

# 饱和软土地基弹塑性固结沉降研究\*

刘占芳, 杨全虎, 姜乃斌

(重庆大学 资环学院工程力学系, 重庆 400044)

**摘要:**软粘土孔隙比大、渗透率低、压缩性和含水量高,这种特性决定了它的变形沉降受到包括应力历史、应力路径、固结压力、软土特性等诸多因素的影响。本文引入基于混合物理论的两相多孔介质理论描述饱和软土的弹塑性固结沉降过程。该理论具有理论推理严密和数学论证严谨的特点,能够充分考虑固结过程中的水土耦合作用。

**关键词:**饱和; 多孔介质; 软土; 弹塑性

**中图分类号:**TU43 **文献标识码:**A **文章编号:**1006-7329(2005)02-0051-05

## On Elasto - Plastic Consolidation Settlement of Saturated Soft Clay

LIU Zhan - fang, YANG Quan - hu, JIANG Nai - bin

(Department of Engineering Mechanics, Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China)

**Abstract:** The specific properties of soft clay are characterized by higher void ratio, lower permeability and higher compressibility, the consolidation settlement of soft clay is affected by the imposed stress history, the stress paths, the consolidation pressure and the soil properties. In this paper, the porous media theory based on the mixture theory was applied in the study on the consolidation settlement of soft clay, which was more rigorous than the conventional consolidation settlement theory and the coupling between soil and water can be taken into account in the analysis.

**Keywords:** saturated; porous media; soft soil; elasto - plasticity

我国软土分布十分广泛,滨海平原、河口三角洲、湖盆地周围、山间谷地等均有分布。由于软土的成因类型复杂,分布范围广泛,在工程实践中经常会遇到软土地基及由此引起的工程问题。

各国学者针对软土固结沉降问题进行了不懈的研究,获得大量的研究成果。其中得到广泛认可和应用的 Terzaghi 固结理论和 Biot 固结理论。一维 Terzaghi 固结理论由 Terzaghi 提出,适用于正常固结土和弱超固结土。Terzaghi 理论在工程应用中获得巨大的成功,主要是因为其公式简单,需要的参数可通过常规试验得出,但因为它假设土体是线弹性材料,只在竖直方向发生渗流,土体在垂直方向的应变是相同的等原因,在将它应用到压缩性较大的软土时往往出现较大的误差。魏汝龙指出:“软粘土地基上的现场观察资料表明,实际的沉降速率通常比用 Terzaghi 一维固结理论计算的快得多”<sup>[1]</sup>。针对这种现象,人们对 Terzaghi 理论作了诸多的修正。主要是引入非线性应力应变关系。其中, Davis 和 Raymond<sup>[2]</sup>等采用较为实际的非线性应力应变关系,即半对数型应力应变关系,把孔隙比表示为有效应力对数的函数,得到比较广泛的认可。其后, Terzaghi 和 Rendulic 在总应力不变的条件下,考虑三维的水流,但只计入一维的竖向应变,提出了三维固结理论。总应力在固结过程中不变的假设使多维问题不能满足弹性力学兼容方程,所以 Terzaghi - Rendulic 固结理论在多维问题中是不严格的。真实意义上的三维固结理论是由 Biot 首先提出的。Biot 在 1941 年和 1956 年分别提出了三维静力固结理论和三维动力

\* 收稿日期:2004-11-20

基金项目:国家自然科学基金项目(10172098)

作者简介:刘占芳(1963-),男,黑龙江哈尔滨市人,教授,博士生导师,主要从事多孔介质力学研究。

固结理论<sup>[3,4]</sup>。Biot 固结理论从较严格的固结机理出发,考虑了土骨架和孔隙水的相互作用效应。在考虑了土的非线性性质后,人们对 Biot 理论进行了广泛的扩展。其中,Prevost<sup>[5]</sup>把 Biot 理论推广到非线性和粘弹性的情况,Savage 和 Braddoc 将 Biot 理论应用于横观各向同性的孔隙介质中,Zienkiewicz 和 Shio-mi 考虑了几何非线性和材料非线性,提出了广义的 Biot 公式。但是 Biot 理论所描述的力学行为是建立在直观基础上的,因此本质上讲,这是一个工程描述方法。更加严密精确的宏观数学理论是基于连续介质混合物公理和体积分数概念的多孔介质理论<sup>[6]</sup>。

