

# 变截面梁柱二阶分析讨论\*

熊晓莉, 李开禧

(重庆大学 土木工程学院, 重庆 400045)

**摘要:**在讨论不对称结构屈曲模态正交分解技术的基础上,以变截面梁柱为例,介绍二阶分析的一种简捷方法。这种新思路、新方法拓展了 Timoshenko 放大系数的概念,从变截面梁柱的曲率着手,建立线性方程组,求解得到一组相互正交的屈曲模态,再把一阶初始变形分解为与屈曲模态同形的一组变形。然后,分别乘以自身的放大系数,再线性叠加,得到二阶总变形。虽然计算过程中所取的挠曲线为近似曲线,但实际上已满足了工程应用的精度要求。

**关键词:**屈曲模态;二阶分析;放大系数

**中图分类号:**TU311.2 **文献标识码:**A **文章编号:**1006-7329(2004)02-0036-05

## Discussion on Second - order Analysis of Variable - Section Beam - Column

XIONG Xiao - li, LI kai - xi

(College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, P.R. China)

**Abstract:** In this paper, based on the discussion of orthogonal decomposition method for the buckling mode of unsymmetrical structure, taking the variable - section beam - column as an example, a simple and direct method of the second order analysis is presented. In the new method, the conception of enlargement coefficient brought forward by Timoshenko is developed. To begin with the curvature of the variable - section beam - column, the linear equations are set up. With their solution, a group of orthogonal buckling mode can be obtained. The primary deflection can be decomposed to a group of homomorphic deflection similar to buckling mode. Then, the group of deflection is multiplied by corresponding enlargement coefficient and plus the result, finally, the second - order total deflection can be obtained.

**Keywords:** buckling mode; second analysis; enlargement coefficient

对称结构在不对称荷载作用下,对结构作二阶分析时,把屈曲模态分为对称型与反对称型两大类。相应地,把一阶初始变形也分解为与屈曲模态同形的一组变形。然后,分别乘以自身的放大系数,再线性叠加,即为计入附加变形影响后的总变形。这样的二阶分析方法是已经熟悉的。

但是,对于不对称结构,在一般荷载作用下,计入各杆轴力引起附加弯曲变形之后,屈曲模态如何正交分解,以至能同样引入放大系数的技巧,以避免解析方法在数学上的困难,至今似尚未说清楚。本文以变截面梁柱为例,初步说明解决这个问题的新思路。以后,将根据这个新概念,提出工程结构实用二阶分析的新方法。

### 1 临界力的计算

参见图 1 所示的弹性变截面梁柱,已知各分段的弯曲刚度,设变截面处左右截面的曲率分别为  $\phi_i$ 、 $\phi_i'$ ,由于两者的比值与相邻两分段的刚度的比值成反比,所以各节点处只需设一个未知曲率。再令各

\* 收稿日期:2003-12-08

作者简介:熊晓莉(1981-),女,河南省信阳人,硕士生,主要从事钢结构稳定和薄壁理论研究。

分段变形的形函数为三次抛物线,相当于曲率在各段内线性分布。这样,可直接引入两铰支端的曲率为零的边界条件。计算各截面的挠度时,按共轭梁法,等效于曲率分布图为荷载,再计算此荷载作用下各截面的弯矩,即为各截面的挠度。利用这种相应关系,我们很容易找到挠度列阵 $\{\delta_i\}$ 与曲率列阵 $\{\Phi_i\}$ 之间的关系为

$$\{\delta_i\} = [c_{ij}]\{\Phi_i\} \quad (1)$$

式中:方阵中诸元素 $c_{ij}$ 的量纲为长度的平方。

上式乘压力 $P$ 值即为对应截面的附加外弯矩,记为 $\{M^e\}$ ,内弯矩为各刚度 $EI_i$ 与曲率 $\Phi_i$ 的乘积,记为 $\{M^i\}$ ,由各节点内、外弯矩相等得

