·土木工程·

文章编号:1006-7329(2003)02-0032-05

轴对称圆板大挠度问题的自由参数摄动法解*

陈山林，　李其中
(重庆大学　土木工程学院，重庆　400045)

摘要: 采用自由参数摄动法处理了在均布载荷以及集中载荷作用下轴对称圆板的大挠度问题，得到了圆平板在边界固定夹紧及可移夹紧条件下的刚度特征、内力分布以及挠度曲线，并将求解过程及结果与这一问题的经典解进行了比较。

关键词: 自由参数摄动法；轴对称圆板；大挠度问题
中图分类号: O343.9　　　**文献标识码:** A

1954 年，钱伟长教授[1]采用以中心挠度为摄动参数的摄动方法处理了均布及集中载荷分别作用下不同边界条件的圆板大挠度问题。其他的研究者也曾经使用广义载荷[2]、与泊松比相关的$(1-\nu^2)$、平均转角[4]等作为摄动参数对圆板大挠度问题进行过研究。采用不同摄动参数计算出的结果在精度以及适用范围上有一定的差别，有时差别还比较大。对于这一问题，陈山林[5,6]对各种摄动参数解进行了研究和评价。迄今为止，研究者只能通过经验的认识和判断选择摄动参数，而在摄动参数的选择方面却始终缺乏一个一般的原则。

陈山林在文献[7]中提出了一种称之为自由参数摄动法的新的方法。采用该方法求解板和扁壳大挠度问题可以在不具体确定摄动参数的前提下得出全部弹性特征，从而避免了选择摄动参数的经验因素。本文将采用这一方法研究轴对称圆板的大挠度问题。

1　基本方程和自由摄动参数展开

对于边界固定夹紧和可移夹紧下底半径为 a，厚度为 h 的圆板，其无量纲基本方程及边界条件如下[1]:

$$\begin{cases} L(\xi\theta) = Pf(\xi) - S_r\theta \\ L(\xi S_r) = \dfrac{1}{2}\theta^2 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \text{固定夹紧}: \xi = 0\text{时}: \theta = 0, S_r = 0;\ \xi = 1\text{时}: \theta = 0, \dfrac{dS_r}{d\xi} - \nu S_r = 0 \\ \text{可移夹紧}: \xi = 0\text{时}: \theta = 0, S_r = 0;\ \xi = 1\text{时}: \theta = 0, S_r = 0 \end{cases} \tag{2}$$

各无量纲量意义如下:

$$W = \frac{w}{h}\sqrt{12(1-\nu^2)}, S_t = -\frac{a^2N_t}{Eh^3}\cdot 12(1-\nu^2), S_r = -\frac{a^2\xi N_r}{Eh^3}\cdot 12(1-\nu^2), \xi = \frac{r}{a}, \theta = \frac{dW}{d\xi} \tag{3}$$

均布载荷作用时:　$P = \dfrac{a^2q}{Eh^4}\cdot 12(1-\nu^2)\sqrt{3(1-\nu^2)},\ f(\xi) = \xi^2$

* 收稿日期:2003-01-20
作者简介:陈山林(1942-)，男，四川内江人，博士生导师，教授，主要从事固体力学研究。

集中载荷作用时：　$P = \dfrac{a^2 P_0}{\pi \cdot E \cdot h^4} \cdot 12(1-\nu^2)\sqrt{3(1-\nu^2)}$，$f(\xi) = 1$

式中算子 $L(\cdots) = \xi \dfrac{d}{d\xi}\dfrac{1}{\xi}\dfrac{d}{d\xi}(\cdots)$

将 P、θ、S_r 按摄动参数 ε 展开如下形式：

$$P = P_1 \cdot \varepsilon + P_3 \cdot \varepsilon^3 + P_5 \cdot \varepsilon^5 + \cdots + P_{2n-1} \cdot \varepsilon^{2n-1} + O(\varepsilon^{2n+1}) \tag{4}$$

$$\theta = \theta_1 \cdot \varepsilon + \theta_3 \cdot \varepsilon^3 + \theta_5 \cdot \varepsilon^5 + \cdots + \theta_{2n-1} \cdot \varepsilon^{2n-1} + O(\varepsilon^{2n+1}) \tag{5}$$

$$S_r = S_2 \cdot \varepsilon^2 + S_4 \cdot \varepsilon^4 + S_6 \cdot \varepsilon^6 + \cdots + S_{2n} \cdot \varepsilon^{2n} + O(\varepsilon^{2n+2}) \tag{6}$$

