

# 推力桩的三参数算法\*

许锡宾, 王金海, 王学军

(重庆交通大学 河海学院, 重庆 400074)

**摘要:**提出了推力桩的三参数算法,给出了其理论通解式,明确了幂指数的理论取值范围。该法的基本微分方程更具一般性,理论推导严密,通解的收敛性好,具有明显优于现有算法的拟合效果。

**关键词:**推力桩;三参数算法;理论通解;变参数

**中图分类号:**TU74 **文献标识码:**A **文章编号:**1006-7329(2006)05-0001-06

## 3 - Parameter Theory of Laterally Loaded Pile

XU Xi-bin, WANG Jin-hai, WANG Xue-jun

(College of River and Ocean Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, P. R. China)

**Abstract:** By adopting the advantages of previous theories of laterally loaded pile, in this paper, the authors brought up a 3-parameter theory and deduced its theoretical common solution. At the same time, the theoretical range of  $n$ , a very important parameter, was given, too. In comparison with previous theories, the 3-parameter theory's basic differential equation is more common, and its deduction is stricter, and the convergence of its common solution is better. In addition, because for the 3-parameter theory the idea that every parameter is variable has been adopted, it is able to break through the theoretical restriction of its linear-elastic basic equation. So the 3-parameter theory is essentially different from previous theories and its calculation result is better.

**Keywords:** laterally loaded pile; 3-parameter theory; common solution; variable parameter

推力桩是指桩体承受横向力和弯矩作用的桩,国内的规范中一般称之为“水平力作用下的桩”<sup>[1]</sup>,也有文献<sup>[2]</sup>称之为“水平承载桩”,而在英文文献中则统称为 laterally loaded pile。推力桩是一类非常重要的工程桩,其在实际工程中的应用数量仅次于承压桩,被广泛地应用于海港、码头、桥梁、滑坡体的防治、以及各种工业与民用建筑和水利工程中,成为土木工程中必不可少的和至关重要的组成部分。

从20世纪初,人们开始关注桩承受横向荷载作用时的性能。现有的推力桩的算法很多,但正如本文在文献<sup>[3]</sup>中所指出的,这些算法都还很很不完善,拟合效果也还不尽人意,仍然还停留在经验法的水平上,还没有找到一个合适的方法来解决推力桩的静力计算问题,就更不用说推力桩的动力计算了。

鉴于此,在系统研究、分析了前人推力桩理论算法的基础上,结合当前相关各学科的研究发展现状,吸收前人成果中的优点,着眼于实际工程应用,提出、建立了推力桩新的理论算法——推力桩的三参数算法。

## 1 推力桩的三参数算法

推力桩的受荷状态决定了推力桩的理论模型是一根竖向嵌固在半无限介质空间中的梁。推力桩的力学命题就是一个桩——土相互作用关系的问题,而推力桩的算法就是要解决桩侧地基土反力的计算。这在工程界和学术界都是不争的共识。

不过,由于地基土的复杂多样性和岩土材料力学性能的复杂性,直接从桩体和岩土材料的力学本构关系入手,以桩顶的边界条件和桩——土变形的相互协调性为已知条件进行推导和求解,这条路看似最直接但也最难走通。所以,通过对地基土反力做适当的假定以简化问题的复杂性,是推力桩研究的有效手段。而所有理论算法的主要区别都在于各自假定的不同。

在研究、总结前人成果的基础之上,三参数算法采用更为一般的地基土反力表达式,取推力桩的四阶基本微分表达式为:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -m(x+x_0)^n by \quad (0 \leq x \leq L) \quad (1)$$

\* 收稿日期:2006-05-15

作者简介:许锡宾(1955-),男,四川宜宾人,教授,博士,主要从事结构工程研究。

并取  $xoy$  坐标系如图 1 所示,变形与内力正向如图 2 所示。

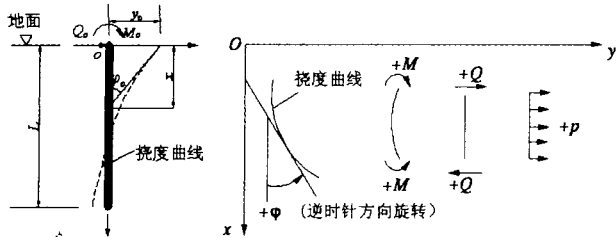


图 1 推力桩坐标系图 图 2 变形和内力正向图

式(1)中, $EI$ 是桩体的计算截面刚度(不同于材料力学里的截面刚度),通过实测资料的反演计算确定;等式右边的负号表示地基土的抗力集度  $p$  始终与位移  $y$  的方向相反; $m$ 是一个与桩侧地基土的力学性质有关的可变参数,有  $m > 0$ ;  $x_0$ 也是一个可变参数,一般有  $x_0 \leq 0$ ;指数  $n$ 也是可变参数, $n \in R$ ;  $b$ 是桩体的实际直径或地基土反力作用面上的桩体宽度; $L$ 是推力桩的桩长,也即桩的实际入土总长度(这里应当注意到,对于高出地面的桩柱部分是不能计入桩长  $L$ 的)。其中  $m, x_0, n$ 就是本文所指的三个主要参数。

