

文章编号:1006-7329(2002)05-0046-06

## 翘曲理论的计算机验证\*

李开禧, 王永华, 白洪源

(重庆大学 土木工程学院, 重庆 400045)

**摘要:**对翘曲理论中计算薄壁构件空间变形应力和位移的“动态坐标法”进行了大量的计算机扫描验证,并与传统薄壁构件计算理论相比较,证明该方法是正确的,结果是可靠的。在此基础上,对该方法带来的计算效益和应用前景作了简要的述评。

**关键词:**翘曲理论; 动态坐标法; 薄壁构件

**中图分类号:** TU378.7

**文献标识码:** A

“翘曲理论”<sup>[1]</sup>是直接计算薄壁构件空间变形和应力分布的新理论,它是在改造“面内弯曲理论”和“约束扭转理论”的基础上,统一按照内、外纵向力系平衡,重新设计表述内力和变形的工具:弯矩矢量和转角向径,用来建立力系平衡条件和变形协调关系,从而大幅度简化计算,很直观地描述变形。它实质上是新一代薄壁杆件实用计算理论。

该理论把“平面弯曲理论”中横截面的纵向弯曲变形和“约束扭转理论”中横截面的横向扭转变形泛称为翘曲变形,并把两者视为加载条件符合一定要求时的特例,由此,按横截面纵向变形的特征,称为“翘曲理论”。当截面发生纵向翘曲时在刚周边假定的前提下,横截面正投影绕一定点转动,当加载形式沿杆长不变时,杆的变形特征是绕一根新的纵向轴线转动,因为横向变形有此特点,故又称为“绕定轴转动理论”。薄壁杆件翘曲的计算中最关键的问题是如何确定这根纵向转轴的位置和相应的截面变形,这就需要重新架构一套计算方法,“动态坐标法”<sup>[4]</sup>正是适应这个需求而建立起来的,它极大地简化了计算。可以说,如果没有这套非常有效的计算方法作为依托,“翘曲理论”很难付诸实用,更难在工程应用中发挥效益。

“翘曲理论”是本文第一作者架构成功的,他在长期的研究和教学中已作过大量示例验证。和现行理论相比较,当两理论的覆盖范围相同时,计算结果是完全相同的。本文二、三作者作为第一作者的学生,在学习的过程中也经过一个认识、提高过程。本文的任务是继续对各种形状的截面和各种加载方式作用下产生的正应力,分别按照新旧两种理论进行计算机扫描验证,从大量数据的对比中,再次说明,上述结论是正确的。

下面,我们先对“翘曲理论”的动态坐标法作一概要归纳。

### 1 动态坐标法概述

在翘曲理论中,把作用于横截面上的内、外纵向力系沿周边向指定点作力系简化,简化为作用在各单肢板中线上的力矩  $M$  和作用于简化中心处的轴力  $N$ ,并把各力矩用与该单肢板中线方向相同的双箭头矢量表示称为弯矩矢量。当截面上内、外纵向力系平衡时,按图 1(a)、(b) 所示的符号,平衡方程为

$$N_i = P \quad M_1^i = M_1^e \quad M_2^i = M_2^e \quad M_3^i = M_3^e \quad (1)$$

式中:上角标  $i$ 、 $e$  分别表示内、外弯矩矢量。

\* 收稿日期:2002-09-10

作者简介:李开禧(1935-),男,教授,博士生导师,主要从事薄壁理论、钢结构稳定研究。

新方程和人们熟知的平衡方程

$$N_i = P \quad M_x^i = M_x^e \quad M_y^i = M_y^e \quad B^i = B^e \quad (2)$$

是等价的,两者可理解为线性变换后的结果,包括内外双力矩平衡方程  $B^i = B^e$  在内,都是可以在方程组(1)中通过力的二次矩,即弯矩矢量对点之矩的概念推导出来。但方程组(1)中,抛弃了方程组(2)中需要的主坐标  $x, y$  和形心  $C$ 、弯心  $S$ ,这是大幅度提高计算效益的原因之一。此外,在求解方程组(1)的过程中,还巧妙地增加顺周边依序迭代的措施,使未知力逐步消元,避免联立求解,使计算过程一气呵成。