以上各式中，P_{2n-1}、θ_{2n-1}、$S_{2i}(i=1,2,\cdots)$为仅与 ξ 有关的待定函数。

将(5)、(6)式代入(1)及(2)式，并比较 ε 同次系数可得(本文略去 ε 五次以上各项)：

$$\begin{cases} \varepsilon^1: & L(\rho\theta_1) = P_1 \cdot f(\xi) \\ \varepsilon_2: & L(\rho S_2) = \dfrac{1}{2}\theta^2 \\ \varepsilon^3: & L(\rho\theta_3) = P_3 f(\xi) - S_2 \cdot \theta_1 \\ \varepsilon_4: & L(\rho S_4) = \theta_1 \cdot \theta_3 \end{cases} \tag{7}$$

固定夹紧时：$\xi = 0$ 时，$\theta_{2i-1} = 0, S_{2i} = 0$；$\xi = 1$ 时，$\theta_{2i-1} = 0, \dfrac{dS_{2i}}{d\xi} - \nu S_{2i} = 0$　$(i = 1,2)$(8)

可移夹紧时：$\xi = 0$ 时，$\theta_{2i-1} = 0, S_{2i} = 0$；$\xi = 1$ 时，$\theta_{2i-1} = 0, S_{2i} = 0$　$(i = 1,2)$ (9)

2　采用自由参数摄动法求解板的弹性特征

设存在函数 $\varphi_{2i-1}(\xi)$，$\psi_{2i}(\xi)$满足：

$$\begin{cases} L(\xi\varphi_1) = f(\xi) \\ L(\xi\psi^2) = \dfrac{1}{2}\varphi_1^2 \\ L(\xi\varphi_3) = -\varphi_1 \cdot \psi_2 \\ L(\xi\psi_4) = \varphi_1 \cdot \varphi_3 \end{cases} \tag{10}$$

且对于固定夹紧情况：$\varepsilon = 0$ 时，$\varphi_{2i-1} = 0$，$\psi_{2i} = 0$，$\xi = 1$ 时：$\varphi_{2i-1} = 0$，$\dfrac{d\psi_{2i}}{d\xi} - \nu\psi_{2i} = 0$　(11)

对于可移夹紧情况：　$\varepsilon = 0$ 时，$\varphi_{2i-1} = 0$，$\psi_{2i} = 0$，$\xi = 1$ 时：$\varphi_{2i-1} = 0$，$\psi_{2i} = 0$　(12)

对比式(7)与(10)，并将边界条件(8)、(9)分别与(11)、(12)比较，可以证明有下式成立：

$$\begin{aligned} \theta_1 &= P_1 \cdot \varphi_1 \\ S_2 &= P_1^2 \cdot \psi_2 \\ \theta_3 &= P_3 \cdot \varphi_1 + P_1^3 \cdot \varphi_3 \\ S_4 &= 2P_1 \cdot P_3 \cdot \psi_2 + P_1^4 \cdot \psi_4 \end{aligned} \tag{13}$$

将(13)代入(5)、(6)式，得：

$$\theta = P_1 \cdot \varphi_1 \cdot \varepsilon + (P_3 \cdot \varphi_1 + P_1^3 \cdot \varphi_3)\varepsilon^3 + O(\varepsilon^5) \tag{14}$$

$$S_r = P_1^2 \cdot \psi_2 \cdot \varepsilon^2 + (2P_1 \cdot P_3 \cdot \psi_2 + P_1^4 \cdot \psi_4)\varepsilon^4 + O(\varepsilon^6) \tag{15}$$

