第 27 卷 第 4 期 重庆建筑大学学报 Vol. 27 No. 4
2005 年 8 月 Journal of Chongqing Jianzhu University Aug. 2005

期权价格的拟 Monte Carlo 仿真计算*

张天永[1]， 彭隆泽[2]
（1. 重庆工商大学，重庆 400067；2. 国家开发银行重庆分行，重庆 400010）

摘要：首先介绍了利用 Monte Carlo 仿真求解期权价格的原理和方法，然后提出在现有 Monte Carlo 仿真的基础上利用超均匀随机序列 Halton 序列来改进现有 Monte Carlo 仿真的拟 Monte Carlo 仿真，给出了 Halton 超均匀随机序列生成规则和 Moro 算法，最后给出了三种 Monte Carlo 方法的比较。

关键词：拟 Monte Carlo 仿真；期权定价；Halton 序列；Moro 算法
中图分类号：F830.9 **文献标识码**：A **文章编号**：1006－7329(2005)04－0111－04

Option Pricing Using Quasi – Monte Carlo Simulation

ZHANG Tian – yong[1], PENG Long – ze[2]
(1. College of Science, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, P. R. China; 2. China Development Bank (Chongqing), Chongqing 400010, P. R. China)

Abstract: This paper firstly introduces the method of option pricing using Monte Carlo, then, proposes one kind of Quasi – Monte Carlo Simulation, which uses Halton sequences to improve Monte Carlo Simulation. This paper also introduces generated rule of Halton Low Discrepancy Sequences and Moro algorithm. Finally, the performances of three kinds of Quasi – Monte Carlo method are compared.

Keywords: Quasi – Monte Carlo Simulation; Option Pricing; Halton Sequences; Moro Algorithm

Black 和 Scholes 在 1973 年提出了期权定价理论[1]。由于期权定价公式涉及到比较复杂、艰深的数学知识，因此这一公式的推导和求解显得非常困难。因此非解析方法在期权定价研究中成为了重要工具。在期权定价理论中用到的数值方法主要有 Monte Carlo 方法、二叉树方法、有限元方法、神经网络方法、遗传算法和遗传规划等[2]。在 Monte Carlo 仿真的基础上，引入了一个超均匀序列 Halton 序列[4]来改进和提高现有 Monte Carlo 仿真在期权定价求解中的性能。

1 期权定价模型

根据文献[5]关于 Black – Scholes – Merton 期权定价模型的基本假设，我们设 S_t 为定价日标的股价，K 为买权合同执行价格，r 为连续复利计算的无风险利率，δ 为连续复利计算的股利率，T 为到期日，t 为当前定价日，$T-t$ 为定价日到到期日的时间（单位：年），σ 为标的股价波动率。并且有标的股票价格 S_t 服从对数正态分布，即

$$S_t = S_0 \exp\{(r-\sigma-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma\sqrt{t}e_t\}, 0<t<T \tag{1}$$

其中，e_t 为标准正态分布，且不同时刻的 e_t 相互独立。

则可得到 Black – Scholes – Merton 期权定价模型在定价日 t，其欧式看涨期权的价值 c_t 为：

* 收稿日期：2005－04－12
作者简介：张天永（1975－），男，重庆綦江人，讲师，主要从事计算金融、数据挖掘在金融工程中的应用研究。

$$c_t = S_t N(d_1) - K e^{-(r-\delta)(T-t)} N(d_2) \tag{2}$$

式中：$d_1 = [\ln(S_t/X) + (r-\delta) + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)]/[\sigma(T-t)^{1/2}]$，$d_2 = d_1 - \sigma(T-t)^{1/2}$，$N(x)$是标准正态变量的累积分布函数，即 $N(x) = P\{X < x\}$，其中 $X \sim N(0,1)$。

2 拟 Monte Carlo 仿真

Monte Carlo 仿真是一种随机模拟算法。这种方法产生的随机序列时是随机的，这种随机性使得各点之间不具有相关性，因此导致其在空间分布中有可能产生群聚现象。为了避免这种情况的产生，有必要找到一种能够比这种不相关的随机点更均匀地充满空间[0,1]的序列，这种序列被称为超均匀随机序列。拟 Monte Carlo 仿真就是一种利用超均匀随机序列来代替随机数的 Monte Carlo 仿真[7]。

2.1 Halton 序列

Halton 序列是 1960 年被提出来的，它能够均匀地分布于[0,1]中。下面给出基数为 b(b 为一素数)的 Halton 序列的生成规则[4]：

取序列的第 j 个数，例如，设 $j=4$，则

1) 把十进制数转化为 b 进制数；例如，$4_{10} = 100_2$

2) 对 b 进制数求反序，在这个反序数前置一小数点；例如，$(100_2)_{反} = 001_2 = 0.001_2$

3) 把 b 进制小数转化为十进制小数。例如，$0.001_2 = 2^{-1} * 0 + 2^{-2} * 0 + 2^{-3} * 1 = \frac{1}{8}$

