p(t+\Delta t)$除以质量 M。

将 Newmark 法[3]用于求解式(1)的响应时,可导出如下递推公式

$$\{x\}_{t+\Delta t}=[A]\{x\}_t+\{L\}r(t+\Delta t) \tag{2}$$

式中:$\{x\}_t=\{\ddot{x}_t \quad x_t \quad x_t\}^T$

$$\{L\}=\left\{\frac{\theta}{\omega^2\Delta t^2} \quad \frac{\delta\theta}{\omega^2\Delta t} \quad \frac{\alpha\theta}{\omega^2}\right\}^T$$

$$[A]=\begin{bmatrix} k_1 & \frac{1}{\Delta t}(-\beta\theta-2k) & \frac{1}{\Delta t^2(-\beta\theta)} \\ \Delta t k_2 & 1-\beta\delta\theta-2\delta k & \frac{1}{\Delta t}(-\beta\delta\theta) \\ \Delta t^2 k_3 & \Delta t(1-\beta\alpha\theta-2\alpha k) & 1-\beta\alpha\theta \end{bmatrix} \tag{3}$$

其中:$\theta=\left(\frac{1}{\omega^2\Delta t^2}+\frac{2\xi\delta}{\omega\Delta t}+\alpha\beta\right)^{-1}$

$k=\frac{\xi\theta}{\omega\Delta t}$

$k_1=-(\frac{1}{2}-\alpha)\alpha\beta-2(1-\delta)k$

$k_2=(1-\delta)-\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\beta\delta\theta-2(1-\delta)\delta k$

* 收稿日期:2000－06－09
作者简介:吴云芳(1963－),女,重庆人,讲师,硕士,主要从事结构振动研究.

$$k_3=\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)-\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\beta\alpha\theta-2(1-\delta)\alpha k$$

$[A]$和$\{L\}$分别是积分逼近算子矩阵和广义加速度算子向量。

令 $\tau=\omega\Delta t$，$[A]$的特征方程为

$$|[A]-\lambda[I]|=-\lambda\left\{\lambda^2-\lambda\left(2-\frac{1}{2}\beta\theta-2\frac{\xi\theta}{\tau}-\beta\delta\theta\right)+\left[1-2\frac{\xi\theta}{\tau}+\left(\frac{1}{2}-\delta\right)\beta\theta\right]\right\}=0 \tag{4}$$

它的三个特征根为

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1&=1-\frac{\xi\theta}{\tau}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\delta\right)\beta\theta+\theta^{\frac{1}{2}}\sqrt{\xi^2\frac{\theta}{\tau^2}-\beta+\left(\frac{1}{2}+\delta\right)\frac{\xi\beta\theta}{\tau}+\left(\frac{1}{2}+\delta\right)^2\frac{\beta^2\theta}{4}}\\\lambda_2&=1-\frac{\xi\theta}{\tau}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\delta\right)\beta\theta-\theta^{\frac{1}{2}}\sqrt{\xi^2\frac{\theta}{\tau^2}-\beta+\left(\frac{1}{2}+\delta\right)\frac{\xi\beta\theta}{\tau}+\left(\frac{1}{2}+\delta\right)^2\frac{\beta^2\theta}{4}}\\\lambda_3&=0\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta t\to0}}\lambda_1^n=e^{(-\xi+\sqrt{\xi^2-\beta})\omega t}=e^{\mu_1 t},\quad \lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta t\to0}}\lambda_2^n=e^{(-\xi-\sqrt{\xi^2-\beta})\omega t}=e^{\mu_2 t}$$

显然，λ_1 和 λ_2 是主根，λ_3 是附加根。

式(3)与其约旦标准形之间的转换矩阵为

$$[P]=\begin{bmatrix}P_{11}&P_{12}&P_{13}\\P_{21}&P_{22}&P_{23}\\P_{31}&P_{32}&P_{33}\end{bmatrix} \tag{6}$$

式中：$P_{1j}=1$

$$P_{2j}=\left(\delta+\frac{1}{\lambda_j-1}\right)\Delta t$$

$$P_{3j}=\frac{\Delta t^2\left[\left(\frac{1}{2}-\alpha+\delta+\frac{1}{\lambda_j-1}\right)-\beta\alpha\theta\left(\frac{1}{2}-\alpha+\delta+\frac{1}{\lambda_j-1}\right)-2\alpha\frac{\xi\theta}{\omega\Delta t}\left(1+\frac{1}{\lambda_j-1}\right)\right]}{\lambda_j-(1-\beta\alpha\theta)}$$

$j=1,2,3$

$r(t)=0$，式(1)在初始扰动 x_0、$\dot{x}_0$ 下的 Newmark 解为

$$\{x\}_t=[P]\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{bmatrix}^n[P]^{-1}\{x\}_0 \tag{7}$$