本文以连续介质力学框架内的多孔介质理论为基础,引入饱和软土的弹塑性变形特性,用平面有限元程序研究了饱和软土的固结沉降过程。

## 1 饱和软土两相多孔介质模型

饱和软土由土颗粒粘结组成的土骨架和充斥于土骨架孔隙间的水组成,是一种典型的两相多孔介质。本文研究中假设土体为各向同性连续介质,土颗粒与水微观不可压缩,只计入主固结过程和弱结合水及自由水的影响,土体的变形为小变形,忽略体力和孔隙液体的黏性,流动服从达西渗透定律,根据混合物理论可推得饱和软土两相多孔介质模型的控制场方程:

$$\nabla \cdot (\varphi^s \dot{\mathbf{u}}^s + \varphi^f \dot{\mathbf{u}}^f) = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{T}_e^s - \varphi^s \nabla p - \rho^s \ddot{\mathbf{u}}^s + \alpha_v (\dot{\mathbf{u}}^f - \dot{\mathbf{u}}^s) = 0 \quad (2)$$

$$- \varphi^f \nabla p - \rho^f \ddot{\mathbf{u}}^f - \alpha_v (\dot{\mathbf{u}}^f - \dot{\mathbf{u}}^s) = 0 \quad (3)$$

式中用角标  $\alpha$  表示土骨架( $\alpha = s$ )和孔隙液体( $\alpha = f$ ), $\nabla$  为 Nabla 算符, $\mathbf{u}_\alpha$  为  $\alpha$  组分的位移; $\rho^\alpha$  为宏观密度( $\rho^\alpha = \varphi^\alpha \rho^{\alpha R}$ , $\rho^{\alpha R}$  是相应组分的真实密度); $\varphi^\alpha$  为体积分数(满足饱和约束条件  $\varphi^s + \varphi^f = 1$ ), $p$  为孔隙压力, $\mathbf{T}_e^s$  为土骨架有效应力, $\alpha_v$  为扩散阻力系数,对于各向同性连续介质:

$$\alpha_v = (\varphi^f)^2 \rho^f g / k^f \quad (4)$$

式中的  $k^f$  是达西渗透系数, $g$  为重力加速度。

将土骨架有效应力用列阵  $\sigma_e^s$  表示,则弹塑性饱和软土进入塑性后的应力应变关系用增量形式表示:

$$d\sigma_e^s = \mathbf{D}_{ep}^s d\epsilon^s \quad (5)$$

根据关联流动法则,利用工作强化假设,可以得到弹塑性应力应变关系矩阵:

$$\mathbf{D}_{ep}^s = \mathbf{D}^s - \frac{d_D d_D^T}{H' + d_D^T \alpha}; \quad d_D = \mathbf{D}^s \alpha \quad (6)$$

其中, $\mathbf{D}^s$  为土骨架的弹性常数矩阵, $H'$  为强化参数, $\alpha$  称为流动矢量,定义:

$$\alpha^T = \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \left[ \frac{\partial F}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_z}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{zx}}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \right] \quad (7)$$

式中: $F$  为材料屈服准则。基于软土的弹塑性屈服准则至今已提出多种,本文选用 Druker - Prager 屈服准则:

$$F = \xi I_1 + \sqrt{J'_2} - H = 0 \quad (8)$$

$$\xi = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{9 + 3 \sin^2 \varphi}}, \quad H = \frac{\sqrt{3} C \cos \varphi}{\sqrt{3 + \sin^2 \varphi}} \quad (9)$$

式中: $C$  为粘聚力, $\varphi$  为内摩擦角, $I_1$  为有效应力张量第一不变量: $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ , $J'_2$  为有效应力偏量第二不变量: $J'_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$ 。

