

土质地基上受集中力作用的有限长梁内力分析*

李立, 刘东燕

(重庆大学 土木工程学院, 重庆 400045)

摘要:为了使理论结果能尽可能准确地反应实际情况,就土质地基上受多个集中力作用的有限长梁的内力计算方法进行了对比分析。采用基于 Winkler 假定的计算方法和基于弹性半无限空间理论的计算方法,通过理论分析这两种计算方法的差异,并采用 FLAC^{3D} 进行数值模拟。计算结果表明基于 Winkler 假定的计算方法较真实地反应了有限长梁的实际受力情况。

关键词:有限长梁;土质地基;Winkler 假定;弹性半无限空间;FLAC

中图分类号:TU431 **文献标识码:**A **文章编号:**1006-7329(2005)05-0073-05

Analysis of Internal Force Calculation of Beams with Finite Length Bearing Several Point Loads and on Soil Foundation

LI Li, LIU Dong-yan

(College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, P. R. China)

Abstract: For making the theoretic results close to the fact, two methods used to calculate the internal force of beams with finite length bearing several point loads and on soil foundation were compared. These two methods were based on the Winkler's assumption and the half-space elastic foundation theory respectively. Through theoretic analysis, the difference between the two methods was found. And with the aid of FLAC^{3D} analysis, it was clear that the results deduced by the method based on the Winkler's assumption were more close to the fact.

Keywords: beams with finite length; soil foundation; Winkler assumption; half-space elastic foundation; FLAC

土质地基上受多个集中力作用的有限长梁,是工程实践中时常遇到的一种力学模型。对这类有限长梁内力的计算,是柱下条形基础设计以及预应力框格锚固设计等工程设计中时常遇到的问题。该问题的简化计算方法——“倒梁法”,虽然简便易行,但由于假设过于粗糙,使其无法准确反应出梁的实际受力情况,运用范围受到局限。已经有很多学者对弹性地基上梁的计算提出了许多理论和分析方法,比如基于 Winkler 假定的 Hetenyi 解析法、基于弹性半无限空间理论的热摩奇金的链杆法和郭尔布诺夫-伯沙道夫的幂级数法等^[1]。其中 Hetenyi 的解析法^[2]和郭尔布诺夫-伯沙道夫的幂级数法^[3]已被运用于工程设计之中。这两种方法都考虑了梁的挠曲变形,以及地基与梁的共同作用,相比“倒梁法”具有更大的优越性,其结果也更加真实可靠。但是,这两种方法之间的差异常被忽视。工程设计人员通常只注意到两种方法的理论假设存在不同,很少注意到,正是由于理论假设的不同,使得在某些情况下,两种方法对同一种模型的计算结果存在明显差异。因此,对这些差异进行研究,选择更符合实际情况的计算方法,是十分必要的。

1 计算模型与结果

有限长梁指荷载作用点至梁端的距离 $x \leq \pi/\lambda$ (λ 即梁的弹性特征),这意味着荷载作用对梁端的影响已不可忽略^[4],这也是工程中常遇到的情况。有限长梁上作用的集中力,是对实际情况的一种简

* 收稿日期:2005-05-21

作者简介:李立(1980-),女,重庆市人,硕士生,主要从事边坡支护结构研究。

化,它可以是条形基础上的柱荷载,也可以是预应力框格梁上受到的锚索作用力。土质地基是工程实践中常见的岩土材料,虽然不同土质会具有不同的特性,但土质地基普遍具有较好的弹性性质。

基于上述特点,本文的计算模型选择了一根受三个集中力作用的有限长梁。梁置于某土质地基上,地基的变形模量为 20 MPa,基床系数为 $15 \times 10^4 \text{ kN/m}^3$ 。梁的材料为钢筋混凝土,弹性模量取为 $2.55 \times 10^4 \text{ MPa}$ 。梁上三个集中力的大小均为 500 kN,集中力的作用位置以及梁的长度如图 1 所示。

