

不等端弯矩作用下薄壁梁临界弯矩的计算分析

余 洋, 李开禧

(重庆大学 土木工程学院, 重庆 400045)

摘要:薄壁梁的弯扭屈曲分析是一个较为复杂的问题,在荷载作用下沿梁的弯矩为非均匀分布时,其屈曲方程的求解较为困难。根据梁柱杆端变形增量相关方程和改进后的 CDC 法,将薄壁梁的弯扭模型等效为拉弯模型,顺利地算出不等端弯矩作用下薄壁梁的临界弯矩,并提出建议公式。经计算与数值解比较,结果令人满意。

关键词:薄壁梁; CDC 法; 临界弯矩

中图分类号: TU391 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006 - 7329(2004)06 - 0040 - 04

Calculation and Analysis on Critical Moment of Thin - walled Beams under Unequal End Moment

YU Yang, LI Kai - xi

(College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, P. R. China)

Abstract: In this paper, comparing the bending - twisting model with the tension - bending one, the critical moment of the thin - walled beams under unequal end moment is derived easily by the improved CDC (column deflection curve) method based on the increment interaction equations of beam - columns. A simplified formula is presented and the calculated results show a good agreement with the numerical ones.

Keywords: thin - walled beam; CDC method; critical moment

薄壁梁临界弯矩的计算资料至今仍然较少,而且多数数据不够准确,缺乏相应屈曲模态的表述,使钢梁的设计概念停留在强度、稳定分开校核而不能达到按边缘屈服准则作二阶分析的水平。究其原因,除了约束扭转理论不够完善,以致对梁的失稳机理不能清晰说明以外,梁的上翼缘相当于平放变轴压力柱,也缺少简捷方法计算其复杂受力状态下的临界力。而文献[1]在改进的 CDC 法基础上导出了杆端变形增量的相关方程,从而使指定长度的杆件两端变形增量的调整有了定量规则,把 CDC 法的应用范围拓宽到任意杆端约束条件,无疑是重大进步。而如果将薄壁梁的弯扭模型通过拉弯比拟等效为一个平面内的拉弯模型,则可将 CDC 法直接应用到这根拉弯构件,从而计算其临界弯矩及屈曲模态。下面,以不等端弯矩作用下的 I 字形截面梁为例,说明上述方法在计算其临界弯矩中的应用。

1 临界弯矩的计算

如图 1 所示的薄壁梁,跨度为 l ,已知其侧向弯曲刚度为 EI_y 、翘曲刚度为 EI_ω 、自由扭转刚度为 GI_k ,梁两端满足夹支条件,即边界条件为: $\beta_a = \beta_b = 0, \beta'_a = \beta'_b = 0$ 。两端分别受 $M, \kappa M$ 的端弯矩作用(其中 κ 在 $1 \sim -1$ 之间变化),可建立关于扭角 β 的微分方程如下^[2]:

$$EI_\omega \beta^{(4)} - GI_k \beta'' - \frac{M^2}{EI_y} - \frac{M^2}{EI_y} \left[1 - \frac{(1 - \kappa)z}{l} \right]^2 \beta = 0 \quad (1)$$

* 收稿日期:2004 - 07 - 29

作者简介:余 洋(1979 -),男,重庆人,硕士,主要从事钢结构稳定性研究。

而拉弯构件的平衡方程为:

$$EI_y^{[4]} - Py'' - q_z = 0 \tag{2}$$

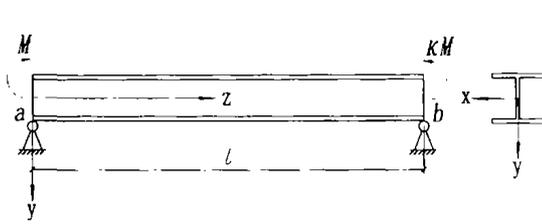


图1 原结构模型

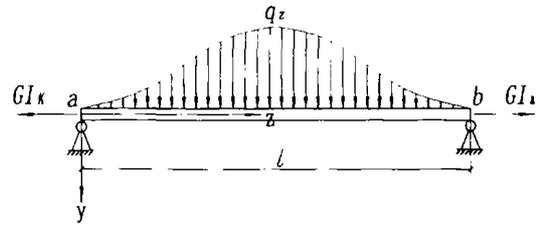


图2 拉弯模型

通过(1)、(2)两式的比较可发现二者在数学构造上的相似性,这样通过拉弯比拟可将图1所示的薄壁梁等效为一根如图2所示的抗弯刚度为 EI_ω , 两端受拉力 GI_k , 沿梁受分布荷载 $q_z = \frac{M^2}{EI_y} \left[1 - \frac{(1-\kappa)z}{l} \right]^2 y$ (y 为挠度) 的两端简支的拉弯构件, 而等效模型与原模型相对应的边界条件为: 端挠度 $\delta_a = \delta_b = 0$, 端曲率 $\Phi_a = \Phi_b = 0$ 。只要求出 M^2/EI_y 的临界值, 也就求出临界弯矩 M_{cr} 了。

