



文章编号:1006-7329(2002)04-0021-04

## 预应力混凝土框架结构分析的曲率力法

简 斌, 陈平友, 王正霖

(重庆大学 土木工程学院, 重庆 400045)

**摘要:**在对后张有粘结预应力混凝土框架结构进行非线性分析时,根据其结构特点和加载方式,提出了一种叫曲率力法的非线性分析方法。该方法利用有限元原理和增量理论,在结构非线性分析的加载过程中用力法求解,加载的步长增量是截面的曲率,并以此来反求外荷载的增量。文中首先说明了该方法的基本假定和材料的本构关系,接着以一单层单跨预应力混凝土框架为例,推导了该方法的原理和步骤。最后,文中利用以该方法编制的非线性程序对两榀预应力框架试验进行了模拟计算。结果表明,模拟计算和试验测试的过程及结果吻合较好,为预应力框架结构分析增添了一种新的方法。

**关键词:**预应力框架;非线性分析;曲率力法

**中图分类号:**TU378.8

**文献标识码:**A

在现有的框架结构非线性分析中,大部分都是基于位移的非线性分析,而对框架结构基于力法的非线性分析却较少采用。本文基于有粘结预应力混凝土框架结构的特点,预应力钢筋与混凝土有良好的粘结作用,提出用本文暂且命名为曲率力法的方法来对其进行非线性分析,即结构在非线性分析加载过程中用力法求解,但是加载的步长增量却加的是曲率,并以此来反推外荷载的加载增量。本文采用有限元法对有粘结预应力混凝土框架结构进行单元划分。考虑到框架属于杆系结构,因此,本文采用了梁-柱杆单元,即将图1所示的框架分为若干个杆单元,图中“1”表示单元1,且视节点区为刚域。下面就对该方法进行具体的推导和说明。

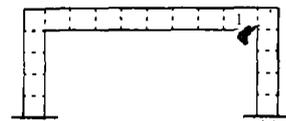


图1 框架单元划分

### 1 基本假定

- 1) 截面受力加载后,其截面变形符合平截面假定。
- 2) 钢筋(包括有粘结预应力筋和非预应力筋)与混凝土粘结良好,受力后钢筋与混凝土的应变相协调,不出现滑移现象。
- 3) 忽略结构剪切变形、轴向变形以及几何非线性。
- 4) 各杆单元中点截面的内力作为整个杆单元的平均内力,该截面的刚度作为整个杆单元的平均刚度。
- 5) 每个杆单元混凝土截面划分成若干层,每一层混凝土假设处于单向受力状态,且服从同一应力-应变关系,即不考虑应变梯度的影响。
- 6) 混凝土的应力-应变关系,受压区采用 Hognestad 曲线,受拉区采用文献<sup>[1]</sup>建议的模型。

\* 收稿日期:2002-04-15

作者简介:简斌(1967-),男,博士,副教授,主要从事钢筋混凝土和预应力混凝土结构研究。

7) 非预应力钢筋的应力—应变关系如图 2 所示。其中  $f_y, \epsilon_y$  分别为非预应力钢筋的受拉屈服应力和相应的应变,  $f_y', \epsilon_y'$  分别为非预应力筋的受压屈服应力和相应的应变。

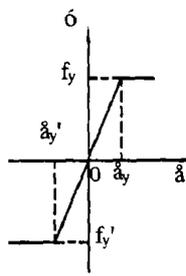


图 2 非预应力钢筋应力—应变

8) 预应力钢筋的应力—应变关系如图 3 所示。其中  $f_{pu}, \epsilon_{pu}$  分别为预应力钢筋的受拉极限应力和相应的应变;  $f_{py}, \epsilon_{py}$  分别为预应力筋的名义受拉屈服应力和相应的应变,  $f_{py}', \epsilon_{py}'$  分别为预应力筋的受压屈服应力和相应的应变。