由上可以得到 Halton 序列的第 j 个数对应在[0,1]上的值。

2.2 Moro 算法

累积标准正态分布是标准正态分布密度函数的积分。累积标准正态分布函数如下：

$$Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{s^2}{2}} \mathrm{d}s$$

累积标准正态分布的 Y 轴是服从单位均匀分布 $U[0,1]$ 的。则从累积标准正态分布的 Y 轴，我们可以找到相应的其 X 轴上的样本值(即 $X(Y)$)，此即我们需要的仿真值，下面证明之。

设一正态分布，其密度函数为 $f(x)$，其分布函数为 $F(x)$，则函数 $g(x)$ 的期望值为：

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \mathrm{d}F(x) \tag{3}$$

我们设 $U = F(x)$，$U \sim U[0,1]$，则上式变为

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \mathrm{d}F(x) = \int_0^1 g(F^{-1}(u) \mathrm{d}u = \int_0^1 h(u) \mathrm{d}u = E(u) \tag{4}$$

由式(1)、(4)以及欧式看涨期权的定义，则其在 $t=0$ 时的价格(期望值)为：

$$C(t=0) = e^{-rT}\int_0^1 \max\{0, S_0 \cdot e^{[(r-\delta)-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\sqrt{T}F^{-1}(u)]} - K\} \mathrm{d}u \tag{5}$$

则上式的近似解可以表示为：

$$C(t=0) = e^{-rT}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \max\{0, S_0 \cdot e^{[(r-\delta)-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\sqrt{T}F^{-1}(u)]} - K\} \tag{6}$$

N 即为仿真次数，u 为超均匀随机序列值。

Moro 算法把累积标准正态分布的 Y 轴分为两部分，一为中央部分，即 $0.08 \leqslant u \leqslant 0.92$；另一为尾端部分，即 $u < 0.08$ 和 $u > 0.92$。针对不同部分，Moro 算法使用了不同的算法。因此从均匀分布到累积标准正态分布函数的 $Y(u)$ 变换，Moro 算法具有有相当高的准确度。

下面，我们给出 Moro 算法两部分包含的算法：

1) 如果 $|y| \leqslant 0.42$(对应尖峰部分)，则使用 Beasley 算法，其反函数 $F^{-1}(u)$ 的估计值为

$$F^{-1}(u) = y\frac{\sum_{n=0}^{3} a_n y^{2n}}{\sum_{n=0}^{4} b_n y^{2n}} \qquad 当|y| \leqslant 0.42 \tag{7}$$

其中 $y = u - 0.5$,而常数 a_n 和 b_n 的值则如表 1 所示。

2) 如果 $|y| > 0.42$(对应厚尾部分),使用截断的切比雪夫数列[4],其反函数 $F^{-1}(u)$ 的估计值

$$F^{-1}(u) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{8} c_n T_n(z) - \frac{c_0}{2} & 当 0.42 < y < 0.5 \\ \frac{c_0}{2} - \sum_{n=0}^{8} c_n T_n(z) & 当 -0.5 < y < -0.42 \end{cases} \tag{8}$$

其中 $z = k_1\{2\ln[-\ln(0.5 - |y|)] - k_2\}$,而常数 c_n、k_1 和 k_2 的值则如表 1 所示。

下面的 Clenshaw 递推公式[4]可以用来有效估计截断的切比雪夫数列。

若

$$f(z) = \sum_{n=0}^{8} c_n T_n(z) - \frac{c_0}{2}$$

则 $f(z)$ 可由下面递推公式获得

$$d_{10} = d_9 = 0, d_j = 2zd_{j+1} - d_{j+2} + c_j \quad j = 8, 7, \cdots, 1$$

$$f(z) = d_0 = zd_1 - d_2 + \frac{c_0}{2}$$

表 1　Moro 算法的常数

n	a_n	b_n	n	c_n
0	2.506 628 238 84	1.00	0	7.710 887 070 548 789 5
1	-18.615 000 625 29	-8.473 510 930 90	1	2.777 201 353 368 516 9
2	41.391 197 735 34	23.083 367 437 43	2	0.361 496 412 926 100 2
3	-25.441 060 496 37	-21.062 241 018 26	3	0.037 341 823 343 455 4
4		3.130 829 098 33	4	0.002 829 714 303 696 7
			5	0.000 162 571 691 792 2
			6	0.000 008 017 330 474 0
	k_1	k_2	7	0.000 000 384 091 986 5
	0.417 988 642 492 643 1	4.245 468 688 137 656 9	8	0.000 000 012 970 717 0