在横截面所在的纸平面上指定一点作为极

点,由它到各板中线的有向线段是我们熟知的向径。在刚周边假定的前提下,由两板中线交界处的纵向变形协调关系可以证明,若各板中线的纵向转角用按右手螺旋定则所规定的矢量表示,并称之为转角矢量,则这个转角矢量必然汇交于一点,同时伴生横截面正投影绕该点转动,其转角沿杆长方向的导数与以该转动中心为极点的三个向径的乘积即为三个转角矢量。当该转角导数为单位一时,各向径与对应的转角矢量相等,故又把它称为转角向径。而过两板中线交点作对应中性轴的平行线,这两线的交点正好是全截面正投影的转动中心。也就是说当求出中性轴  $O_1 - O_2, O_2 - O_3$  之后,按上述方法即可定出转动中心  $K$  从而将全截面的变形整理成绕  $K$  点转动的一维变形问题。显然,截面的平面弯曲变形或翘曲变形是  $K$  点在无穷远处或弯曲中心处的特例。

已知各板的中性点,又令板中线绕该点纵向转动时的转角等于向径,则纵向位移是量纲为长度平方的已知值。照此绘出的图形,即称为单位翘曲变形时的纵向位移图,又称为动态坐标,记为  $\omega_k$  图。再按内外纵向力系对该位移所做功相等的条件,可导出应力  $\sigma$  与转角的二阶导数  $\beta''$  的算式为:

$$\sigma = \frac{B_k \omega_k}{I_{\omega_k}} \quad (3)$$

$$\beta'' = \frac{B_k}{EI_{\omega_k}} \quad (4)$$

式中:  $I_{\omega_k} = \int_A \omega_k^2 dA$ 、 $B_k$  仍称为翘曲惯矩、双力矩,它等于外纵向力与该作用点处的位移  $\omega_k$  的乘积。当荷载为作用在某板中线上的外弯矩矢量  $M_i$  时,  $B_k$  等于  $M_i r_{ki}$ ,  $r_{ki}$  为该板中线到  $K$  点的臂长。

动态坐标法的基本思路是把按任意方式作用在构件上的荷载分解为几种沿杆长作用方式相同的荷载,对于每一种荷载,都很容易地绘出  $\omega_k$  图,全杆件的变形整理成绕串连  $K$  点的纵向轴线转动的一维问题,再将计算结果迭加,就将空间变形分析的复杂问题简化为初等材料力学中已经熟悉的问题。从而全盘移植结构力学中已熟悉的力法、位移法等一系列知识,以便能直接分析空间变形的超静定问题、稳定问题以及抗震问题等。

## 2 示例

### 1) 正应力计算

图 2(a)所示的槽形截面,截面尺寸如图所示。壁厚为 1,在上翼缘开口端作用  $P = 100$  的压力,经计算可知截面的形心  $C$  和弯心  $S$  如图 2(a)所示。要求截面在  $P$  作用下的正应力分布。

根据动态坐标法,以力作用点为简化中心,则  $M_1^i = M_2^i = M_3^i = 0$ ,同时暂设另一开口端的应力为  $\sigma_0$ ,则由  $M_1^i = 0$  得  $\sigma_1 = -2\sigma_0$ ,同理由  $M_2^i = 0$  得  $\sigma_2 = 5.2\sigma_0$ ,  $M_3^i = 0$  得  $\sigma_3 = -24.4\sigma_0$ 。截面上的合力

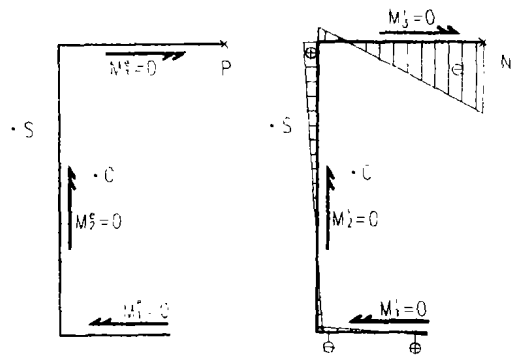


图 1 内外力系平衡

$N = -218\sigma_0$ 。由  $N = P = 100$  得：

$$\sigma_0 = -0.458716$$

$$\sigma_1 = -2\sigma_0 = 0.917431$$

$$\sigma_2 = 5.2\sigma_0 = -2.385321$$

$$\sigma_3 = -24.4\sigma_0 = 11.192661$$

绘出正应力分布图如图 2(b) 所示。

下面按传统的方法,把该力的作用效应分为轴心压力  $P$ 、绕两主轴弯矩  $M_x$ 、 $M_y$  和双力矩  $B$  的共同作用,并分别计算,结果如图 3 所示,相关内力与几何参数已附注于图中。