引入如下形式弹性特征方程：

$$P = \alpha_1(\xi)W(\xi) + \alpha_3(\xi)W^3(\xi) + O[W^5(\xi)] \tag{16}$$

由式(14)可得：

$$W(\xi) = P_1 \cdot Y_1 \cdot \varepsilon + (P_3 \cdot Y_1 + P_1^3 \cdot Y_3)\varepsilon^3 + O(\varepsilon^5) \tag{17}$$

式中：
$$Y_{2i-1}(\xi)=\int_1^{\xi}\varphi_{2i-1}(\rho)\,\mathrm{d}\rho \tag{18}$$

将(17)代入(16)，略去 ε 五次以上小量得：
$$P = P_1\cdot\alpha_1\cdot Y_1\cdot\varepsilon+(P_3\cdot\alpha_1\cdot Y_1+P_1^3\cdot\alpha_1\cdot Y_3+P_1^3\cdot\alpha_3\cdot Y_1^3)\varepsilon^3+O(\varepsilon^5) \tag{19}$$

比较式(19)以及(4)式第一式，令 ε 同次项系数相等，得：
$$\begin{cases}\alpha_1(\xi)=Y_1^{-1}(\xi)\\ \alpha_3(\xi)=-Y_1^{-4}(\xi)\cdot Y_3(\xi)\end{cases} \tag{20}$$

将(10)～(12)式直接积分求解 $\varphi_{2i-1}(i=1,2)$ 并代入(20)即可求得 $\alpha_{2i-1}(\xi)(i=1,2)$ 的具体表达式如下：

均布载荷下：
$$\alpha_1(\xi)=32\times(1-2\xi+\xi^4)^{-1} \tag{21}$$
$$\alpha_3(\xi)=\frac{1}{135}\times(1-2\xi^2+\xi^4)^{-4}\cdot[2\xi^{12}-18\xi^{10}+75\xi^8-(200+20\lambda)\xi^6 +(360+90\lambda)\xi^4-(342+120\lambda)\xi^2+(123+50\lambda)] \tag{22}$$

集中载荷下：
$$\alpha_1(\xi)=4\times(\xi\cdot\ln\xi-\frac{1}{2}\xi^2+\frac{1}{2})^{-1} \tag{23}$$
$$\alpha_3(\xi)=8\times[(2\xi^2\cdot\ln\xi-\xi^2+1)^{-4}\cdot(\frac{1}{36}\xi^6\cdot\ln^3\xi-\frac{13}{144}\xi^6\cdot\ln^2\xi+\frac{1}{9}\xi^6\cdot\ln\xi-\frac{119}{2\,592}\xi^6 -\frac{8+\lambda}{64}\xi^4\cdot\ln\xi+\frac{8+\lambda}{64}\xi^4-\frac{364+81\lambda}{3\,456}\xi^2+\frac{272+81\lambda}{10\,368})] \tag{24}$$

式中，$\lambda=\dfrac{1+\nu}{1-\nu}$，其中可移夹紧时，有 $\nu\to\infty$，则 $\lambda=-1$。

这样我们就得到了特征方程(16)的具体形式，其中的 $\alpha_i(\xi)(i=1,3)$ 见(21)～(24)式。

对板内其他物理量(薄膜力、弯矩)，我们引入弹性特征方程如下：
$$P^2=\beta_1(\xi)S_r(\xi)+\beta_2(\xi)S_r^2(\xi)+O[S_r^3(\xi)] \tag{25}$$
$$P^2=\gamma_1(\xi)S_t(\xi)+\gamma_2(\xi)S_t^2(\xi)+O[S_t^3(\xi)] \tag{26}$$
$$P=\eta_1(\xi)\cdot m_r(\xi)+\eta_3(\xi)\cdot m_r^3(\xi)+O[m_r^5(\varepsilon)] \tag{27}$$
$$P=\tau_1(\xi)\cdot m_t(\xi)+\tau_3(\xi)\cdot m_t^3(\xi)+O[m_t^5(\varepsilon)] \tag{28}$$

(25)、(26)中 $S_r(\xi)$ 与 $S_t(\xi)$ 为(3)式定义的无量纲径向和环向薄膜力，满足：
$$S_t(\xi)=\frac{\mathrm{d}S_r}{\mathrm{d}\xi} \tag{29}$$