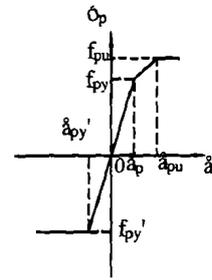


图 3 预应力钢筋应力—应变

9) 卸载刚度取初始原点刚度。

## 2 曲率力法的推导

### 2.1 柔度系数的求解

先假设一榀单层单跨的混凝土框架,如图 1 所示,其基于力法的基本体系取如图 4 所示的结构。将单元 1 中点截面 A 截开,截面在外荷载作用下有三个未知力,即弯矩  $x_1$ ,轴力  $x_2$ ,剪力  $x_3$ 。现在来求柔度系数  $\delta_{11}$ ,它表示  $x_1 = 1$  单独作用时,在基本体系上有弯矩  $\bar{M}_{1x}$ ,A 截面的左右侧面的相对转角,则

$$\delta_{11} = \int_A^B \frac{\bar{M}_{1x} \cdot \bar{M}_{1x} dx}{B_{ix}} + \int_B^C \frac{\bar{M}_{1x} \cdot \bar{M}_{1x} dx}{B_{ix}} + \int_A^D \frac{\bar{M}_{1x} \cdot \bar{M}_{1x} dx}{B_{ix}} + \int_D^E \frac{\bar{M}_{1x} \cdot \bar{M}_{1x} dx}{B_{ix}} \quad (1)$$

式中  $B_i$  为单元刚度,是不断变化的,因此该积分运算非常繁琐,但如果把该杆系结构离散化为很多小单元,则根据有限元原理和假定(2)进行数值积分运算就很方便,该积分式就可写成如下形式:

$$\delta_{11} = \frac{\bar{M}_{11} \cdot \bar{M}_{11} \Delta l_1}{2B_{i1}} + \frac{\bar{M}_{11} \cdot \bar{M}_{11} \Delta l_1}{2B_{i1}} + \sum_{k=2}^n \frac{\bar{M}_{1k} \cdot \bar{M}_{1k} \Delta l_k}{2B_{ik}} \quad (2)$$

式中  $B_{ik}$  为第  $k$  单元的刚度,  $\Delta l_k$  为第  $k$  单元的长度,  $n$  为单元数,  $\bar{M}_{1k}$  为  $x_1 = 1$  时,在第  $k$  单元产生的弯矩。

同样可以求出柔度系数  $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{21}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}$ 。

### 2.2 单位竖向荷载作用在基本体系上的位移

假设框架梁上受两个对称布置的竖向荷载  $\Delta P_v$  的作用,则受该竖向荷载作用的基本体系如图 5 所示。令  $\Delta P_v = 1$ , 这样在基本体系上就可以求出只有  $\Delta P_v = 1$  作用在基本体系上时各单元的弯矩,以及 A 截面的相对转角、相对水平位移和相对竖向位移,

$$\delta_{1v} = \frac{\bar{M}_{11} \cdot \Delta \bar{M}_{1左} \cdot \Delta l_1}{2B_{i1}} + \frac{\bar{M}_{11} \cdot \Delta \bar{M}_{1右} \cdot \Delta l_1}{2B_{i1}} + \sum_{k=2}^n \frac{\bar{M}_{1k} \cdot \Delta \bar{M}_k \cdot \Delta l_k}{2B_{ik}} \quad (3)$$

$$\delta_{2v} = \frac{\bar{M}_{21} \cdot \Delta \bar{M}_{1左} \cdot \Delta l_1}{2B_{i1}} + \frac{\bar{M}_{21} \cdot \Delta \bar{M}_{1右} \cdot \Delta l_1}{2B_{i1}} + \sum_{k=2}^n \frac{\bar{M}_{2k} \cdot \Delta \bar{M}_k \cdot \Delta l_k}{2B_{ik}} \quad (4)$$