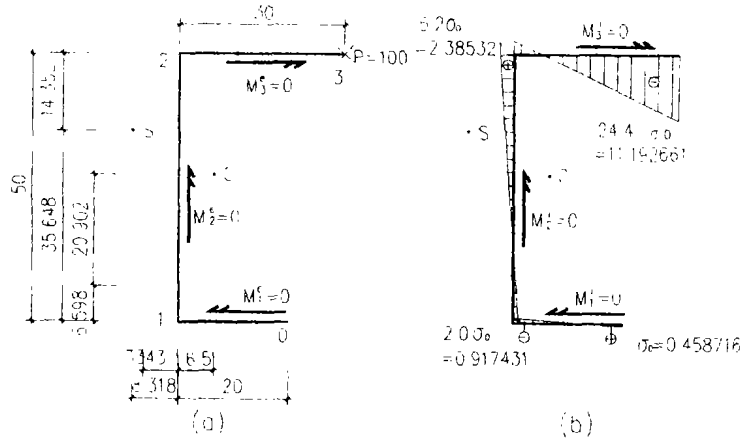


图 2 槽形截面正应力计算(动态坐标法)

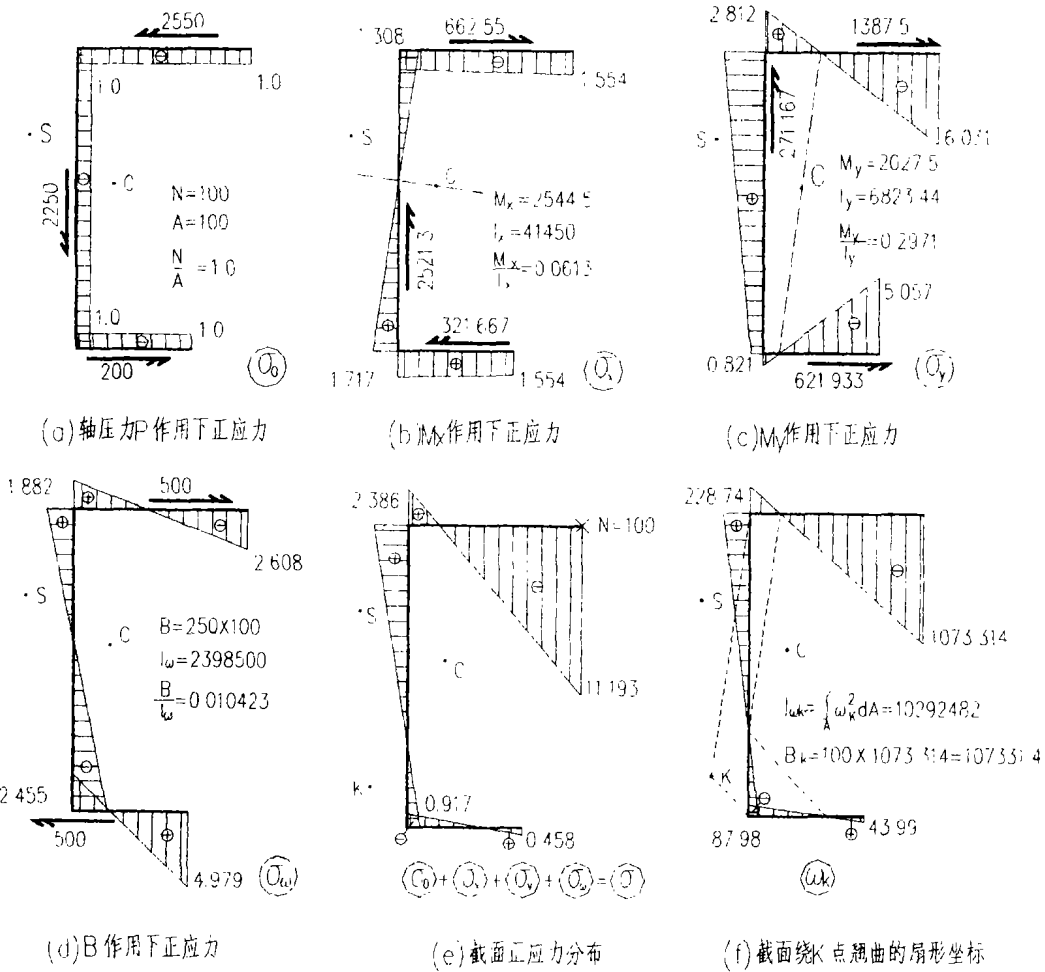


图 3 槽形截面正应力计算(传统方法)