2.3　拟 Monte Carlo 仿真求解期权定价步骤

由上面对超均匀随机序列和 Moro 算法的介绍,我们得到拟 Monte Carlo 仿真求解欧式看涨期权定价的步骤如下:

1) 设 j 为一超均匀随机序列的第 j 个数;

2) 利用 Halton 方法求 j 的超均匀随机序列值 u_j;

3) 利用 Moro 算法求 u_j 的反函数 $F^{-1}(u_j)$;

4) 令 $Vt(j) = S_0 \cdot e^{[(r-\delta)-\frac{1}{2}\sigma^2 z)T+\sigma\sqrt{T}F^{-1}(u_j)]} - K$;

5) 根据期权定价的定义,取 $\max\{0, Vt(j)\}$,此即为一仿真期权值;

6) 令 $j = j+1$,返回(1);

7) 对所有仿真值取其均值 $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\max\{0, Vt(j)\}$($N$ 为仿真次数)即为最后所求之期权价格仿真解。

2.4　Monte Carlo 仿真计算结果比较

下面以欧式看涨期权定价为例,比较了几种 Monte Carlo 仿真的计算结果。

计算中,用到的参数值如下:

其中 $S_0 = 20, K = 20, r = 0.08, \delta = 0.04, \sigma = 0.25, T = 2, nsim = 5\ 000$(仿真次数)

通过式(2)和以上参数值,我们得到欧式看涨期权价格 $C_0 = 3.263\ 5$(解析解)。

表2给出3种 Monte Carlo 仿真下的计算结果与解析解的比较。

三种 Monte Carlo 仿真的特点如下：

1）MC 序列 + NormsInv（Excel 中求标准正态累积分布函数反函数的函数）实现从［0,1］均匀分布到标准正态分布的转换；

2）MC 序列 + Moro 实现从从［0,1］均匀分布（随机序列）到标准正态分布的转换；

3）QMC 序列 + Moro 实现从 Halton 序列到标准正态分布的转换。

表2　3种 MC 仿真比较

仿真方法	仿真价格/三次	仿真误差/%
MC + NormsInv 算法	3.244/3.281/3.323	-0.585/0.549/1.831
MC + Moro 算法	3.213/3.231/3.252	-1.533/-0.984/-0.354
QMC + Moro 算法	3.250/3.250/3.250	-0.422/-0.422/-0.422

由表2，我们可以看到超均匀随机序列结合 Moro 算法的仿真计算结果在仿真次数时其解是确定的。而第一种方法由于产生的是随机数，并且是使用标准正态分布实现转换不符合股价的变换特点，导致仿真误差不稳定。第二种方法尽管使用了 Moro 算法实现转换，但由于 MC 仿真产生的也是随机数，同样导致了仿真误差的不稳定，但其误差不稳定性相对第一种而言要小。第三种方法之所有比第二种较好的仿真结果正是因为它使用的 alton 超均匀随机序列第二种算法产生的随机数能更均匀地分布于［0,1］之间。

表3给出在不同的仿真次数时，QMC 序列 + Moro 算法的仿真结果与解析解的比较。

表3　QMC 序列 + Moro 算法

仿真次数	仿真价格	仿真误差/%
5 000	3.250	-0.422
10 000	3.256	-0.232
20 000	3.259	-0.126

由表3可以看出，当仿真次数越大时，仿真结果越趋近解析解。

由以上的仿真结果，我们可以看到利用 Halton 超均匀序列与 Moro 算法结合来仿真股票的价格，以得到期权价格的方法是非常有效的。

3　结论

在 Monte Carlo 仿真的基础上，利用 Halton 超均匀序列来修正 Monte Carlo 仿真在生成随机数时的不足，提出了 Halton 序列 + Morso 算法在欧式看涨期权定价中的应用，改进了现有 Monte Carlo 仿真。从仿真结果看，其改进还是很明显的。今后作者将进一步研究拟 Monte Carlo 仿真在美式期权定价中的应用。

参考文献：

［1］ Black F, Scho lesM. The pricing of options and corporate liabilities［J］. Journal of Political Economy, 1973, 81(3): 399 - 417

［2］ 马俊海. 金融衍生证券定价的数值分析方法［M］. 浙江：浙江人民出版社，2002.

［3］ Hull J C. 期权、期货和衍生证券［M］. 北京：华夏出版社，1997.

［4］ William H. Press、C 数值解法（第二版）［M］. 北京：电子工业出版社，2004.

［5］ 茅宁. 期权分析——理论与应用［M］、南京：南京大学出版社，2000.

［6］ 王鸿儒. Excel 在统计学中的应用［M］. 北京：中国铁道出版社，2004.

［7］ Real Options with Monte Carlo Simulation［EB/OL］. http://sphere. rdc. puc - rio. br/marco. ind/monte - carlo. html.