## 2 有限元公式

采用 Galerkin 加权残值法推导有限元平衡方程。Galerkin 加权残值法的基本思路是把近似解的试

探函数列作为权函数,在很多情况下,这种处理方法可使得求解方程的系数矩阵是对称的。

设  $\Gamma$  为所研究问题得控制域边界,引入边界条件和初始条件:在位移边界上  $t\mathbf{T}^s = \hat{\mathbf{t}}^s, \mathbf{u}^s = \hat{\mathbf{u}}^s, \dot{\mathbf{u}}^s = \hat{\dot{\mathbf{u}}}^s$ ;在力边界上  $\mathbf{t}^f = \hat{\mathbf{t}}^f, \mathbf{t}^f = \varphi^f \hat{\mathbf{p}}\mathbf{n}$ ;初始时刻  $t = 0$  时,  $\mathbf{u}^s(0) = \mathbf{u}_0^s, \mathbf{u}^f(0) = \mathbf{u}_0^f, \dot{\mathbf{u}}^s(0) = \dot{\mathbf{u}}_0^s, \dot{\mathbf{u}}^f(0) = \dot{\mathbf{u}}_0^f, \ddot{\mathbf{u}}^s(0) = \ddot{\mathbf{u}}_0^s, \ddot{\mathbf{u}}^f(0) = \ddot{\mathbf{u}}_0^f$ 。方程(2)、(3)及自然边界条件的加权残值表达式为:

$$\int_v \mathbf{W}^s \cdot [\nabla \cdot \mathbf{T}_e^s - \varphi^s \nabla p + \alpha_v (\dot{\mathbf{u}}^f - \dot{\mathbf{u}}^s) - \rho^s \ddot{\mathbf{u}}^s] dv + \int_{\Gamma^s} \bar{\mathbf{W}}^s \cdot (\hat{\mathbf{t}}^s - \mathbf{t}^s) d\Gamma + \int_v \mathbf{W}^f \cdot [-\varphi^f \nabla p - \alpha_v (\dot{\mathbf{u}}^f - \dot{\mathbf{u}}^s) - \rho^f \ddot{\mathbf{u}}^f] dv + \int_{\Gamma^f} \bar{\mathbf{W}}^f \cdot \varphi^f (\hat{\mathbf{p}} - p) \mathbf{n} d\Gamma = 0 \quad (10)$$

式中:  $\mathbf{W}^s, \mathbf{W}^f, \bar{\mathbf{W}}^s, \bar{\mathbf{W}}^f$  为权函数。

孔隙压力可通过罚参数法消去,具体方法为在方程(1)中引入一大数  $\beta$ ,并将方程(1)写成  $\frac{\rho}{\beta} \nabla \cdot (\varphi^s \dot{\mathbf{u}}^s + \varphi^f \dot{\mathbf{u}}^f) = 0$ ,即  $p = -\beta \nabla \cdot (\varphi^s \dot{\mathbf{u}}^s + \varphi^f \dot{\mathbf{u}}^f)$ ,代入方程(10)中可消去压力  $p$  项。

对土骨架及孔隙水的位移、速度和加速度进行空间离散,并利用 Galerkin 加权残值法,由方程(10)可以得到有限元单元平衡方程:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_n^s & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_n^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_n^s \\ \dot{\mathbf{u}}_n^f \end{Bmatrix} + \left[ \beta \begin{bmatrix} (\varphi^s)^2 \mathbf{C}_n & \varphi^s \varphi^f \mathbf{C}_n \\ \varphi^s \varphi^f \mathbf{C}_n & (\varphi^f)^2 \mathbf{C}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_n & -\mathbf{A}_n \\ -\mathbf{A}_n & \mathbf{A}_n \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_n^s \\ \mathbf{u}_n^f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_n^s \\ \mathbf{u}_n^f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_n^s \\ \mathbf{R}_n^f \end{Bmatrix} \quad (11)$$