(27)、(28)中 $m_r(\xi)$ 与 $m_t(\xi)$ 表示无量纲径向弯矩和环向弯矩，满足：
$$\begin{cases}m_r(\xi)=\dfrac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\xi^2}+\dfrac{\nu}{\xi}\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\xi}\\ m_t(\xi)=\nu\dfrac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\xi^2}+\dfrac{1}{\xi}\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\xi}\end{cases} \tag{30}$$

则通过确定相应的函数 α_{2i-1}、β_i、γ_i、η_{2i-1} 和 $\tau_{2i-1}(i=1,2)$，即可求得无量纲力与内力以及内弯矩之间的关系，则板的内力分布得以求出。

将式(15)代入(25)得，略去 ε 六次以上项得：
$$P^2=P_1^2\cdot\beta_1\cdot\psi_2\cdot\varepsilon^2+[(2P_1\cdot P_3\cdot\psi_2+P_1^4\cdot\psi_4)\cdot\beta_1+P_1^4\cdot\psi_2^2]\varepsilon^4+O(\varepsilon^6) \tag{31}$$

将(4)式平方并略去 ε 六次以上项得：
$$P^2=P_1^2\cdot\varepsilon^2+2P_1\cdot P_3\varepsilon^4+O(\varepsilon^6) \tag{32}$$

比较(31)、(32)使 ε 同次项系数相等,得:

$$\begin{cases} \beta_1(\xi) = \psi_2^{-1}(\xi) \\ \beta_2(\xi) = -\psi_2^{-3}(\xi)\psi_4(\xi) \end{cases} \tag{33}$$

将(10) - (12)式直接积分求解 $\psi_{2i}(i=2)$ 并代入(20)求得 $\beta_i(i=1,2)$ 具体形式如下:

均布载荷下:

$$\beta_1(\xi) = 6\,144 \times [\xi^7 - 4\xi^5 + 6\xi^3 - (4+\lambda)\xi]^{-1} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}\beta_2(\xi) = \frac{256}{35} \times [\xi^7 - 4\xi^5 + 6\xi^3 - (4+\lambda)\xi]^{-3} \cdot [3\xi^{15} - 34\xi^{12} + 182\xi^{11} \\ - (630 + 42\lambda)\xi^9 + (1\,540 + 280\lambda)\xi^7 - (2\,478 + 700\lambda)\xi^5 \\ + (2\,394 + 840\lambda)\xi^3 - (1\,242 - 755\lambda + 112\lambda^2)\xi]\end{aligned} \tag{35}$$

集中载荷下:

$$\beta_1(\xi) = 512 \times [7\xi^3 - 12\xi^3 \cdot \ln\xi + 8\xi^3 \cdot \ln^2\xi - (8+\lambda)\xi]^{-1} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}\beta_2(\xi) = 8\,192 \times [7\xi^3 - 12\xi^3 \cdot \ln\xi + 8\xi^3 \cdot \ln^2\xi - (8+\lambda)\xi]^{-3} \cdot [\frac{1}{18}\xi^7 \cdot \ln^4\xi - \frac{47}{216}\xi^7 \cdot \ln^3\xi \\ + \frac{65}{192}\xi^7 \cdot \ln^2\xi - \frac{4\,667}{20\,736}\xi^7 \cdot \ln\xi + \frac{25\,649}{497\,664}\xi^7 - \frac{1}{3\,456}(8+\lambda)(144\xi^5 \cdot \ln^2\xi \\ - 228\xi^5 \cdot \ln\xi + 83\xi^5) + \frac{1}{10\,368}(1\,092 + 243\lambda)(3\xi^3 - 4\xi^3 \cdot \ln\xi - 4 - \lambda) \\ + \frac{\xi}{497\,664}(108\,928 + 58\,401\lambda + 7\,488\lambda^2)]\end{aligned} \tag{37}$$