将式(1)作为约束条件引入式(7)的初始条件中，有

$$\{x\}_0=\{-2\xi\omega x_0-\beta\omega^2x_0,\dot{x}_0,x_0\} \tag{8}$$

则式(7)的第三个方程可展开为

$$x_t=D_1\lambda_1^n+D_2\lambda_2^n+D_3\lambda_3^n \tag{9}$$

其中：$D_1=\dfrac{P_{31}}{|[P]|}\{[(P_{23}-P_{22})-\beta\omega^2(P_{22}P_{33}-P_{23}P_{32})]x_0+[(P_{32}-P_{33})-2\xi\omega(P_{22}P_{33}-P_{23}P_{32})]\dot{x}_0\}$

$$D_2=\frac{P_{32}}{|[P]|}\{[(P_{21}-P_{23})-\beta\omega^2(P_{23}P_{31}-P_{21}P_{33})]x_0+[(P_{33}-P_{31})-2\xi\omega(P_{23}P_{31}-P_{21}P_{33})]\dot{x}_0\}$$

$$D_1=\frac{P_{33}}{|[P]|}\{[(P_{22}-P_{21})-\beta\omega^2(P_{21}P_{32}-P_{22}P_{31})]x_0+[(P_{31}-P_{32})-2\xi\omega(P_{21}P_{32}-P_{22}P_{31})]\dot{x}_0\}$$

$$\lim_{\Delta t\to0}D_1=\frac{(\xi+\sqrt{\xi^2-\beta})\omega x_0+\dot{x}_0}{2\omega\sqrt{\xi^2-\beta}},\quad \lim_{\Delta t\to0}D_2=\frac{(-\xi+\sqrt{\xi^2-\beta})\omega x_0-\dot{x}_0}{2\omega\sqrt{\xi^2-\beta}}$$

由此可见，收敛性所要求的全部条件都满足。

由式(5)可知，Newmark 法的积分逼近算子矩阵$[A]$的特征方程的三个特征根是互异的，所对应的三个初等因子必皆为一次。因此，在正刚度条件下，当 $\rho(A)=\max(|\lambda_1|,|\lambda_2|,|\lambda_3|)\leqslant1$ 或在负

刚度条件下 $\rho(A)/e^{u_1\Delta t}\leqslant 1$ 时,该方法是稳定的。为了判断 Newmark 法的稳定性,本文选择了不同的 ξ、β、α 和 Δt 计算 $\rho(A)/e^{u_1\Delta t}$ 和 $\rho(A)$,绘于图 1 中。由图 1 可见,无论振动系统有无阻尼,Newmark 法在负刚度条件下都是条件稳定的。因此,在正刚度时取 $\delta\geqslant 0.5$,$\alpha\geqslant 0.25(0.5+\delta)^2$ 可以保证 Newmark 法无条件稳定的结论是不适用于负刚度条件下的数值计算的。图 2 所示的简单数值实验也表明,就是人们习惯认为可保证无条件稳定的取值范围内,当 $\beta<0$ 时,计算结果仍是不稳定的——仅仅在前几步计算中,误差解就完全"淹没"了精确解。

