

文章编号:1006-7329(2003)03-0026-04

## 中间主应力对球形孔扩张的影响\*

周小平<sup>1,2</sup>, 张永兴<sup>1</sup>, 王建华<sup>2</sup>

(1.重庆大学 土木工程学院, 重庆 400045; 2.上海交通大学 建筑工程与力学学院, 上海 200030)

**摘要:**基于 Mohr - Coulomb 理论推导的球形孔扩张问题的弹塑性解没有考虑中间主应力的影响。因而与实际结果有误差。为此,本文利用双剪强度理论建立了球形孔扩张问题时的弹塑性解。通过算例表明:基于双剪强度理论所求的球形孔扩张的塑性区半径小于 M - C 准则。据此可充分发挥材料自身的承载能力,减少支护,对实际工程具有重要的理论和实际意义。

**关键词:**双剪强度理论; 球形孔扩张; 弹塑性解; 中间主应力

中图分类号: TU456

文献标识码: A

## Influence of Intermediate Principal Stress on Elastic - plastic Solution of Expansion of Sphere Cavities

ZHOU Xiao - ping<sup>1,2</sup>, ZHANG Yong - xing<sup>1</sup>, WANG Jian - hua<sup>2</sup>

(1. College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, P. R. China; 2. School of Civil Engineering and Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, P. R. China)

**Abstract:** The elastic - plastic solution of expansion of sphere cavities based on Tresca strength criterion and Mohr - Coulomb strength criterion did not take account of the effect of intermediate principal stress. Based on the twin shear strength theory, the influence of intermediate principal stress on the elastic - plastic solution of expansion of sphere cavities is given, and radius of plastic zone and inner pressure are determined. The numerical results show that the radius of plastic zone will be reduced while the effect of intermediate principal stress is taken into account.

**Keywords:** Twin shear strength theory; expansion of sphere cavities; elastic - plastic solution; intermediate principal stress

现有的球形孔扩张问题时的弹塑性解大都是基于 Tresca 准则或 Mohr - Coulomb 准则推导而得<sup>[1-8]</sup>。但是, Tresca 准则, Mohr - Coulomb 准则并没有考虑中间主应力的影响。实验证明: 中间主应力对土体的屈服和破坏有影响<sup>[1,2,3]</sup>。由 Mohr - Coulomb 或 Tresca 强度准则推导的球形孔扩张问题的弹塑性解并不能完全反映地基实际情况, 且所得的结果是偏于保守的, 不能充分发挥土体的强度潜能。双剪强度理论考虑了中间主应力的影响, 但它适用于具有拉压不同强度的岩土材料。为此, 本文采用双剪强度理论对球形孔扩张问题进行分析。

双剪强度理论可表示为<sup>[3]</sup>:

\* 收稿日期: 2003 - 02 - 28

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59879012)

作者简介: 周小平(1970 - ), 男, 江西瑞金人, 博士, 副教授, 主要从事岩土工程的教学和科研工作。

$$\sigma_r - \frac{\sigma_2 + \sigma_\theta}{2} + \left( \sigma_r + \frac{\sigma_2 + \sigma_\theta}{2} \right) \sin \varphi_0 = 2c_0 \cos \varphi_0 \quad (1)$$

式中:  $c_0$ 、 $\varphi_0$  分别为岩土体凝聚力和内摩擦角。

## 1 理论模型

球形孔扩张问题是球对称问题,采用球坐标比较方便。考虑单元力系的平衡,可以得到球对称问题的平衡微分方程为(其中压应力为正)。

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = 0 \quad (2)$$

将式(1)代入(2)可得:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{4(1-m) + 4(3+m)\sin\varphi_0}{4-m+(4+m)\sin\varphi_0} \frac{\sigma_r}{r} + \frac{16c_0\cos\varphi_0}{4-m+(4+m)\sin\varphi_0} \frac{1}{r} = 0 \quad (3)$$

式中:  $m$ ——中间主应力参数( $m = \frac{2\sigma_2}{\sigma_r + \sigma_\theta}$ , 根据文献<sup>[3]</sup>对平面应变问题  $m \leq 1$ 。对弹性状态  $m$  小于 1; 对塑性状态  $m$  趋于 1)。

解式(3)可得:

$$\sigma_r = (P_u + C_t \operatorname{ctg} \varphi_t) \left( \frac{R_u}{r} \right)^{\frac{4\sin\varphi_t}{1+\sin\varphi_t}} - C_t \operatorname{ctg} \varphi_t \quad (4)$$

式中:  $\varphi_t = \arcsin \frac{1-m+(3+m)\sin\varphi_0}{3+\sin\varphi_0}$ ;  $C_t = \frac{4c_0\cos\varphi_0}{1-m+(3+m)\sin\varphi_0} \frac{1}{\cos\varphi_t}$