据绕定点转动理论,其应力也可根据图 3(f)中已绘出的  $\omega_k$  图和翘曲矩  $I_{\omega_k}$  ( $I_{\omega_k}$  和  $B_k$  值已标注与图中)由式(3)求得

$$\sigma_0 = \frac{B_k \omega_{k1}}{I_{\omega_k}} = -0.45873$$

同理可得  $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$  同前述方法答案相同。

2) 变形计算

一悬臂柱,高  $L$ ,下端固定,其横截面如图 2(a)所示,柱顶作用一压力  $P$ ,其作用于位置如图 2(a)所示,求该柱在  $P$  作用下柱顶截面各节点位移。

根据绕定点转动理论,该双向偏压悬臂柱在  $P$  作用下载面绕一根新的轴线转动,利用结构力学知识可求得柱顶截面任一节点位移  $u_i = \frac{l^2}{2E} (\frac{B_k}{I_{ok}} y_i)$ 、 $v_i = \frac{l^2}{2E} (\frac{B_k}{I_{ok}} x_i)$ 。其中  $u_i、v_i$  为该节点沿  $x、y$  向的位移, $x_i、y_i$  为该节点在  $s_k k y_k$  坐标系中的坐标值。

而按传统方法,节点位移是截面绕两惯性主轴的弯曲与绕截面弯心  $S$  扭转三者叠加的结果,是一个三维问题,若已知主惯性矩为  $I_x、I_y、I_w$  和弯心  $S$  的位置。则位移如下式计算:

$$u_i = \frac{l^2}{2E} \left[ \frac{M_x}{I_x} \cos\varphi + \frac{M_y}{I_y} \sin\varphi + \frac{B}{I_w} y_s \right]$$

$$v_i = \frac{l^2}{2E} \left[ \frac{M_x}{I_x} \sin\varphi + \frac{M_y}{I_y} \cos\varphi + \frac{B}{I_w} x_s \right]$$

其中  $x_s、y_s$  为节点在  $X_s Y_s$  坐标系中的坐标值。 $\varphi$  为主惯性轴与  $X_s Y_s$  的夹角。

其计算过程列表如下:(表中  $x_k, y_k$  为该节点在  $x_k k y_k$  坐标系中的坐标值)。

表 1 槽形截面各点沿  $x_s$  轴位移  $u (\times \frac{l^2}{2E})$

式	变形迭加			$\Sigma$	绕定点转动
	$\frac{M_x}{I_x} \cos\varphi$	$\frac{M_y}{I_y} \sin\varphi$	$\frac{B}{I_w} y_s$		$\frac{B_k}{I_{ok}} y_k$
0	0.061 3 × 0.133 92 = 0.008 21	0.297 1 × 0.99 <sup>1</sup> = 0.294 43	0.010 428 × 14.352 = 0.149 7	0.452 3	0.010 428 × 43.402 = 0.452 6
1	0.008 21	0.294 43	0.149 7	0.452 4	0.452 6
2	0.008 21	0.294 43	0.010 428 × (-35.648) = -0.371 74	0.069 1	0.010 428 × (-6.598) = -0.068 8
3	0.008 21	0.294 43	-0.371 74	-0.069 1	-0.068 8

表 2 槽形截面各点沿  $y_s$  轴位移  $v (\times \frac{l^2}{2E})$

式	变形迭加			$\Sigma$	绕定点转动
	$\frac{M_x}{I_x} \sin\varphi$	$\frac{M_y}{I_y} \cos\varphi$	$\frac{B}{I_w} y_s$		$\frac{B_k}{I_{ok}} y_k$
0	-0.061 3 × 0.991 = 0.060 75	297 1 × 0.133 92 = 0.039 29	0.104 28 × 38.38 = 0.399 58	0.378 6	0.104 28 × 36.334 = 0.037 89
1	-0.060 75	0.039 29	0.104 28 × 8.318 = 0.086 74	0.065 78	0.104 28 × 6.334 = 0.066
2	-0.0607 5	0.039 29	0.086 74	0.065 78	0.066
3	-0.060 75	0.039 29	0.104 28 × 28.318 = 0.295 30	0.274 3	0.104 28 × 26.334 = 0.274 6