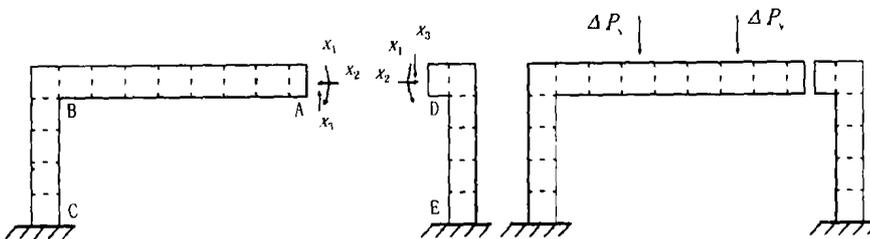


图 4 基本体系

图 5 竖向荷载增量

$$\delta_{3v} = \frac{\bar{M}_{31} \cdot \Delta \bar{M}_{1左} \cdot \Delta l_1}{2B_{i1}} + \frac{\bar{M}_{31} \cdot \Delta \bar{M}_{1右} \cdot \Delta l_1}{2B_{i1}} + \sum_{k=2}^n \frac{\bar{M}_{3k} \cdot \Delta \bar{M}_k \cdot \Delta l_k}{2B_{ik}} \quad (5)$$

式中: $\delta_{1v}$ 为相对转角, $\delta_{2v}$ 为相对水平位移, $\delta_{3v}$ 为相对竖向位移, $\bar{M}_{ik}$ 为 $x_i = 1$ 时,第 $k$ 单元的弯矩, $\Delta \bar{M}_k$ 为 $\Delta P_v = 1$ 时,第 $k$ 单元的弯矩,其余符号意义同前。

### 2.3 非线性方程组的求解

本文所说的曲率力法是假设曲率增量来反推外荷载的增量,并进而求得外荷载总量,因此曲率是已知的。假设单元1的A截面的曲率 $\Phi$ 已知,则:

1) 假定A截面的受压边缘混凝土的应变 $\epsilon_c = (\epsilon_{\max} + \epsilon_{\min})/2$ ,先取 $\epsilon_{\max}$ 为混凝土的极限压应变 $\epsilon_u$ , $\epsilon_{\min}$ 先取为混凝土的极限拉应变;

2) 如果 $|(\epsilon_c - \epsilon_u)/\epsilon_u| \leq D_1$ , $D_1$ 为满足精度要求足够小的量,则执行后面的第(8)步,否则执行下一步;

3) 根据已知曲率 $\Phi$ 和假定混凝土受压边缘应变 $\epsilon_c$ ,可以求出A截面的弯矩为 $M$ ,轴力为 $N$ ;

4) 假定上一级荷载下单元1的弯矩为 $M_{i-1}$ ,轴力为 $N_{i-1}$ ,则弯矩增量为 $x_1 = M - M_{i-1}$ ,轴力增量为 $x_2 = N - N_{i-1}$ ;

5) 假定竖向外荷载增量为 $\Delta P_v$ ;

6) 根据力法原理和变形协调条件,A截面的相对转角,相对水平位移和相对竖向位移为零,即:

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{13}x_3 + \delta_{1v} \cdot \Delta P_v = 0 \quad (6)$$

$$\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{23}x_3 + \delta_{2v} \cdot \Delta P_v = 0 \quad (7)$$

$$\delta_{31}x_1 + \delta_{32}x_2 + \delta_{33}x_3 + \delta_{3v} \cdot \Delta P_v = 0 \quad (8)$$

根据(1)~(4)步,求出了 $x_1, x_2$ ,将 $x_1, x_2$ 代入(6),(7)式可得

$$\delta_{13}x_3 + \delta_{1v} \cdot \Delta P_v = -(\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2) \quad (9)$$

$$\delta_{23}x_3 + \delta_{2v} \cdot \Delta P_v = -(\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2) \quad (10)$$

现在(9),(10)两式中,只有 $x_3, \Delta P_v$ 为未知数,故可以求出 $x_3, \Delta P_v$ ;