$$(P[c_{ij}] - EI_i)\{\Phi_i\} = 0 \quad (2)$$

由以上齐次方程中,系数行列式为零条件可求一组临界力,把该临界力代回原方程,又可求出各曲率在该临界力时的比值,即屈曲模态。现举一简例来说明新方法如何应用。

例 1:如图(2)中(a)图所示为变截面梁柱,其刚度沿轴线发生变化,试计算其临界力及相应的屈曲模态。

解:令各分段变形的形函数为三次抛物线,因此曲率在各段内为线性分布。

设变截面处的曲率分别为 $\Phi_1, \Phi_2$ ,绘出曲率图,如图(2)中(b)所示。将曲率图作为荷载加于构件上,如图(2)中(c),可计算出的变截面处的弯矩即为变截面处的挠度为:

$$\delta_1 = \frac{19\Phi_2 + 9\Phi_1}{768} l^2 \quad \delta_2 = \frac{9\Phi_1 + 19\Phi_2}{768} l^2$$

由内外弯矩相等的条件得

$$\begin{cases} \frac{EI}{4}\Phi_1 = P\delta_1 \\ \frac{EI}{4}\Phi_2 = P\delta_2 \end{cases} \quad (3)$$

令 $u = (kl)^2, k^2 = \frac{P}{EI}$ 。方程(3)可简化为

$$\begin{cases} (1 - 0.09896u)\Phi_1 - 0.04688u\Phi_2 = 0 \\ -0.04688u\Phi_1 + (1 - 0.09896u)\Phi_2 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

若齐次方程(4)有非零解,则行列式值必为零,即

$$\begin{vmatrix} 1 - 0.09896u & -0.04688u \\ -0.04688u & 1 - 0.09896u \end{vmatrix} = 0$$