球形孔扩张后体积变化等于弹性区体积变化与塑性区体积变化之和,即:

$$\pi R_u^3 - \pi R_i^3 = \pi R_p^3 - \pi (R_p - U_p)^3 + \pi (R_p^3 - R_u^3) \Delta \quad (5)$$

式中:  $\Delta$  塑性区平均体积应变,略去式(5)中的  $U_p$  的高阶乘积项和  $R_i^3$  两项,可得:

$$R_u^3(1+\Delta) = 3U_p R_p^2 + R_p^3 \Delta \quad (6)$$

当  $R = R_p$ , 由弹性区径向位移  $U_p = \frac{(1+\nu)}{2E} R_p \sigma_p$ , 可得:

$$U_p = -\frac{1+\nu}{2E} R_p (\sigma_p - q) \quad (7)$$

由式(4)可得:

$$\sigma_p = (P_u + C_t \operatorname{ctg} \varphi_t) \left( \frac{R_u}{R_p} \right)^{\frac{4\sin\varphi_t}{1+\sin\varphi_t}} - C_t \operatorname{ctg} \varphi_t \quad (8)$$

将式(8)代入(7)可得:

$$U_p = -\frac{1+\nu}{2E} R_p \left[ (P_u + C_t \operatorname{ctg} \varphi_t) \left( \frac{R_u}{R_p} \right)^{\frac{4\sin\varphi_t}{1+\sin\varphi_t}} - q - C_t \operatorname{ctg} \varphi_t \right] \quad (9)$$

将式(9)代入(6)可得:

$$1 + \Delta = \frac{3R_p^3}{2R_u^3} \frac{1+\nu}{E} \left[ (P_u + C_t \operatorname{ctg} \varphi_t) \left( \frac{R_u}{R_p} \right)^{\frac{4\sin\varphi_t}{1+\sin\varphi_t}} - q - C_t \operatorname{ctg} \varphi_t \right] + \frac{R_p^3}{R_u^3} \Delta \quad (10)$$

在弹性区和塑性区交界处( $r = R_p$  处)满足双剪强度屈服条件又满足:

$$\sigma_\theta = -\frac{1}{2} \sigma_r \quad (12)$$

将式(12)代入(11)可得:

$$\sigma_p = \sigma_r = \frac{16c_0 \cos \varphi_0}{8 + m - m \sin \varphi_0} \quad (13)$$

将式(13)代入(8)可得:

$$(P_u + C_t \text{ctg} \varphi_t) \left( \frac{R_u}{R_p} \right)^{\frac{4 \sin \varphi_t}{1 + \sin \varphi_t}} - C_t \text{ctg} \varphi_t = \frac{16c_0 \cos \varphi_0}{8 + m - m \sin \varphi_0} \quad (14)$$

考虑到荷载作用前,整个岩土体具有各向同性的初始应力  $q$ ;于是有:

$$(P_u + C_t \text{ctg} \varphi_t) \left( \frac{R_u}{R_p} \right)^{\frac{4 \sin \varphi_t}{1 + \sin \varphi_t}} = \frac{3(q + C_t \text{ctg} \varphi_t)(1 + \sin \varphi_t)}{3 - \sin \varphi_t} \quad (15)$$

由(15)式可知,若能确定  $\frac{R_u}{R_p}$  的值,就能计算出球形孔内压力最终值  $P_u$ 。

将式(15)代入(10)可得:

$$\frac{3R_p^3(1 + \nu)}{2R_u^3E} \left( 3(q + C_t \text{ctg} \varphi_t) \left( \frac{1 + \sin \varphi_t}{3 - \sin \varphi_t} \right) - q - C_t \text{ctg} \varphi_t \right) + \frac{R_p^3 \Delta}{R_u^3} = 1 + \Delta \quad (16)$$

引进刚度指标:

$$I_r = \frac{E}{2(1 + \nu)(C_t + q \text{tg} \varphi_t)} = \frac{G}{S} \quad (17)$$

式中:  $G$ ——剪切模量,  $S$ ——双剪强度理论的抗剪强度。

将式(17)代入(16)可得:

$$\frac{R_p^3}{R_u^3} \left( \frac{1}{I_r} + \Delta \right) = 1 + \Delta \quad (18)$$

当  $\Delta \leq 0.15$ , 可令  $\sqrt{1 + \Delta} \approx 1$ , 则(18)式简化成:

$$\frac{R_p}{R_u} = I_r^{1/3} \quad (19)$$

式中:  $I_r = \frac{I_r}{1 + I_r \Delta} = \zeta I_r$

已知  $\frac{R_p}{R_u}$  就可以计算球形孔内压力的最终值  $P_u$ , 由式(15)可以:

$$P_u = \frac{3(1 + \sin \varphi_t)}{3 - \sin \varphi_t} (q + C_t \text{ctg} \varphi_t) (I_r)^{\frac{4 \sin \varphi_t}{3(1 + \sin \varphi_t)}} - C_t \text{ctg} \varphi_t \quad (20)$$