7) 将 $x_1, x_3, \Delta P_v$ 代入(10),可求得

$$x_2' = -(\delta_{31}x_1 + \delta_{33}x_3 + \delta_{3v} \cdot \Delta P_v) / \delta_{32} \quad (11)$$

由于是同一截面上的内力,故 $x_2'$ 与 $x_2$ 应该是相等的,因此,如果当 $N = 0$ , $|x_2' - x_2| \leq D_2$ ,或者当 $N \neq 0$ , $|(x_2 - x_2')/N| \leq D_3$ ,其中 $D_2, D_3$ 为满足精度要求足够小的量,即满足精度要求时,说明假定的应变符合要求,同时 $x_1, x_2, x_3$ 为所求的内力增量, $\Delta P_v$ 为所求的外加荷载增量,执行第(8)步;如果所假定的应变不符合要求,用二分法对 $\epsilon_{\max}$ ,或者是 $\epsilon_{\min}$ 重新赋值,回头执行第(1)步;

8) 如果没有找到符合精度要求的应变,但混凝土的压应变 $|(\epsilon_c - \epsilon_u)/\epsilon_u| \leq D_1$ ,说明混凝土已被压碎,如果找到有满足精度要求的应变,并且混凝土没被压碎,则通过1单元A截面的内力增量 $x_1, x_2, x_3$ 以及所求得的外荷载增量 $\Delta P_v$ ,也就可以求出各单元的内力增量。将各级荷载增量、内力增量叠加,从而可以求出各单元的总内力和总的外加荷载。根据 $N - M - \Phi$ 关系,可求出各单元的曲率,从而可以求出各单元的新刚度,然后使1单元A截面的曲率在 $\Phi$ 的基础之上增加一个曲率增量 $\Delta \Phi$ ,又从第(1)步开始执行。

## 3 计算结果与试验结果的比较

为了验证本文提出的曲率力法非线性分析方法的有效性也就可以求出,作者进行了两榀单层单跨的后张有粘结预应力混凝土框架的试验。根据试验的实际情况,其加载方式有两种:YKJ1只在框架梁上等三分点处加竖向荷载;YKJ2为先在框架左柱顶分级施加水平力到30 kN,然后再在框

架梁上等三分点加竖向荷载,直到框架破坏,如图6。

本文根据以上的分析编制了计算程序来模拟实际加载情况,由于YKJ2水平荷载是分级加载到30 kN,即水平荷载最大值已知,故可用水平力作为增量,用一般的力法求解;在竖向加载情况下,则可以用上面的曲率力法来分析。图7绘出了该两榀预应力框架右柱顶实测的荷载弯矩图与用曲率力法进行模拟的荷载弯矩图,在图7(b)中,(0) - (30)表示的是水平力由0加到30 kN。表1列出了两个框架承载力的试验值和非线性分析计算值以及它们的比较。