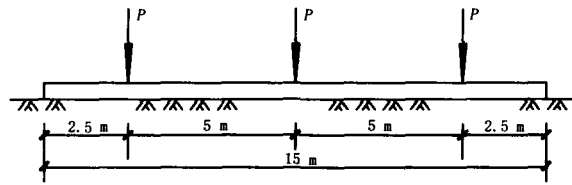


图1 计算模型简图

分别采用基于 Winkler 假定的 Hetenyi 解析法(以下简称解析法)和基于弹性半无限空间理论的郭尔布诺夫-伯沙道夫的幂级数法(以下简称幂级数法),对该模型中梁的内力进行计算,计算结果如图 2 所示。由图可见,这两种方法计算得到的剪力图差别不大,但弯矩图差异显著,幂级数法得到的梁弯矩值全部为正,且最大值出现在梁的中部,而解析法得到的结果显示在相邻集中力作用的中间段出现了负弯矩。这种差异将直接影响到对梁截面的设计,不容忽视。

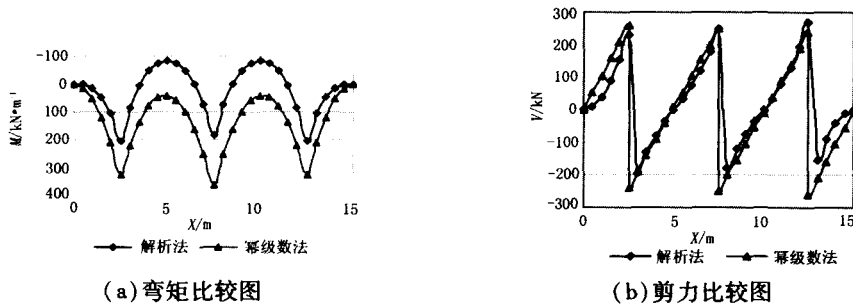


图2 梁内力比较图

2 理论分析

2.1 解析法计算原理

Winkler 假定认为,土体表面任意一点的压力强度与该点的沉降成正比^[1],即:

$$p(x) = ky \tag{1}$$

式中: k 为基床系数, kN/m^3 。

由此假定,再根据材料力学的有关公式,可推知弹性地基梁的挠曲微分方程为^[1]:

$$E_b I_b \frac{d^4 y}{dx^4} = -kby + q(x) \tag{2}$$

式中: E_b 、 I_b 分别为梁的弹性模量和惯性矩, b 为梁宽, $q(x)$ 为梁上荷载。

解上述挠曲微分方程,再根据材料力学知识, $-E_b I_b \frac{d^2 y}{dx^2} = M$, $-E_b I_b \frac{d^3 y}{dx^3} = V$,可得到梁的弯矩和剪力的表达式。

1946 年,Heteryi 给出有限长梁上作用有集中力时,梁的挠度、弯距、剪力的解析解表达式^[1]:

$$y(x) = \frac{p\lambda}{kb[\sinh^2(\lambda l) - \sin^2(\lambda l)]} I_3 \tag{3}$$

$$M(x) = \frac{P}{2\lambda[\sinh^2(\lambda l) - \sin^2(\lambda l)]} I_1 \tag{4}$$

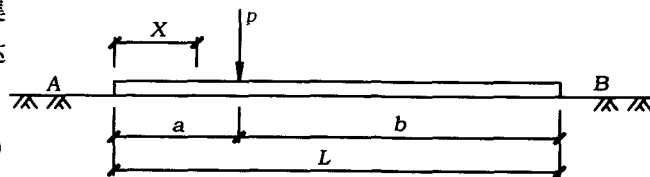


图3 Heteryi 解析解示意图

$$V(x) = \frac{p\lambda}{\sinh^2(\lambda l) - \sin^2(\lambda l)} I_2 \quad (5)$$

式中: λ 为弹性梁的弹性特征, $\lambda = \sqrt[4]{\frac{kb}{4E_b I_b}}$, I_1, I_2, I_3 为 x 的函数,参见文献[5], l 为梁长。

值得注意的是, x 值是从梁端 A 向右起算,当 $x < a$ 时,可直接运用以上计算式,当 $x > a$ 时,需交换 a, b 位置,且 x 从 B 点向左起算^[4]。