式中下标为  $n$  的量代表单元  $n$  的节点上的相应物理量。上式中:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_n^s &= \int_{v_n} \rho^s \mathbf{N}^T \mathbf{N} dv & \mathbf{M}_n^f &= \int_{v_n} \rho^f \mathbf{N}^T \mathbf{N} dv & \mathbf{A}_n &= \int_{v_n} \alpha_v \mathbf{N}^T \mathbf{N} dv & \mathbf{C}_n &= \int_{v_n} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_1 \mathbf{B} dv \\ \mathbf{R}_n^s &= \int_{\Gamma_n^s} \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{t}}^s d\Gamma & \mathbf{R}_n^f &= \int_{\Gamma_n^f} \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{t}}^f d\Gamma & \mathbf{K}_n &= \int_{v_n} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_{ep} \mathbf{B} dv \end{aligned} \quad (12)$$

其中,  $\mathbf{N}$  为插值函数矩阵,  $\mathbf{B}$  为应变位移矩阵,矩阵  $\mathbf{D}_1$  为

$$[\mathbf{D}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

方程(11)对整个区域所有单元求和,就可以得到系统方程:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{J}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{R} \quad (14)$$

式中  $\mathbf{M}, \mathbf{J}, \mathbf{K}, \mathbf{f}$  分别为相应单元矩阵和向量的组集。

求解系统程(14),就可以得到固体骨架和孔隙流体的位移场和速度场等,孔隙压力即为:

$$p = -\beta \nabla \cdot (\varphi^s \dot{\mathbf{u}}^s + \varphi^f \dot{\mathbf{u}}^f) = -\beta \mathbf{L}\mathbf{B}(\varphi^s \dot{\mathbf{u}}^s + \varphi^f \dot{\mathbf{u}}^f) \quad (15)$$

式中:  $\mathbf{L} = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ 。

采用 Newmark 法对系统方程(14)进行时间离散,可以得到迭代过程中的如下关系:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{i+\Delta t}^i &= \mathbf{u}_{i+\Delta t}^{i-1} + \Delta \mathbf{u}^i \\ \ddot{\mathbf{u}}_{i+\Delta t}^{i-1} &= c_0 (\mathbf{u}_{i+\Delta t}^{i-1} - \mathbf{u}_i) - c_2 \ddot{\mathbf{u}}_i - c_3 \ddot{\mathbf{u}}_i \\ \dot{\mathbf{u}}_{i+\Delta t}^{i-1} &= c_1 (\mathbf{u}_{i+\Delta t}^{i-1} - \mathbf{u}_i) - c_4 \dot{\mathbf{u}}_i - c_5 \ddot{\mathbf{u}}_i \end{aligned} \quad (16)$$

式中:  $\Delta t$  为选用的时间步长,上标  $i$  和  $i-1$  分别代表在迭代步  $i$  和  $i-1$  时对应的值,  $\Delta \mathbf{u}^i$  为两个迭代步之间的位移差值,  $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$  系数表述如下:

$$c_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}, c_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}, c_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}, c_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1, c_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1, c_5 = \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \quad (17)$$

当积分常数  $\delta \geq 0.50, \alpha \geq 0.25(0.5 + \delta)^2$  时, Newmark 法是无条件稳定的。

由上述方程可以得到动力非线性有限元平衡迭代求解的基本方程:

$$(c_0\mathbf{M} + c_1\mathbf{J} + \mathbf{K}_{t+\Delta t}^{i-1})\Delta\mathbf{u}^i = \mathbf{R}_{t+\Delta t} - \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{i-1} + \mathbf{M}[-c_0(\mathbf{u}_{t+\Delta t}^{i-1} - \mathbf{u}_t) + c_2\dot{\mathbf{u}}_t + c_3\ddot{\mathbf{u}}_t] + \mathbf{J}[-c_1(\mathbf{u}_{t+\Delta t}^{i-1} - \mathbf{u}_t) + c_4\dot{\mathbf{u}}_t + c_5\ddot{\mathbf{u}}_t] \quad (18)$$

式中:  $\mathbf{F}_{t+\Delta t}^{i-1}$  表示  $t + \Delta t$  时刻的第  $i - 1$  迭代步的等效节点力。