将 CDC 法应用到这根拉弯构件便可求解。将杆件划分为 n 段(可由计算精度要求划分段数), 每段段长 $\Delta = l/n$, 第 i 段的起始点编号为 $i, i+1$, 则第 i 点所受的横向荷载为:

$$q_i = \frac{M^2}{EI_y} \left[1 - \frac{(1-\kappa)(i-1)\Delta}{l} \right]^2 \delta_i$$

用 $\Phi_i, \delta_i, \theta_i, Q_i$ 分别表示第 i 点的曲率、挠度、转角及剪力, 并将微段视为三次曲线, 由图3所示的微段平衡可求得:

$$\begin{cases} \Phi_{i+1} = \frac{Q_i \Delta + \Phi_i - \frac{GI_k}{EI_\omega} (\theta_i \Delta - \frac{\Phi_i \Delta^2}{3}) - \frac{m_i \Delta^2}{3} \delta_i - \frac{m_{i+1} \Delta^2}{6} (\delta_i + \theta_i \Delta + \frac{\Phi_i \Delta^2}{3})}{1 - \frac{GI_k \Delta^2}{6EI_\omega} - \frac{m_{i+1} \Delta}{36}} \\ \frac{Q_{i+1}}{EI_\omega} = \frac{Q_i}{EI_\omega} - \frac{\Delta}{2} \left\{ m_i \delta_i + m_{i+1} \left[\delta_i + \theta_i \Delta - \frac{\Phi_i \Delta^2}{2} - \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{6} \Delta^2 \right] \right\} \\ \delta_{i+1} = \delta_i + \theta_i \Delta - \frac{(\Phi_i + \Phi_{i+1}/2) \Delta^2}{3} \\ \theta_{i+1} = \theta_i - \frac{(\Phi_i + \Phi_{i+1}) \Delta}{2} \end{cases}$$

式中: $m_i = \frac{M^2}{EI_y EI_\omega} \left[1 - \frac{(1-\kappa)(i-1)\Delta}{l} \right]^2$ 。

根据以上公式便可由第 i 点的曲率、挠度、转角及剪力求出第 $i+1$ 点的曲率、挠度, 而由始端 a 的边界条件 $\Phi_a = 0, \delta_a = 0$, 并由相关方程找到当满足终端 b 边界条件 $\Phi_b = 0, \delta_b = 0$ 时的 θ_a, Q_a ^[1], 这样便可定出 $M - \theta_a$ 关系曲线上的一点。再对 θ_a 晋级找到下一点, 当 $M - \theta_a$ 关系曲线接近为一条平线时(即 θ_a 的晋级已对 M 无影响时)输出的值即为临界弯矩 M_{cr} 。另外, 在求临界荷载因子 M^2/EI_y 的同时伴随求出的挠度曲线也就是扭角 β 曲线, 由方程(3)通过数值计算可求得侧向挠度 u 曲线, 则转动中心半径也可由 $r = u/\beta$ 求出。梁的屈曲模态便是绕转动中心轴线转动。本文重点是介绍临界弯矩的计算, 有关薄壁梁屈曲模态的分析将另撰文介绍。

$$EI_y u'' + M \left[1 - \frac{(1-\kappa)z}{l} \right] \beta = 0 \tag{3}$$

当 $\kappa = 1$ 时, 也即是两端受等值反向弯矩时的临界弯矩 M_{cr1} 已由解析法求得^[3]:

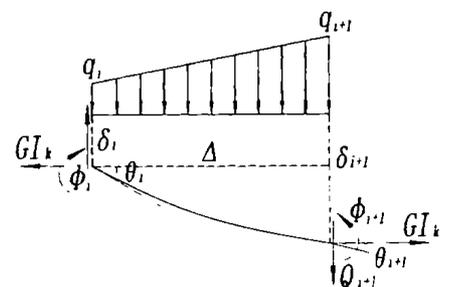


图3 微段受力示意图

$$M_{cr1} = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{EI_y EI_\omega} \sqrt{1 + \frac{l^2}{\pi^2} \frac{GI_k}{EI_\omega}} \quad (4)$$