上式可进一步简化为

$$75.9536u_2 - 1979.2u + 10000 = 0 \quad (5)$$

解得

$$u_1 = 6.8568 \quad u_2 = 19.2012$$

因此,临界力为

$$P_1 = 6.8568 \frac{EI}{l^2} \quad P_2 = 19.2012 \frac{EI}{l^2}$$

实际上, $P_1$ 的精确值为<sup>[1]</sup>

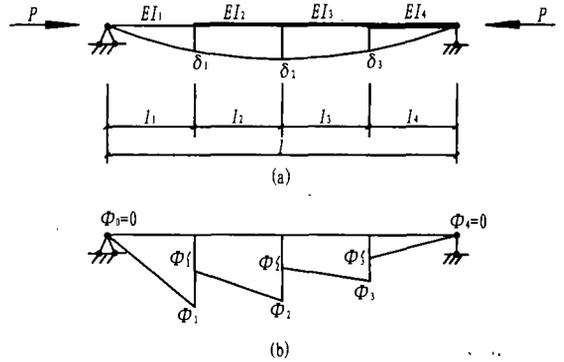


图 1 变截面梁柱的刚度、挠度和曲率

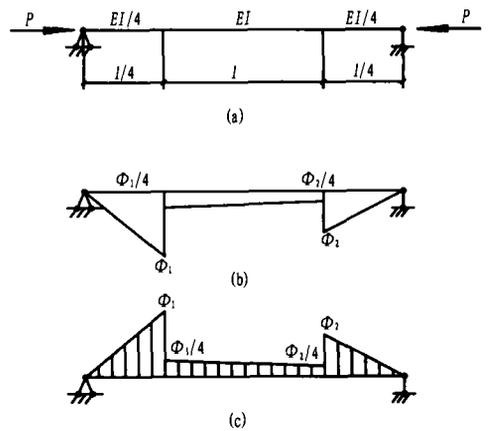


图 2 变截面梁柱的刚度、曲率及曲率荷载

$$P_1 = 6.4152 \frac{EI}{l^2}$$

误差仅为 6.88%，计算结果较为精确，是一种较为精确的近似方法。

将  $u_1, u_2$  分别代入方程(4)可得相应的两种屈曲模态：

当  $u_1 = 6.8568$  时  $\Phi_1 : \Phi_2 = 0.99998 : 1 \approx 1 : 1$

当  $u_2 = 19.2012$  时  $\Phi_1 : \Phi_2 = -1 : 1$

### 2 正交性的验证

关于屈曲模态的正交性的具体含义，可参见文献[2]。

对于例1，将两种屈曲模态(曲率图)绘制于图3中。由于(a)为对称图形，(b)为反对称图形，将任一图(曲率图)转化成内弯矩图与另一图图乘，结果为零。于是可得结论，两种屈曲模态正交。

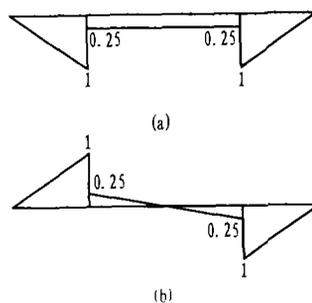


图3 屈曲模态图

### 3 一阶变形的分解

例1的情况仍然是对于对称结构而言的。对于一般荷载作用下的不对称结构，要研究它的二阶变形通常说来是件很困难的事情。但是，根据文献[2]可知，对于同一结构体系，不同的屈曲模态之间是正交的。因此，复杂的一阶变形实际上是若干个相互正交的变形的线性叠加。因此，我们可以将复杂的一阶变形分解成若干个相互正交的变形。这个思想对于我们进行复杂荷载作用下的结构二阶变形分析起着至关重要的作用。

### 4 放大系数

放大系数的概念是由 Timoshenko 提出的，其大小为

$$1/(1 - \alpha)$$

式中： $\alpha = P/P_E$ 。

经过大量计算得出，相应于不同屈曲模态的放大系数，随着它的值越来越小，它对结构体系挠度的放大效果就越来越不明显。因此，对于一般荷载作用下结构的二阶分析，我们可引入放大系数的概念。先将结构的一阶变形按照不同的屈曲模态进行分解，再取较大的几个放大系数，对它们相应的一阶变形进行放大，然后叠加，就得到了结构的二阶变形。

下面试举一例，来说明屈曲模态的正交性、一阶变形的分解以及放大系数的实际含义。

**例2:**如图(4)中(a)图所示变截面梁柱，各分段的弯曲刚度如图所示，试求其二阶变形。

**解:**设变截面处的曲率分别为  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ ，则曲率图及将曲率作为荷载加于构件上的图形如图(4)中(b)图、(c)图所示。计算方法及步骤同例1。变截面处的挠度为：