### 3 数值算例

图1是一典型饱和软土地基,条形基础宽5.6 m,施加  $q = 91.0 \text{ kPa}$  均布载荷。根据对称性取一半研究。土层厚4.0 m,根据工程经验,宽度方向取载荷宽度的3倍(8.0 m),上边界完全透水,其余三个边界不透水,左右边界约束  $x$  方向位移,底边界约束  $y$  方向位移。模型参数参照我国比较普遍的上海软粘土、深圳软粘土及珠江三角洲软粘土设计,详表1。

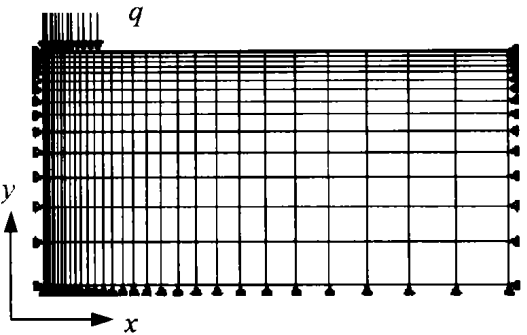


图1 饱和软土地基平面问题计算简图

表1 饱和软土的材料参数

弹性模量 $E/\text{kN} \cdot \text{m}^{-2}$	泊松比 $\nu$	体积分数 $n$	凝聚力 $C/\text{kN} \cdot \text{m}^{-2}$	渗透系数 $k/\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	内摩擦角 $\varphi/^\circ$	容重 $\gamma_s/\text{kN} \cdot \text{m}^{-2}$
2 000.0	0.3	0.4	13.2	$1.0 \times 10^{-7}$	11.0	17.5

图2为荷载中心(左端竖向边界)不同深度处的沉降曲线图。图3为荷载中心不同深度处孔隙压力消散曲线图,图中由上到下,依次为深度等于0.24 m,0.81 m,1.50 m,2.35 m,3.39 m处的孔压曲线。由图分析可知,在加载的初始阶段,孔隙压力消散较快,土骨架沉降速度也较快,经过一段时间后,沉降和孔压曲线发生明显的减缓趋势,曲线整体形态呈双曲线型,这与实验及工程实践所总结的规律是相同的。从深度方向看,接近地表的位置,孔压较早地趋于零值,土骨架沉降速度也较快,沿深度方向向下,沉降速度有明显的降低。这种现象可以从土的固结机理出发加以解释。地基受载后,孔隙水受压排出消散,显然,接近地表的位置,孔压容易消散排出,因而沉降发生的也较快。随着时间的增加,孔压趋于零,土体的沉降主要由土骨架的体积收缩变形完成,沉降曲线减缓,沉降值趋于稳定。从土的微观结构出发,土体受载后,孔隙水受压排出,孔隙体积减小,土体发生主固结变形。随着孔隙水承担总应力的减小,土骨架有效应力逐渐增加,土体变形增大,土中大孔隙所占比例减小,但由于土中某些聚集体颗粒破碎,聚集体间孔隙释放,孔隙水仍能基本维持原有速度排出,骨架变形仍以较快速度进行。随着骨架变形的进一步增加,聚集体间孔隙完全压缩,孔隙水压趋于零值,土中微孔隙和超微孔隙受到压缩,土体变密,压缩模量增大,土体抗变形能力增强,变形趋缓。