代入(25)得载荷与径向薄膜力的弹性特征. 弹性特征(26) ~ (28)的系数也可以直接由 φ_{2i-1} 和 ψ_{2i} 求出。将(6)式代入式(29)即可得到 S_t 按自由摄动参数 ε 展开的表达式:

$$S_t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}S_{2n}}{\mathrm{d}\xi} \cdot \varepsilon^{2n} \tag{38}$$

同样将(5)代入(30)式可得可得到 m_r、m_t 按自由摄动参数 ε 展开的表达式:

$$m_r = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{d}\theta_{2n-1}}{\mathrm{d}\xi} + \frac{\nu\theta^{2n-1}}{\xi} \right) \varepsilon^{2n-1} \tag{39}$$

$$m_t = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\nu\frac{\mathrm{d}\theta_{2n-1}}{\mathrm{d}\xi} + \frac{\theta^{2n-1}}{\xi} \right) \varepsilon^{2n-1} \tag{40}$$

则可以用 φ_{2i-1} 和 $\psi_{2i}(i=1,2)$ 表达式(31) ~ (33)中的待定函数 γ_i、η_{2i-1} 和 $\tau_{2i-1}(i=1,2)$,具体如下:

$$\begin{cases} \gamma_1(\xi) = \left(\frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}\xi}\right)^{-1} \\ \gamma_2(\xi) = -\left(\frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}\xi}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\psi_4}{\mathrm{d}\xi}\right)^{-1} \end{cases} \tag{41}$$

$$\begin{cases} \tau_1(\xi) = \left(\nu\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}\xi} + \frac{\varphi_1}{\xi}\right)^{-1} \\ \tau_2(\xi) = -\left(\nu\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}\xi} + \frac{\varphi_1}{\xi}\right)^{-4} \cdot \left(\nu\frac{\mathrm{d}\varphi_3}{\xi} + \frac{\varphi_3}{\xi}\right) \end{cases} \tag{42}$$

$$\begin{cases} \eta_1(\xi) = \left(\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}\xi} + \nu\frac{\varphi_1}{\xi}\right)^{-1} \\ \eta_2(\xi) = -\left(\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}\xi} + \nu\frac{\varphi_1}{\xi}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\varphi_3}{\mathrm{d}\xi} + \nu\frac{\varphi_1}{\xi}\right) \end{cases} \tag{43}$$

将(10) ~ (12)式直接积分求解,代入以上各式,则特征方程式(26) ~ (28)得以确定,解已全部得出。

3 与钱伟长解的比较

在(21)、(22)式中,令 $\xi=0$ 并代入(16),即得到载荷参数 P 与中心挠度 $W(0)$ 的关系式:

均布载荷作用下: $$P=32\times W(0)+\frac{123+50\lambda}{135}W^3(0)+O[W^5(0)] \tag{44}$$

集中载荷作用下: $$P=8\times W(0)+\frac{272+81\lambda}{1\ 296}W^3(0)+O[W^5(0)] \tag{45}$$

这便是圆板大挠度问题的钱伟长解[1]。如果我们按照文献[1]的做法,将无量纲挠度 $W(\xi)$ 及径向薄膜力 $S(\xi)$ 展开成中心挠度 $W(0)$ 的级数形式如下:

$$W(\xi)=h_1(\xi)\cdot W(0)+h_3(\xi)\cdot W^3(0)+O[W^5(0)] \tag{46}$$

$$S(\xi)=l_2(\xi)\cdot W^2(0)+l_4(\xi)\cdot W^4(0)+O[W^6(0)] \tag{47}$$

则将式(46)代入(16),略去 $W(0)$ 的五次方以上各项,并比较(44)式中 $W(0)$ 的同次项系数可以求得:

$$\begin{cases} h_1(\xi)=32\alpha_1^{-1}(\xi) \\ h_3(\xi)=\left[\dfrac{123+50\lambda}{135}-32\alpha_1^{-1}(\xi)\cdot\alpha_3(\xi)\right]/\alpha_1(\xi) \end{cases} \tag{48}$$