$$\delta_1 = (0.026042\Phi_1 + 0.026910\Phi_2 + 0.014323\Phi_3)l^2$$

$$\delta_2 = (0.020833\Phi_1 + 0.043403\Phi_2 + 0.028646\Phi_3)l^2$$

$$\delta_3 = (0.010417\Phi_1 + 0.025174\Phi_2 + 0.032552\Phi_3)l^2$$

由内外弯矩相等的条件可得一齐次方程组，为得到非零解可知系数行列式值为零，从而可得三个临界力，分别把各临界力代回原方程组，又可得相应的三种屈曲模态。临界力为

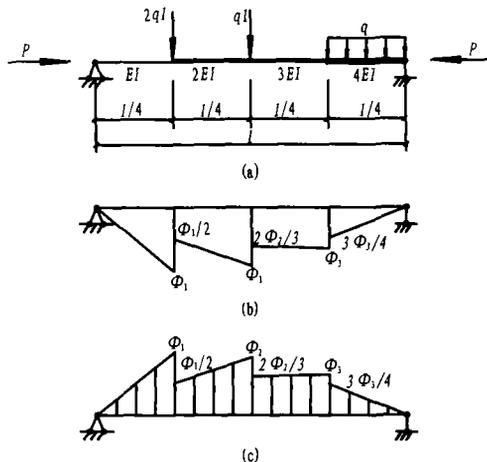


图4 变截面梁柱的刚度、曲率及曲率荷载

$$P_{E1} = 22.0491 \frac{EI}{l^2}$$

$$P_{E2} = 100.0626 \frac{EI}{l^2}$$

$$P_{E3} = 307.9647 \frac{EI}{l^2}$$

三种屈曲模态(见图 5)为

$$\Phi_{11} : \Phi_{21} : \Phi_{31} = 1 : 0.58795 : 0.243635$$

$$\Phi_{12} : \Phi_{22} : \Phi_{32} = 1 : -0.370456 : -0.424443$$

$$\Phi_{13} : \Phi_{23} : \Phi_{33} = 1 : -1.463922 : 1.158924$$

1) 验证屈曲模态的正交性

由文献[2]可知,两种屈曲模态正交是指相应于一种屈曲模态弯矩与相应于另一种屈曲模态曲率乘积的积分为零,即二者图乘的结果为零。因此,本例中的变截面梁柱,若三种屈曲模态正交,则必有图(5)中的(a')图与(b)图、(c)图的图乘结果为零。经计算可知,(a')图与(b)图的图乘结果为  $0.000002333EI$ ,(a')图与(c)图的图乘结果为  $0.000019836EI$ 。此结果虽不为零,但在精度允许范围内已近乎等于零。

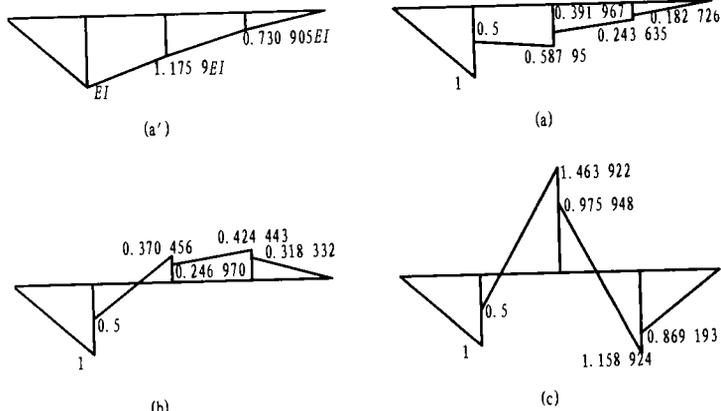


图 5 屈曲模态图

2) 一阶变形的分解

首先可计算出外荷载作用下结构的一阶变形。如图(6)中(a)图实线所示(图中的挠度值均应乘以  $ql^4/EI$ )。将屈曲模态代入挠度表达式可得相应于不同屈曲模态时的梁柱的变形,用数学方法[3]可建立三种正交的屈曲模态相应的变形与总变形之间的关系的方程组,求解此方程组可得各屈曲模态所占的比例,从而将一阶变形分解为如图(6)中(b)、(c)、(d)图所示的三种变形。

3) 二阶变形

一阶变形分解后得到的三组变形相应于相互正交的三种屈曲模态。这三种屈曲模态临界力不同,因此在压力  $P$  作用下,相应的二阶放大系数也不同。假设压力,  $P = 0.5P_E$  经计算可得相应于不同临界力的放大系数分别为 2、1.123818、1.077188。随后,可将分解得到的三组一阶变形分别乘以各自的放大系数进行放大,然后叠加,即可得到该梁柱的二阶变形了。结果如图(6)所示,其中粗实线为梁柱的一阶变形,粗虚线为梁柱的二阶变形。从结果可以看出,最小的临界力对应的放大系数对最终放大