而 κ 取 $1 \sim -1$ 之间的某值时的临界弯矩 $M_{cr\kappa}$ 可借用 M_{cr1} 的表达式即:

$$M_{cr\kappa} = \gamma \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{EI_y EI_\omega} \sqrt{1 + \frac{l^2}{\pi^2} \frac{GI_k}{EI_\omega}} \quad (5)$$

令梁参数 $\frac{l^2 GI_k}{\pi^2 EI_\omega} = \eta$, 以下列出当 η 为不同值, κ 为 $1 \sim -1$ 时用 CDC 法解出的 γ 值:

表1 $\eta=0.1$ 时用 CDC 法解出的 γ 值

κ	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0
γ	1.000	1.052	1.110	1.173	1.243	1.321	1.407	1.502	1.608	1.725	1.853
$1/\gamma$	1.000	0.951	0.901	0.853	0.805	0.757	0.711	0.666	0.622	0.580	0.540
κ	-0.1	-0.2	-0.3	-0.4	0.5	-0.6	-0.7	-0.8	-0.9	-1	
γ	1.993	2.144	2.301	2.459	2.613	2.746	2.843	2.882	2.847	2.741	
$1/\gamma$	0.502	0.466	0.435	0.407	0.383	0.364	0.352	0.347	0.351	0.365	

表2 $\eta=0.5$ 时用 CDC 法解出的 γ 值

κ	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0
γ	1.000	1.052	1.110	1.173	1.243	1.320	1.406	1.501	1.605	1.721	1.847
$1/\gamma$	1.000	0.951	0.901	0.853	0.805	0.758	0.711	0.666	0.623	0.581	0.541
κ	-0.1	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5	-0.6	-0.7	-0.8	-0.9	-1	
γ	1.985	2.132	2.286	2.442	2.592	2.724	2.822	2.866	2.837	2.733	
$1/\gamma$	0.504	0.469	0.437	0.410	0.386	0.367	0.354	0.349	0.352	0.366	

表3 $\eta=1$ 时用 CDC 法解出的 γ 值

κ	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0
γ	1.000	1.052	1.110	1.173	1.243	1.320	1.404	1.498	1.602	1.716	1.840
$1/\gamma$	1.000	0.951	0.901	0.853	0.805	0.758	0.712	0.668	0.624	0.583	0.543
κ	-0.1	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5	-0.6	-0.7	-0.8	-0.9	-1	
γ	1.974	2.118	2.268	2.419	2.566	2.698	2.799	2.848	2.825	2.724	
$1/\gamma$	0.507	0.472	0.441	0.413	0.390	0.371	0.357	0.351	0.354	0.367	

为了与已有的资料相比较,表中列出了 $1/\gamma$ 的值。图4为 η 取 0.1 和 1 时的 $1/\gamma - \kappa$ 关系曲线,与文献[2]所得的曲线相同。图中虚线为文献[2]按(6)式拟合的曲线,可看出拟合曲线只是取的 $1/\gamma$ 的上限值,与真实值相差较大,并且没有反映梁参数 η 对 γ 的影响。

$$\frac{1}{\gamma} = 0.6 + 0.4\kappa \geq 0.4 \quad (6)$$

3 临界弯矩曲线的整理

当 $\kappa = 1$ 时,扭角 β 曲线为沿中点对称的单半波正弦曲线,若借用压弯杆件放大系数 $\alpha = \frac{1}{1 - P/P_E}$ 的概念,则拉弯杆件的“衰减系数”为 $\frac{1}{1 + P/P_E}$,由 $\eta = \frac{EI_k}{\pi^2 EI_\omega / l^2}$ 可知此时“拉力” GI_k 对拉杆的“衰减系数”为 $\frac{1}{1 + \eta}$;

当 $\kappa \neq 1$ 时,如当 $\kappa = -1$ 时, β 曲线是一条不规则的曲线。考虑此时 GI_k 对拉杆的作用,应对 η 乘上一个调整系数 λ ,通过曲线拟合发现取 $\lambda = \left(\frac{1 - \kappa}{2}\right)^2$ 拟合较好,则 $\kappa =$