对于 Z 形截面,其计算过程与槽形截面相同,为省篇幅,仅将其计算结果列示于图 4。

3 计算机验证

计算结果正确与否,靠有限的示例验证是不够的。相反,如果有一个算例不符,就是整个理论有误。所以,必须尽力做到全面检查,最好的办法是编程,由计算机扫描,利用新旧方法是否异途同归,由此判断理论的正误。经过近 320 个点的对比验算,现抽选两种截面,压力作用于图示 1、2、3、4

点。用传统方法和动态坐标法计算诸点应力,如表 3、4 所示。显然,两种计算结果是完全相同的。

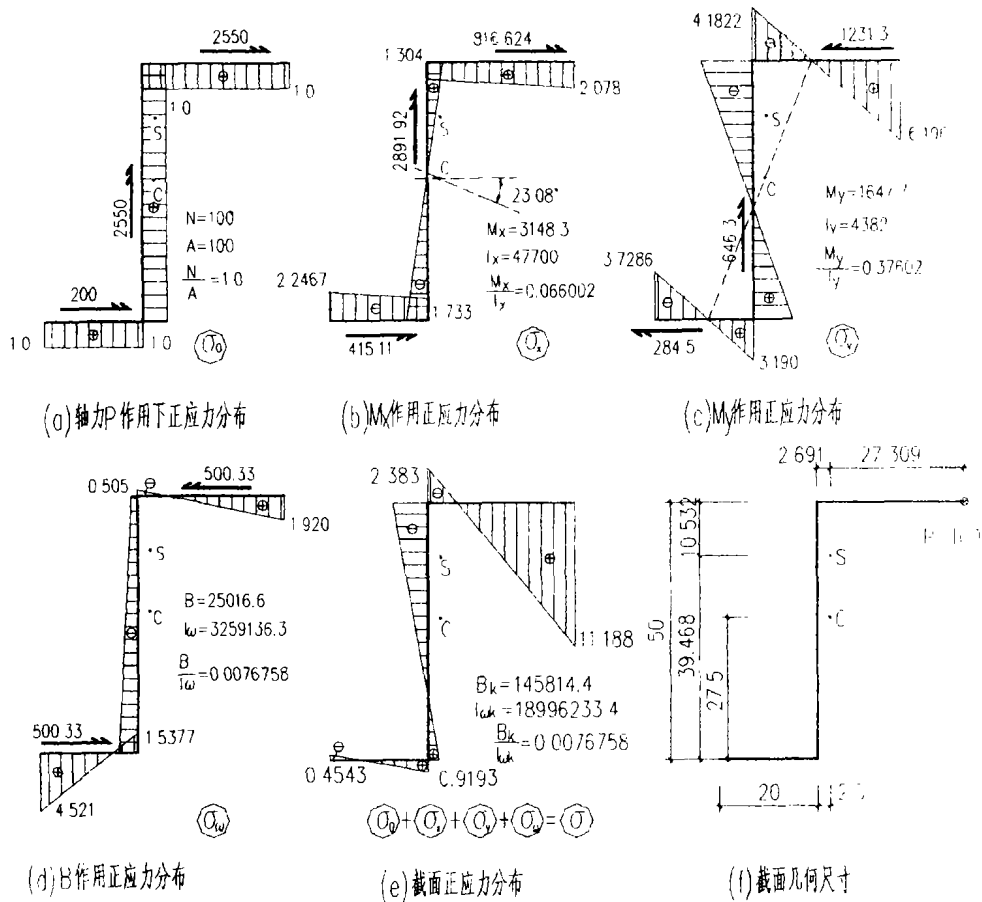


图 4 Z形截面正应力计算(传统方法)

## 4 结论

经过大量的算例和计算机扫描后证明,翘曲理论是正确的,完全能够置换现行理论。由于它的概念清晰,方法简捷,易为工程师掌握,确是更简明的工程实用计算理论。绕定轴转动理论,在静力分析方面,建立应力与变形的统一计算公式,不再分为四个力因素分别计算迭加,使构件受力反应一目了然,确实达到了工程实用理论要求:深入浅出。

特别是当截面形状和加载方式沿杆长不变时,即符合该理论所述的特例:单调加载条件时,构件的变形计算与超静定结构分析都与平面弯曲和约束扭转理论所述的方法相同。实际上,新理论把以上两种变形视为指定加载条件下的特例,其计算方法自然也是统一方法前提下的两个特定应用。而在平面弯曲理论中对静力分析方法非常成熟,有大量计算结果可资借鉴。可见,直接移植这些成果,就是空间变形的分析技术。