对于多个集中力作用的有限长梁^[2],利用上述 Heteryi 解析解和叠加原理^[2],可以得到这根梁的内力,即:

$$y(x) = \sum_{i=1}^n y_i(x) \quad M(x) = \sum_{i=1}^n M_i(x) \quad V(x) = \sum_{i=1}^n V_i(x) \quad (6)$$

式中: $y_i(x), M_i(x)$ 和 $V_i(x)$ 即第 i 个集中力单独作用时,根据 Heteryi 的解析解计算得到的梁的挠度、弯矩和剪力。

2.2 幂级数法的计算原理

弹性半无限空间理论假设地基是密实而均匀的弹性物体,框架梁置于其表面,两者应满足相应的静力平衡条件和变形协调条件。首先,作用于梁上的集中力应与梁所受的地基反力相平衡。其次,框架梁底面应与地基始终接触,所以在外力(集中力和地基反力)作用下梁上某点产生的挠度,应等于同一点地表的沉陷量。根据上述两点,应用弹性理论计算地基的沉陷,用材料力学公式计算梁的变形,然后由变形协调条件和静力平衡条件可确定地基反力^[6]。求出地基反力的分布后,梁上的作用荷载均为已知,取梁的一段脱离体根据力的平衡即可计算梁的内力。根据这一思路,可利用级数法^[7]进行具体分析。

首先,将地基反力 $p(x)$ 近似地表达为有限项的幂级数^[7],即:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n \quad (7)$$

其中的 $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 就是所求的 $n+1$ 个基本未知量。利用两个静力平衡方程($\sum Y=0, \sum M=0$)和 $n-1$ 个变形连续方程(在 $n-1$ 个点处梁的挠度应与地基沉陷相等),可以解出基本未知量。因此,问题归结为解 $n+1$ 个代数方程。在实际计算中,可以利用对称性对计算进行简化^[7]。

2.3 两种理论解的对比分析

由上述理论计算原理可知,两种方法都考虑了梁的挠曲、地基的变形以及梁与地基的相互作用。两种方法的差异在于其理论基础对地基性状的假设不同,这直接影响到对地基反力的求解。另一方面,对于置于地基上的梁来说,作用外力包括梁上集中力和地基反力。由于同一模型中梁上作用的集中力是相同的,所以导致最终弯矩图差异的是两种理论算出的不同分布的地基反力。

根据 Winkler 假定, $p(x) = ky$,由 Heteryi 解析解和叠加原理

可算得梁的挠度分布 $y(x)$,再乘以基床系数 k ,可计算出由解析法得到的地基反力分布。同样,根据弹性半无限空间理论中的平衡条件,解方程组,即可得到由幂级数法得到的地基反力分布。图4是按上述两种方法计算所得的地基反力结果。由图可知,基于 Winkler 假定算得的地基反力分布受梁上集中力作用的影响很大,起伏变化明显,而基于弹性半无限空间理论所得的地基反力分布更加趋于均匀。

根据静力平衡的知识,当外力作用为已知时,取梁的一段脱离体,即可计算出

指定截面的弯矩。以梁上两相邻集中力作用点间的某截面为研究对象,取如图5图5 梁弯矩求解简图所示的脱离体。图示截面的弯矩 $M(x)$ 的表达式如下:

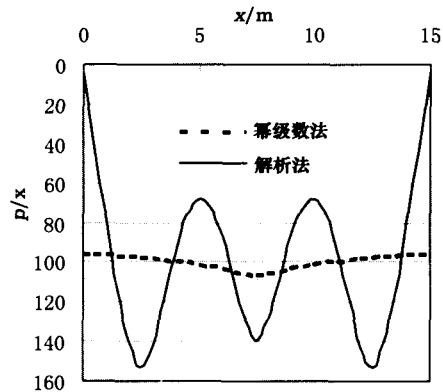


图4 计算模型中地基反力分布图

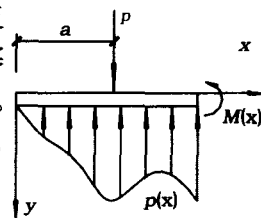


图5 梁弯矩求解简图

$$M(x) = \int_0^x p(t)(x-t)dt - P(x-a) \quad (8)$$

通过计算发现,当 x 在两相邻集中力作用点之间变化时,将图 4 中幂级数法计算所得的地基反力分布曲线带入(8)式,所得结果始终为正,若带入解析法计算所得的地基反力分布曲线,结果则会出现为负的情况。这进一步说明了导致梁弯矩图(图 2a)显著差异的原因,是两种理论不同假设条件所导致的不同的地基反力分布。