上式是考虑了中间主应力时求解的球形孔内压力最终值  $P_u$  的表达式。

## 2 算例

1) 假设土体承受的初始应力为  $q = 5 \text{ MPa}$ , 泊松比和弹性模量分别为  $\nu = 0.25$ ,  $E = 30 \text{ MPa}$ ,  $c_0 = 15 \text{ kPa}$ ,  $\varphi_0 = 30^\circ$ 。基于 M-C 准则和双剪强度理论的孔内压和塑性区半径分别如图 1、2 所示。

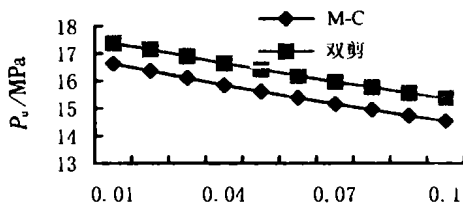


图 1 基于 M-C 准则和双剪强度理论的孔内压对比

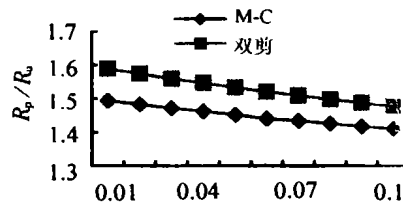


图 2 基于 M-C 准则和双剪强度理论的塑性区半径对比

2) 假设土体承受的初始应力为  $q = 5 \text{ MPa}$ , 泊松比和弹性模量分别为  $\nu = 0.25$ ,  $E = 30 \text{ MPa}$ ,  $c_0$

$= 20 \text{ kPa}$ ,  $\varphi_0 = 45^\circ$ 。基于 M-C 准则和双剪强度理论的孔内压和塑性区半径分别如图 3、4 所示。

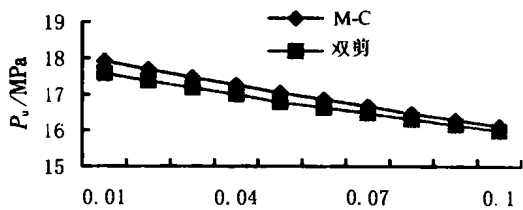


图3 基于 M-C 准则和双剪强度理论的孔内压对比

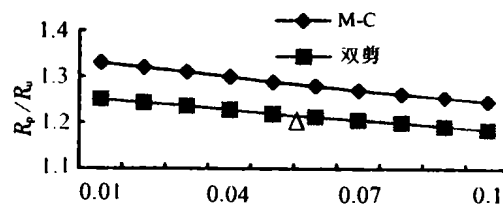


图4 基于 M-C 准则和双剪强度理论的塑性区半径对比

### 3 结论

从图 1 和 2 中可知: Tresca 强度理论、Mohr - Coulomb 强度理论在求解球形孔扩张问题由于没有考虑中间主应力的影响,其塑性区半径比基于双剪强度所得的塑性区半径大得多,因而说明 M - C 准则是偏与保守,没有充分发挥岩土自身的承载力而双剪强度理论由于考虑中间主应力的影响,其塑性区半径小得多,说明利用双剪强度理论可以充分发挥岩土自身的承载力。

### 参考文献:

- [1] Vesic, A. S., Expansion of cavities in infinite soil mass Proc[A]. ASCE[C], 1972, V98, SM3, 265.
- [2] 张学言. 岩土塑性力学[M]. 北京: 人民交通出版社, 1993.
- [3] 俞茂宏. 双剪强度理论[M]. 北京: 科学出版社, 1998.
- [4] 许东俊, 耿乃光. 岩石强度随中间主应力变化规律[J]. 固体力学学报, 1985, 1(1): 72 - 80.
- [5] 俞茂宏. 岩土类材料的统一强度理论及其应用[J]. 岩土工程学报, 1994, 16(2): 1 - 9.
- [6] 周小平, 张永兴, 王建华. 考虑中间主应力影响时的圆筒形孔扩张问题的弹塑性解[J]. 重庆建筑大学学报, 2002, 24(2), 35 - 38.
- [7] 周小平, 黄煜镔, 丁志诚. 考虑中间主应力影响时太沙地基极限承载力公式[J]. 岩石力学与工程学报, 2002, 21(10): 1 455 - 1 457.
- [8] 周小平, 王建华, 张永兴. 三向应力状态下条形基础极限承载力计算方法[J]. 重庆建筑大学学报, 2002, 24(3): 28 - 32.