在薄壁梁的构造中,截面形状有改变,即所谓弯曲中心不共线时,在传统理论中,至今尚无工程实用计算方法的介绍,而在新理论中,取相邻截面的纵向力系简化中心相同,则由该点的内外纵向力相等、相邻截面各单肢中线处内、外弯矩相等和剪力相等建立平衡方程;同时由该点处两相邻截面的纵向位移相同、各单肢中线处转角相等和切向位移相等建立变形协调关系,则能正确简捷地计算出来。填补了计算方法上的一片空白。

表3 槽形截面各点正应力

计算截面	荷载作用点 $P = 95$		截面上各点的正应力			
			1	2	3	4
1	传统方法		10.779 37	-2.558 739	0.871 060 3	-0.435 530 9
	动态坐标法		10.779 37	-2.558 739	0.871 060 2	-0.435 530 1
2	传统方法		-2.558 739	5.117 478	-1.742 121	0.871 061
	动态坐标法		-2.558 739	5.117 479	-1.742 120	0.871 060
3	传统方法		0.871 060 3	-1.742 121	5.444 126	-2.722 063
	动态坐标法		0.871 060 2	-1.742 120	5.444 126	-2.722 063
4	传统方法		-0.435 530 8	0.871 061 1	-2.722 063	12.761 03
	动态坐标法		-0.435 530 8	0.871 061 6	-2.722 063	12.761 03

表4 Z形截面各点正应力

计算截面	荷载作用点 $P = 120$		截面上各点的正应力			
			1	2	3	4
1	传统方法		19.384 6	-2.769 23	0.923 077	-0.461 538
	动态坐标法		19.384 6	-2.769 23	0.923 077	-0.461 538
2	传统方法		-2.769 23	5.538 46	-1.846 15	0.923 077
	动态坐标法		-2.769 23	-5.538 46	-1.846 15	0.923 077
3	传统方法		0.923 077	-1.846 15	4.615 38	-2.307 69
	动态坐标法		0.923 077	-1.846 15	4.615 38	-2.307 69
4	传统方法		-0.461 538	0.923 077	-2.307 69	10.153 8
	动态坐标法		-0.461 539	0.923 079	-2.307 69	10.153 8

该理论在二阶分析中的效果尤为突出,它在建立变形刚度的统一算式基础上,导出正交临界力的统一表达式,实质上是把空间失稳现象分解为三个绕纵向轴线转动失稳的正交模态,也可以简化地理解为三个切向平面内弯曲失稳。从而又整块地移植面内弯曲稳定理论的分析方法和边缘屈服理论的二阶段分析方法。

显然,由于有了直接计算空间变形刚度的公式,因而使自振频率的算式也相应直观简练,以致带动动力分析方法的改进。

## 参考文献:

- [1] 李开禧.弹性薄壁构件翘曲[M].北京:中国建筑工业出版社,1990.
- [2] 李开禧,等.对修订钢结构设计规范的建议[A].钢结构工程研究[C].北京:中国计划出版社,1998.
- [3] Schardt.R. Verallgemeinerte Technische Biegetheorie[M]. Berlin, 1989.
- [4] 李开禧,刘坚,等.钢结构稳定计算理论的新探索[J].结构工程师.上海:同济大学出版社,2000(S0):572-591
- [5] 李开禧.关于薄壁杆件翘曲变形的讨论[J].重庆建筑工程学院学报,1982,(2):1-75.
- [6] 李开禧.薄腹工字钢梁的临界双力矩[J].重庆建筑工程学院学报,1984,(1):1-16.
- [7] 李开禧.薄腹工形截面柱的弯扭屈曲[J].重庆建筑工程学院学报,1984,(2):56-62.
- [8] 李开禧,等.临界双力矩的概念及其应用[J].重庆交通学院学报,1992,11(2):14-23.
- [9] 李开禧,等.校核钢梁稳定的相关公式[J].重庆交通学院学报,1992,11(3):28-37.
- [10] 李开禧,等.关于薄壁截面梁一阶应力分析中的几个问题[J].建筑结构,1997,(10):26-29.
- [11] 李开禧,等.关于V形截面梁的扭转失稳问题[J].建筑结构学报,1994,(9):28-30.

(下转第57页)