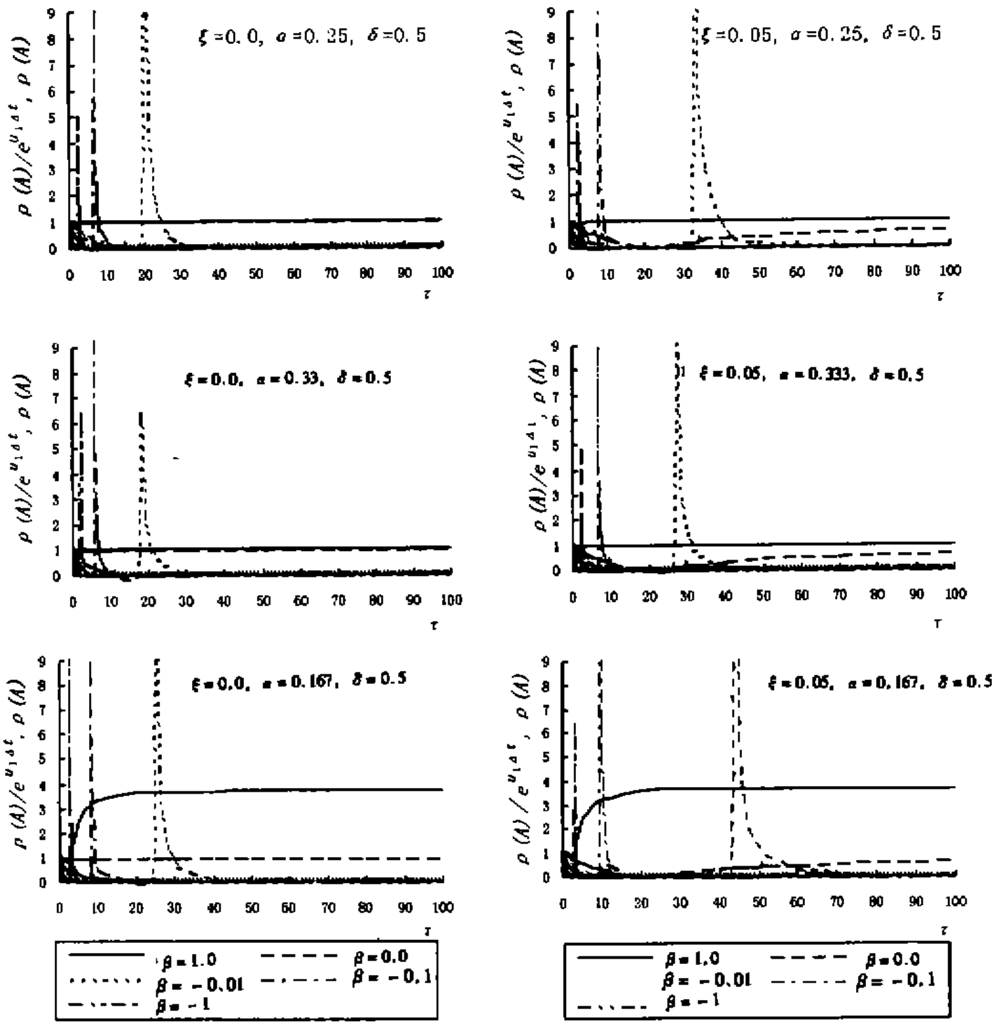

图 1　Newmark 法在负刚度条件下的稳定性

表 1 中给出了当 $\alpha=0.25$,$\delta=0.5$ 时,Newmark 法对于不同的 ξ、β 的稳定条件,即 $\Delta t/T$ 的具体限值,其中 $T=2\pi/\omega_0$。

表 1　$\alpha=0.25$,$\delta=0.5$ 时 Newmark 法在负刚度条件下的稳定条件——$\Delta t/T$ 的具体限值

$\Delta t/T$		β		
		-0.01	-0.1	-1
ξ	0.0	<3.183 或>3.66	<1.007 或>1.21	<0.318 或>0.382
	0.05	<5.15 或>6.207	<1.178 或>1.416	<0.334 或>0.398

2 结 论

1) 在负刚度条件下 Newmark 法是收敛的。

2) 当 $\delta \geqslant 0.5$, $\alpha \geqslant 0.25(0.5+\delta)^2$ 时，Newmark 法在正刚度条件下是无条件稳定的。但是在负刚度条件下无论 α、δ 取什么值，Newmark 法均为条件稳定的。本文给出了 $\alpha=0.25$, $\delta=0.5$ 时 Newmark 法在负刚度条件下的稳定条件——$\Delta t/T$ 的具体限值。

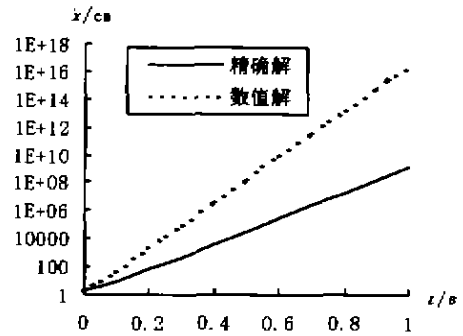

图 2 负刚度下 Newmark 法不稳定性的数值实验 $\xi=0.05$, $\beta=-1$, $\alpha=0.25$, $\delta=0.5$, $\omega=22$ rad/s, $\Delta t=0.1$s, $x_0=2.0$ cm, $\dot{x}_0=0.0$

参考文献：

[1] 程民宪. 结构动力分析中几种逐步积分法在负刚度条件下的收验性和稳定性[J]. 工程力学, 1989, 6(2): 36-47

[2] 吴云芳, 等. 一种积分法在负刚度条件下的收验性和稳定性[J]. 重庆建筑大学学报, 2000, 22(增刊): 133-138

[3] 张汝清. 计算结构动力学[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 1987

Convergence and Stability of Newmark Method in Case of Negative Stiffness

WU Yun-fang

(Faculty of Civil Engineering, Chongqing University B, Chongqing 400045, China)

Abstract: The convergence and stability of Newmark method has been studied in this paper for the model with the negative stiffness. In the case of negative stiffness, the method is convergent and conditionally stable.

Keywords: dynamic equation; negative stiffness; convergence; stability