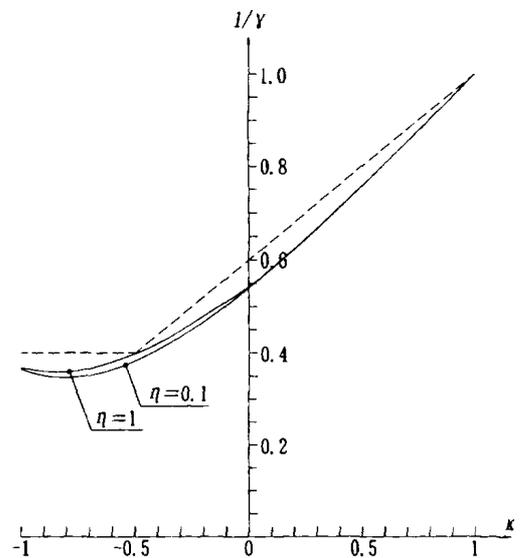


图4 $1/\gamma - \kappa$

-1时的“衰减系数”为 $\frac{1}{1+\lambda\eta}$ 。

κ 取 1 ~ -1 之间的任意值时(如图 5a 所示),其弯矩图可视为图 b、c 所示一个正对称和一个反对称弯矩图的叠加。

其中 $\bar{M} = \frac{1}{2}(1+\kappa)M$, $\bar{M} = \frac{1}{2}(1-\kappa)M$ 。分别对图 b、c 乘以 $\frac{1}{1+\eta}$ 和 $\frac{1}{1+\lambda\eta}$ 的衰减系数可建立计算临界弯矩的相关公式:

$$\left(\frac{\bar{M}}{\pi^2 \sqrt{EI_\omega EI_y} / l^2}\right)^2 + \left(\frac{\bar{M}}{2.743 \pi^2 \sqrt{EI_\omega EI_y} / l^2}\right)^2 = 1 \quad (7)$$

将 κ 、 η 、 λ 值代入(5)式即可解得任意 κ 值下的临界弯矩,若仍用(4)式的方式来表示临界弯矩,可得:

$$M_{cr\kappa} = \gamma \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{EI_y EI_\omega} \sqrt{1 + \frac{l^2}{\pi^2} \frac{GI_k}{EI_\omega}} \quad (8)$$

为验证(7)式的正确性,表 4 以 $\eta = 0.5$ 为例对 γ 、 $\bar{\gamma}$ 进行了对比。

表 4 $\eta = 0.5$ 时, γ 、 $\bar{\gamma}$ 的对比

κ	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0
γ	1.000	1.052	1.110	1.173	1.243	1.320	1.406	1.501	1.605	1.721	1.847
$\bar{\gamma}$	1.000	1.052	1.110	1.173	1.242	1.319	1.404	1.498	1.602	1.718	1.843
κ	-0.1	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5	-0.6	-0.7	-0.8	-0.9	-1	
γ	1.985	2.132	2.286	2.442	2.592	2.724	2.822	2.866	2.837	2.733	
$\bar{\gamma}$	1.981	2.128	2.282	2.436	2.582	2.705	2.792	2.829	2.812	2.743	

图 6(a)、6(b)、6(c) 分别列出了 η 取 0.3、0.5、1 时的 $\gamma - \kappa$ 曲线及 $\bar{\gamma} - \kappa$ 曲线。由图中可看出,由(7)式拟合出的 $\bar{\gamma}$ 值与数值解值 γ 吻合得较好。在实际工程中 η 一般为 0 ~ 1, 因此图中列出的曲线也具有一定代表性。

4 小结

以上介绍了承受不等端弯矩作用下梁的临界弯矩的计算方法并用相关公式拟合了 γ 曲线。所拟合出的曲线不仅与数值方法计算出的值吻合较好,最

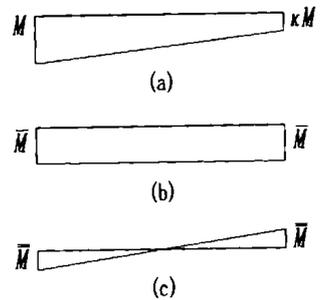
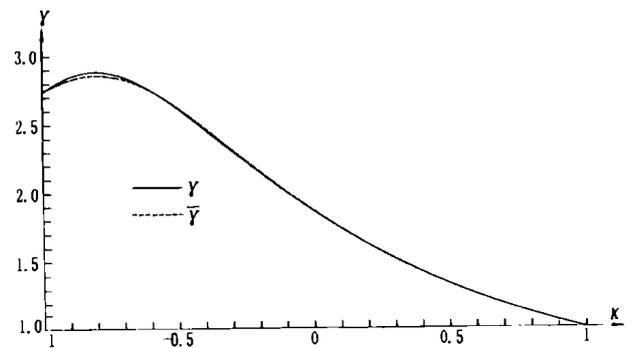
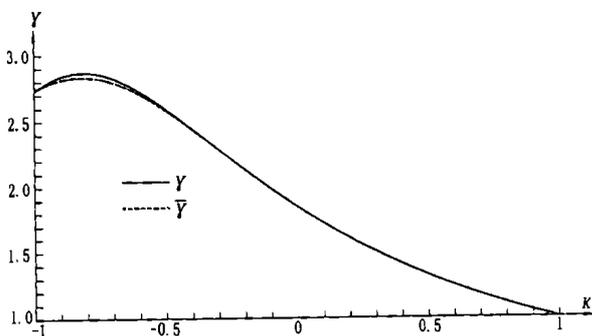