为了更全面的分析地基反力分布对梁内力的影响,改变模型中的地基参数,增大地基的变形模量及基床系数,取 $E = 300 \text{ MPa}$, $k = 50 \times 10^4 \text{ kN/m}^3$ 再次计算。图 6、图 7 给出了改变地基参数后,地基反力的分布和梁的弯矩值。由图可知,对于 E 值较大的岩质地基,幂级数法算得的地基反力分布相对于图 4 的结果发生了变化。而且, E 值增大后,幂级数法和解析法都会算得梁上的负弯矩区段。

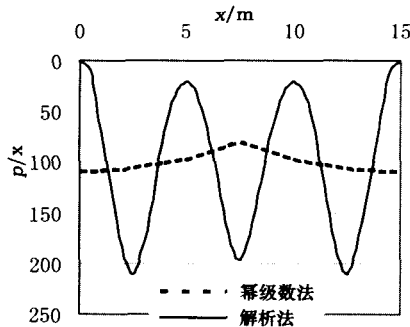


图 6 改变地基参数后地基反力的分布图

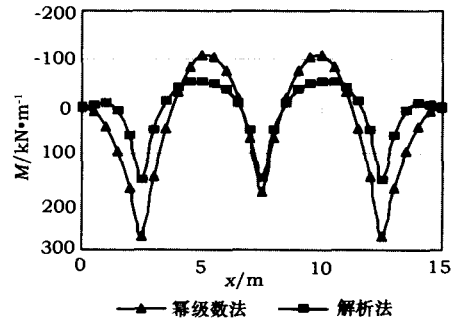


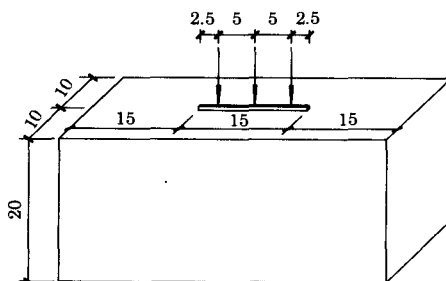
图 7 改变地基参数后梁的内力图

以上分析表明,理论假设和地基参数的不同会引起地基反力分布规律的变化。而且,地基反力的分布会直接影响到梁弯矩的计算结果。对于变形模量 E 较小的土质地基,幂级数法和解析法的计算结果存在不容忽视的差异,应慎重选择更符合实际情况的计算方法。

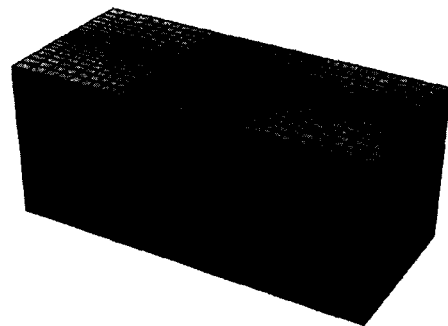
3 数值模拟

3.1 FLAC^{3D} 及计算模型

FLAC 是快速拉格朗日差分分析(Fast Lagrangian Analysis of Continua)的简写,是力学计算的数值方法之一。FLAC^{3D} 采用拉格朗日差分公式来处理有限变形问题,能较好的模拟地质材料在达到强度极限或屈服极限时发生的破坏或塑性流动的力学行为,也可以模拟结构体与岩土体的相互作用,以及结构体和岩土体在外力作用下的力学反应,是一种较理想的岩土工程计算软件。



(a) 模型几何尺寸



(b) 模型实体

图 8 FLAC^{3D} 计算模型

为了验证理论计算的结果,在理论分析模型(图 1)的基础上,利用 FLAC^{3D} 建立了数值分析的模型,如图 8 所示。其中,梁由软件中提供的一种结构单元——Beam 单元组成。Beam 单元为线单元,假定为线性弹性材料,可以承受一定弯矩,允许有一定的挠曲。地基采用软件中提供的莫尔-库仑模型。有关