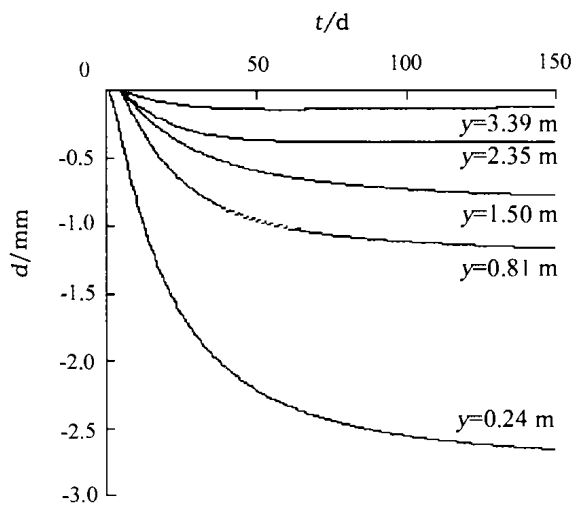


图2 荷载中心不同深度处的沉降时间关系

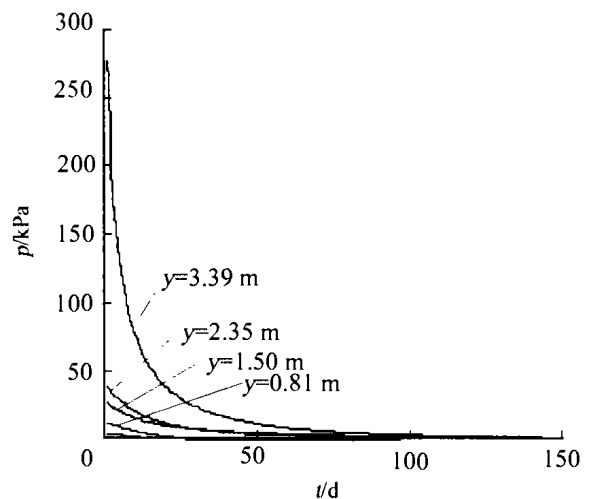


图3 荷载中心不同深度处孔压消散曲线

### 4 结语

区别于传统 Terzaghi 和 Biot 线弹性理论,本文从基于混合物理论的多孔介质模型出发,考虑了体积分数概念以及饱和软粘土的弹塑性变形性质,研究了饱

和软粘土的固结沉降问题。软粘土的固结和水在软粘土中的渗流是同时发生的两个运动学过程,二者存在着强烈的耦合作用,一般而言其固结变形和渗流以及孔隙结构是一个完全动态的非线性时效过程。软粘土固结同时具有较明显的次固结性质,它与软土的流变性质有关,并和粘土颗粒表面的结合水有着重要联系,本文尚未考虑此种情况,有待进一步研究。

### 参考文献:

- [1] 魏汝龙. 从实测沉降过程推算固结系数[J]. 岩土工程学报, 1993, 15(2): 12-19.
- [2] Duncan J M. Limitations of Conventional Analysis of Consolidation Settlement[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1993, 15: 119.
- [3] Boit M A. General theory of three dimensional consolidation[J]. J. Appl. Phys. 1941, 12: 155-164.
- [4] Biot M A. General solution of equation of elasticity and consolidation for a porous material[J]. J. Appl. Mech. 1956, 78: 91-96.
- [5] PREVOST J H. Mechanics of continuous Porous Media[J]. Int. J. Engng Sci. 1980, 18: 787-800.
- [6] 刘占芳, 严波. 多孔介质理论发展史上的重要成果[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 1995.
- [7] 郑颖人, 龚晓南. 岩土塑性力学基础[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1989.

(上接第45页)

5) “柱强于梁”、“梁强于柱”和“等强梁柱”这三类框架不仅是在工程实践中客观存在,在结构理论上也是成立的,不同类型框架其内力重分布特点也各不相同。

6) 三类框架的弯矩调幅能力和特点直接涉及弯矩调幅设计。对这三类框架的调幅设计,不仅应基于弹性弯矩图,还应充分考虑不同类型框架之间所存在的内力重分布特性的差异。

### 参考文献:

- [1] 中国工程建设标准化协会. 钢筋混凝土连续梁和框架考虑内力重分布设计规程(CECS 51:93)[M]. 北京: 中国计划出版社, 1993.
- [2] GB 50010-2002, 混凝土结构设计规范[S].
- [3] 赵博. 两跨非对称加载预应力混凝土框架的试验研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2003.
- [4] 孙新敏. 跨间竖向荷载作用下预应力框架内力重分布的试验研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2002.
- [5] 邓宗才. 钢筋混凝土连续梁弯矩调幅法的研究[J]. 建筑结构, 1997, (8): 30-32.
- [6] 王传志, 腾智明. 钢筋混凝土结构理论[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1985.
- [7] 王福明, 曾建民, 段炼. 钢筋混凝土压弯构件塑性铰的试验研究[J]. 太原工业大学学报, 1989, (4): 20-29.