同样,将(47)代入(25),略去 $W(0)$ 的六次方以上各项,并比较(44)式中 $W(0)$ 的同次项系数,可以求得:

$$\begin{cases} l_2(\xi)=1024\beta_1^{-1}(\xi) \\ l_4(\xi)=\left[\dfrac{64\times(123+50\lambda)}{135}-1048576\beta_1^{-2}(\xi)\cdot\beta_2(\xi)\right]/\beta_1(\xi) \end{cases} \tag{49}$$

$\beta_i(\xi)(i=1,3)$ 见式(34)、(35)。

式(48)以及(49)代入(46)、(47)式便可得到均布载荷下圆板大挠度问题的钱伟长解[1]的挠度曲线和应力与中心挠度的关系。采用同样的方法,也可以由(45)式得到集中载荷下的圆板大挠度问题的钱伟长解[1]的挠度曲线和薄膜力弹性特征。然而,自由参数摄动法的求解中并没有将挠度和应力按照中心挠度的级数展开,略去了钱伟长解中的式(46)和(47)的按具体摄动参数展开的步骤,直接得出了问题的解(16)、(25)~(28)。

参考文献:

[1] 钱伟长,叶开沅.圆薄板大挠度问题[J].物理学报,1954,10(3):209-238.
[2] Vincent,J.J..The bending of a thin circular plate[J].Phil.Mag.,1931,12:185-196.
[3] Schmidt R. and DaDeppo D.A..A new approach to the analysis of shells, plates and membranes with finite deflection[J]. Int.J of Non-linear Mech.,1974,9(5):409-419.
[4] 黄黔.复合载荷下圆薄板的大挠度问题[J].应用数学和力学,1983,4(5):711-720.
[5] 陈山林,光积昌.圆薄板大挠度问题的摄动参数[J].应用数学和力学,1981,2(1):131-144.
[6] 陈山林.圆板大挠度问题的钱伟长解及其渐进特性[J].应用数学和力学,1982,3(4):513-518.
[7] 陈山林.自由参数摄动法[A].钱伟长教授九十寿辰纪念文集[C].上海,2002.
[8] A.C.沃尔密尔,卢文达.柔韧板与柔韧壳[M].北京:科学出版社,1959.

(下转第66页)

参考文献:

[1] Tutschke,W.实分析基地[M].北京:人民教育出版社,1979,180-189.
[2] 张远达.线性代数原理[M].上海:上海教育出版社.1980,179-231.
[3] 王松桂,贾忠贞.矩阵论中的不等式[M].合肥:安徽教育出版社,1994,72-80.
[4] 杨路,张景中.关于有限点集的一类几何不等式[J].中国科技大学学报,1981,11(2):1-8.
[5] 杨路,张景中.关于有限点集的一类几何不等式[J].数学学报,1980,23(5):740-749.
[6] 杨世国.共超球质点系的一个结果[J].数学杂志,1994,14(1):97-100.

Axes of Minimal Moment of Inertia for Particle Set in E^n

YANG Shi - guo
(Anhui Educational Institute, Hefei 230061, P. R. China)

Abstract: In this paper, the theory and method of linear algebra are used to study the problem about axes of minimal moment of inertia for particle set in the n - dimensional Eucldean space En. The general method is given to solve this problem and the result obtained is that the axes of minimal moment of inertia for particle set $\sigma = \{A_i(m_i);\ i = 1, 2, \cdots, t\}$ is the straight line passing the center of gravity of σ and paralleling the eigenvector related maximum eigenvalue of the matrix C.

Keywords: particle; barycenter; matrix; eigenvalue

(上接第32页)

The FPPM Solutions for the Problems of Large Deflection of Axisymmetric Circular Plate

CHEN Shan - lin, LI Qi - zhong
(College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, P. R. China)

Abstract: In this paper, the Free - Parameters Perturbation Method (FPPM) is applied to analyze the problems of large deflection of circular plates under uniformly distributed pressure and concentrating load at the center respectively. The stiffness characteristics, stress distribution regularity and deformation curves of circular plates with boundaries rigidly clamped or clamped with slip along outer edges are obtained. Meanwhile, the results and computing processes are compared with those of Chien's solutions.

Keywords: Free - Parameters Perturbation Method (FPPM); axisymmetric circular plate; problems of large deflection