力学参数见表1、表2。Beam单元与土体之间通过刚性联接来实现力的传递,进而实现其相互作用。

表1 地基的力学参数

名称	变形模量/MPa	泊松比	密度/kg·m ⁻³	剪切模量/MPa	粘结力/MPa	摩擦角/°
某土质地基	20	0.3	1 900	7.7	0.02	30

表2 梁的力学参数

名称	弹性模量/MPa	泊松比	密度/kg·m ⁻³	截面面积/m ²	转动惯量/m ⁴
梁	2.55 × 10 ⁴	0.3	2 500	0.25	5.2 × 10 ⁻³

3.2 计算结果及对比分析

图9给出了FLAC3D计算得到的梁的弯矩图。同时,将图8的结果与图2的结果绘于同一张图上,即得到图10。为了便于比较,将图9中的部分数据列于表3中。通过图9和表3可以清晰的看到,数值模拟的结果也出现了负弯矩区段。尽管在正弯矩区段,幂级数法的计算结果与数值模拟的结果吻合得较好,但总的来说,解析法的计算结果更能反应实际的受力情况。

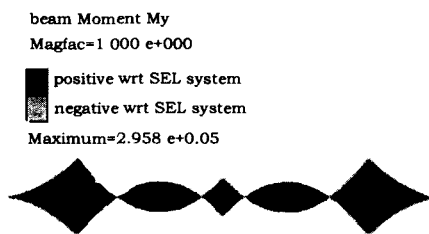


图9 FLAC^{3D}计算得到的梁弯矩图

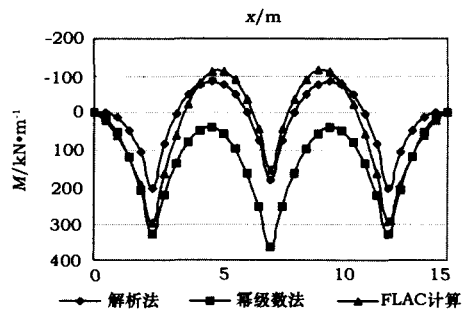


图10 梁弯矩对比图

表3 不同方法计算得到的梁的弯矩值/kN·m

梁长(x坐标)/m	0	2.5	5	7.5	10	12.5	15
解析法算得的弯矩值	0	202.7	-84.529	182.64	-84.529	202.7	0
幂级数法算得的弯矩值	0	328.42	40.753	364.08	40.753	328.42	0
FLAC ^{3D} 算得的弯矩值	-0.0013	295.8	-109.2	155.2	-110	295.4	0.014 2

4 结语

通过理论推导和数值分析发现,对于土质地基上的受多个集中力作用的有限长梁,基于Winkler假定的解析法能分析得到梁上负弯矩的分布情况,相对基于弹性半无限空间的幂级数法的计算结果,解析法较为全面地反映了梁的实际工作状态。因此,对于变形模量E偏小的土质地基,分析置于其上受多个集中荷载作用的有限长梁时,建议采用基于Winkler假定的解析法来计算梁的内力。

参考文献:

[1] 张季容,朱向荣. 简明建筑基础计算与设计手册[M]. 北京:中国建筑业出版社,1997.
 [2] 许英姿,唐辉明. 滑坡治理中格构锚固结构的解析分析[J]. 地质科技情报,2002,21(3):89-92.
 [3] 肖世国,周得培. 岩石高边坡预应力锚索地梁的一种内力计算方法[J]. 岩石力学与工程学报,2003,22(2):250-253.
 [4] 陈仲颐,叶书麟. 基础工程学[M]. 北京:中国建筑业出版社,1990.
 [5] M. Hetenyi. Beams on Elastic Foundation[M]. Michigan. Ann Arbor:University of Michigan Press. 1946.
 [6] 丁大钧. 弹性地基梁计算理论和方法[M]. 南京:南京工学院出版社,1986.
 [7] 龙驭球. 弹性地基梁的计算[M]. 北京:人民教育出版社,1981.
 [8] Itasca. FLAC^{3D} Version 2.0. User's Manual[M]. Minneapolis:ICG,1997.