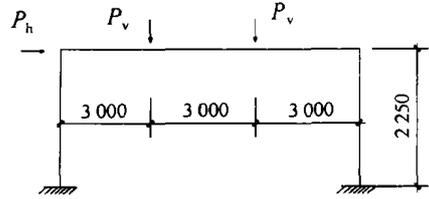


图6 计算简图和加载情况

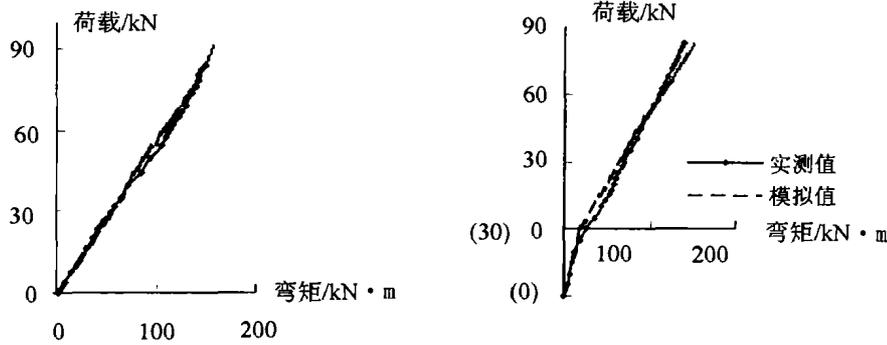


图7 右柱顶荷载弯矩曲线

表1 破坏荷载实测值和模拟值的比较

| 编 号  | 竖向外荷载(kN) |     | 右柱顶弯矩(kN·m) |     | 模拟值/实测值 |      |
|------|-----------|-----|-------------|-----|---------|------|
|      | 实测值       | 模拟值 | 实测值         | 模拟值 | 荷 载     | 弯 矩  |
| YKJ1 | 84        | 91  | 149         | 155 | 1.08    | 1.04 |
| YKJ2 | 83        | 83  | 139         | 152 | 1.0     | 1.09 |

从表1和图7可以看出,利用本文所介绍的计算方法进行非线性分析,所得结果和过程与试验结果和过程是吻合得比较好的。

由曲率力法计算原理的推导过程可以看出,该方法可以推广运用于其他多种结构,如多层多跨预应力及非预应力混凝土框架结构,加载方式可以为一个方向先加载,然后再在其他方向等比例加载、一个方向加载、几个方向等比例加载等加载方式。它探索了混凝土框架结构(包括预应力和非预应力)非线性分析的一种新的分析方法。

## 4 结论

本文提出的曲率力法是一种混凝土框架结构的非线性分析方法,通过截面的曲率增量来反推外荷载的增量,在理论推导上是可靠的。非线性计算结果与试验结果相比较,它们的过程吻合得较好,这也表明该方法是切实可行的。参照本文推导,可以将该方法推广到其它混凝土框架结构的非线性分析中去。

## 参考文献:

- [1] 朱伯龙,董振祥.钢筋混凝土非线性分析[M].上海:同济大学出版社,1985.

Engineering, ASCE 1986, 112(5):867 - 920.

- [8] 刘富强,唐薇,聂永丰.城市生活垃圾填埋的产气过程实验研究[J].中国沼气,2001,19(1):22 - 26.  
[9] 黄文雄.垃圾填埋气产生过程与产气量预测模型的研究[D].重庆:重庆大学硕士学位论文,2001.

## Experimental Simulation of Landfill Gas Production from MSW Co - disposed with Wastewater Sludge

PENG Xu - ya, HUANG Wen - xiong, YU Yi

(Faculty of Urban Construction and Environmental Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, China)

**Abstract:** In this paper, the landfill gas generation process was investigated by a landfill lysimeter of municipal solid waste (MSW) co - disposed with wastewater sludge. The experimental results show that the wastewater sludge played a role of inoculation in MSW degradation process and accelerated organic waste decomposition. Compared with the MSW landfill alone, the landfill gas generation rate of MSW co - disposed with sludge was higher by about 30%. The average CH<sub>4</sub> content in landfill gas reached 64%, which was much higher than in case of MSW landfill alone and useful for landfill gas utilization. It is also proved that co - disposal of sludge with MSW is a good choice for beneficial use of sludge.

**Keywords:** municipal solid waste; wastewater sludge; landfill; landfill gas; generation rate

(上接第 24 页)

## Curvature Force Method for Nonlinear Analysis of Prestressed Concrete Frame

JIAN Bin, CHEN Ping - you, WANG Zheng - lin

(Faculty of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, China)

**Abstract:** In this paper, based on the structure characters and load applying means, a method called as curvature force method is put forward and proved in the nonlinear analysis of bonded prestressed concrete frame. Based on the nonlinear program, the simulation calculation was carried out on test results of two prestressed concrete frames by this method. The results from calculation are identical with the experiment ones. So it may be added to the methods for the nonlinear analysis of prestressed concrete frame.

**Keywords:** prestressed concrete frame; nonlinear analysis; curvature force method