三参数算法理论的基本思想是,三个参数  $m, x_0, n$ 和计算刚度  $EI$ 都不再是确定值,不仅随着具体工程地质条件的差异而不同,就是对于同一根桩而言,随着受荷状态的变化,它们的取值也相应地变化。通过这四个反演待定值的变化,综合反映在具体的某个受力状态下,在整个推力桩的入土深度  $L$ 以内的所有地基土的力学行为,四个都是综合指标。参数  $n$ 主要反映地基土抗力模数  $K = p(x, y)$ 的线形的变化,是地基土塑性行为的主要反映指标;参数  $m$ 主要反映  $K$ 在量值大小方面的变化;参数  $x_0$ 则间接地在一定程度上反映了地面处地基土抗力模数的大小。这就变参数的理论思想。

### 1.1 三参数算法的理论假定

式(1)的建立包含了以下的理论假定:(1)文克尔(Winkler)弹性地基模型<sup>[10]</sup>;(2)桩处于弹性工作状态,服从平截面假定<sup>[4]</sup>;(3)桩的挠曲变形由弯矩造成,略去了剪力的贡献<sup>[4]</sup>;(4)桩的挠曲变形与桩的长度相比比较微小<sup>[4]</sup>。

首先,文克尔(Winkler)地基模型假定地基土是由一个个离散的弹簧组成,各弹簧间互不影响,某点处的地基土抗力值仅仅与该点处的位移相关。虽然文克尔假定不符合地基土的连续性,对于剪切刚度较大的岩石地基来说尤其如此,但它概念明确、公式简单,易于简化数学处理,所以一直在工程学领域内沿用至今。而且,在通过实测资料进行反演求得相关参数的情况

下,是不会影响计算结果的。

第二,推力桩多以钢桩和钢筋混凝土桩为主。钢桩无疑是满足假定 2 的。而钢筋混凝土桩在满足规范抗裂要求的情况下,也是能够满足平截面假定,大量的钢筋混凝土构件的试验数据都证实了这一点<sup>[5]</sup>。所以,只要是满足规范相关要求的推力桩,是都能够满足假定 2 的。

第三,通常推力桩的长径比( $L/b$ )都远大于 8,由结构力学的知识可以知道,这样的构件的挠曲变形主要是由弯矩造成的,剪力的影响可以忽略<sup>[6]</sup>。

第四,推力桩都有着应力、抗裂和变形等多方面的限制,挠曲变形与桩长相比相差几个数量级,即便是柔度最大的桩的变形相对于桩长来说也是非常微小的。

### 1.2 三参数算法形式通解的推导

由于任意实数都能表述成一个分子分母互质的分数形式,(确切地讲,是任意有理数能表述成一个分数的形式。但在一定精度要求的控制条件下,所有的无理数都可以找到一个近似的有理数。),故可以令  $n = \frac{n_2}{n_1}$ ,其中  $n_2 \in Z; n_1 \in N$ ,且  $n_1 \neq 0$ , (即  $n_1 = 1, 2, 3, \dots$ ),并且有  $n_1, n_2$ 互质;令  $\xi = (x + x_0)$ ,则由式(1)有:

$$EI \frac{d^4 y}{d\xi^4} = -mb\xi^{\frac{n_2}{n_1}} y \quad (2)$$

$$\text{令 } G = \frac{mb}{EI}, z = \xi^{\frac{1}{n_1}} \Rightarrow \frac{dz}{d\xi} = \frac{1}{n_1} z^{-n_1+1}, \text{代入式(2)后整}$$

理可得:

$$\begin{aligned} & z^{-4n_1+4} \frac{d^4 y}{dz^4} - 6(n_1 - 1) z^{-4n_1+3} \frac{d^3 y}{dz^3} + \\ & (n_1 - 1)(11n_1 - 7) z^{-4n_1+2} \frac{d^2 y}{dz^2} - \\ & (n_1 - 1)(2n_1 - 1)(3n_1 - 1) z^{-4n_1+1} \frac{dy}{dz} \\ & = -n_1^4 G z^{n_2} y \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)就是所要求解的基本微分方程。