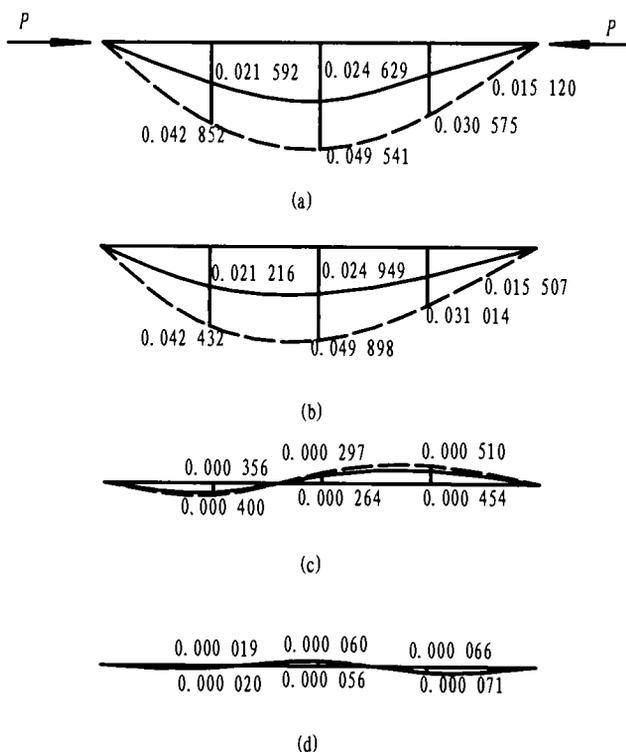


图 6 一阶变形的分解及放大后的二阶变形

最小的临界力对应的放大系数对最终放大

后的二阶变形的影响最大,其余的放大系数的放大作用与之相比可忽略不计。

关于这种用节点的挠曲线曲率作为广义位移,用三次曲线代替实际的挠曲线,建立线性方程组求解临界力的方法是否正确,我们可采用 CDC 法对例 2 进行验证(划分成不同的段数,如 4 段、8 段、12 段等)。经过计算可知,本文所提出的方法计算结果与 CDC 法计算结果的差别不大。而且,对于求解第一和第二临界力来说,段数划分太多也没有太大的意义。因为,随着单元划分得越来越细,临界力会逐渐收敛到一个定值。但是对于第一和第二临界力来说,当所分段数无需太多时,临界力基本上就已收敛。

## 5 结语

随着实际工程中钢结构这种结构形式应用的逐渐推广,在进行结构设计时对结构进行二阶分析的要求越来越普遍。因而,在二阶分析中结构在荷载作用下的变形就显得尤为重要。本文以变截面梁柱为例,用节点的挠曲线曲率作为广义位移,提出了一种压杆临界平衡的有限元方法。这样,就相当于用低阶线性方程组代替高阶微分方程建立临界平衡方程(组)一样,使求解临界力问题的有限元格式简化。随后,本文拓展了 Timoshenko 放大系数的概念,介绍了不对称结构屈曲模态的正交分解技术和建立放大系数的方法,使不对称结构在一般荷载作用下二阶变形的计算过程得到了简化。此外,该方法对简化复杂结构在多维变形时的二阶分析过程有着重要意义。虽然计算过程中所取的挠曲线为近似曲线,但实际上已满足了工程应用的精度要求。因此,这种简捷方法在实际工程应用中同样有着重要意义。

## 参考文献:

- [1] A·查杰斯[美]. 结构稳定性理论原理[M]. 兰州:甘肃人民出版社,1982.
- [2] W. F. Chen. 梁柱分析与设计[M]. 北京:人民交通出版社,1997.
- [3] 尹泽明,丁春利. 精通 MATLAB 6[M]. 北京:清华大学出版社,2002.
- [4] 王永华,李开禧. 用 CDC 法计算变轴力杆件的临界力[J]. 重庆建筑大学学报,2002,(6):44-46.
- [5] 李开禧,须宛明. 钢梁-柱中两杆端变形增量的相关方程[J]. 重庆交通学院学报,1989,8(4):26-36.
- [6] 李开禧,须宛明. 钢梁-柱中两杆端变形增量的相关方程(续)[J]. 重庆交通学院学报,1990,9(3):30-40.