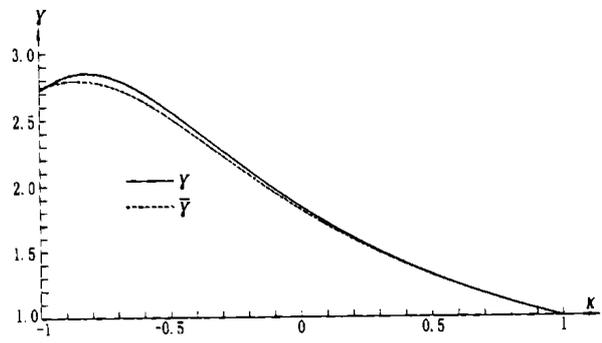
图 5 弯矩图的分解



(a) $\eta = 0.3$ 时



(b) $\eta = 0.5$ 时



(c) $\eta = 1$ 时

图 6 $\gamma(\kappa)$ 曲线图

4 结论

通过以上计算分析,对竖向荷载作用下单跨或跨度相差不大的两跨预应力框架可得出以下结论:

1) 单跨和两跨预应力框架中,轴压比变化引起的二阶效应与普通混凝土框架类似,对结构荷载内力的影响虽存在,但即使在影响最大的柱底截面变化幅度也很小,故而可以忽略不计。

2) 对于同榀框架中各框架柱轴向变形不等的框架,轴压比的变化将影响结构内力,且这种影响的大小取决于柱顶轴力与跨间荷载的比例。柱顶轴力相对于跨间荷载越大,其影响亦越大,并且在某种情况下,边柱柱底弯矩将超过边柱顶弯矩,最终可能导致结构边柱底出现塑性铰。

3) 预应力框架中柱轴压比的提高将有利于边柱顶处裂缝控制。同时由于框架梁的轴向压缩,结构内的二阶效应影响将进一步增大,特别是在多跨预应力框架的边跨表现得更为明显,不可忽略其影响。

参考文献:

- [1] 孙新敏. 跨间竖向荷载作用下预应力框架内力重分布的试验研究[D]. 重庆:重庆大学,2002.
- [2] 屈凯锋. 竖向及水平荷载作用下后张预应力框架的试验研究[D]. 重庆:重庆大学,2002.
- [3] 潘峰. 轴压比对两跨预应力框架影响的试验研究[D]. 重庆:重庆大学,2004.
- [4] 肖建庄,朱伯龙. 钢筋混凝土框架柱轴压比限值试验研究[J]. 建筑结构学报,1998,19(5):2-7.
- [5] 肖建庄,张建荣,秦灿灿. 混凝土框架柱轴压比限值分析[J]. 建筑结构,2000,30(2):33-35.
- [6] 白绍良,张友为,黄宗明. 不同轴压比下钢筋混凝土柱的低周疲劳性能[J]. 重庆建筑大学学报,1997,19(3):1-6.
- [7] 中华人民共和国行业标准. 预应力混凝土结构抗震设计规程(2001征求意见稿)[Z]. 北京,2001.
- [8] 简斌,吴春华. 多层预应力混凝土框架侧向约束对梁轴力的影响[J]. 建筑结构,2004,34(4):25-27.

(上接第43页)

重要还在于使得 $\frac{l^2 G I_k}{\pi^2 E I_\omega}$ 具有了明确的力学含义,即组成衰减系数。

同样当梁承受其他荷载作用形式时,或是其他边界条件如悬臂梁,外伸梁等均可按上述原理方便的算出临界弯矩,将另撰文详述。

参考文献:

- [1] 李开禧. 钢梁柱中两杆端变形增量的相关方程[J]. 重庆交通学院学报,1989,8(4):26-36.
- [2] W.F.chen. 梁柱分析与设计[M]. 北京:人民交通出版社,1997.
- [3] 吕烈武. 钢结构构件稳定理论[M]. 北京:中国建筑工业出版社,1983.
- [4] 陈永庆,李开禧. 薄壁构件一阶分析的新方法[J]. 重庆建筑大学学报,2000,22(5):102-106.
- [5] 李开禧,赵广坡. 薄壁梁的单元刚度矩阵及其应用[J]. 重庆建筑大学学报,2004,26(5):35-38.
- [6] 陈绍蕃. 钢结构稳定设计指南[M]. 北京:中国建筑工业出版社,2004.