设  $y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r$  就是所需的解,将其代入式(3)中整理后有:

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^{\infty} r(r-1)(r-2)(r-3) a_r z^{r-4n_1} - \\ & 6(n_1 - 1) \sum_{r=0}^{\infty} r(r-1)(r-2) a_r z^{r-4n_1} + \\ & (n_1 - 1)(11n_1 - 7) \sum_{r=0}^{\infty} r(r-1) a_r z^{r-4n_1} - \\ & (n_1 - 1)(2n_1 - 1)(3n_1 - 1) \sum_{r=0}^{\infty} r a_r z^{r-4n_1} \\ & = -n_1^4 G \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+n_2} \end{aligned}$$

注意到上式左边共同项  $a_r z^{r-4n_1}$  的系数为:

$$\begin{aligned}
 & r(r-1)(r-2)(r-3) - \\
 & 6(n_1-1)r(r-1)(r-2) + \\
 & (n_1-1)(11n_1-7)r(r-1) - \\
 & (n_1-1)(2n_1-1)(3n_1-1)r \\
 & = r(r-n_1)(r-2n_1)(r-3n_1)
 \end{aligned}$$

则上式可进一步简化为:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{r=0}^{\infty} r(r-n_1)(r-2n_1)(r-3n_1)a_r z^{r-4n_1} \\
 & = -n_1^4 G \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+n_2} \quad (4)
 \end{aligned}$$

注意到等式(4)的左边的最低幂次项为  $z^{-4n_1}$ , 而右边的最低幂次项为  $z^{n_2}$ . 故可做如下讨论:

情况1: 当  $-4n_1 < n_2 (\Rightarrow \frac{n_2}{n_1} > -4)$  时, 令  $-4n_1 + t = n_2 (\Rightarrow t = n_2 + 4n_1)$ , 有  $t \in N$ , 且  $t > 0$

则由式(4)  $\Rightarrow$ :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{r=0}^{t-1} r(r-n_1)(r-2n_1)(r-3n_1)a_r z^{r-4n_1} + \\
 & \sum_{r=1}^{\infty} r(r-n_1)(r-2n_1)(r-3n_1)a_r z^{r-4n_1} \\
 & = -n_1^4 G \sum_{r=t}^{\infty} a_{r-t} z^{r-4n_1}
 \end{aligned}$$

由此式可知:

当  $r \leq t-1 = n_2 + 4n_1 - 1$  时, 必有  $r(r-n_1)(r-2n_1)(r-3n_1)a_r = 0$

因此可知, 当  $r=0, n_1, 2n_1, 3n_1$  时(如果能取到的话),  $a_r$  可取非零值, 否则必有  $a_r = 0$ .

当  $r \geq t = n_2 + 4n_1$  时, 有

$$\begin{aligned}
 & r(r-n_1)(r-2n_1)(r-3n_1)a_r = -n_1^4 G a_{r-n_2-4n_1} \\
 \Rightarrow a_r & = \frac{-n_1^4 G}{r(r-n_1)(r-2n_1)(r-3n_1)} a_{r-n_2-4n_1}, (r \in N, \text{且 } r \geq n_2 + 4n_2)
 \end{aligned}$$

令  $k = r - n_2 - 4n_1$ , 则有  $k \in N$ , 并注意到有  $n_1 \in N$ , 且  $n_1 \neq 0$ , 则上式可改写为:

$$\begin{aligned}
 a_{k+n_2+4n_1} & = \frac{-G}{\left(\frac{k}{n_1} + \frac{n_2}{n_1} + 4\right)\left(\frac{k}{n_1} + \frac{n_2}{n_1} + 3\right)} \cdot \\
 & \frac{1}{\left(\frac{k}{n_1} + \frac{n_2}{n_1} + 2\right)\left(\frac{k}{n_1} + \frac{n_2}{n_1} + 1\right)} a_k \quad (5)
 \end{aligned}$$

$\dots \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 a_{k+s(n_2+4n_1)} & = \frac{(-1)^s}{\prod_{i=1}^s \left[ \left[ \frac{k}{n_1} + \left( \frac{n_2}{n_1} + 4 \right) i \right] \right]} \cdot \\
 & \frac{G^s}{\left[ \frac{k}{n_1} + \left( \frac{n_2}{n_1} + 4 \right) l - 1 \right]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{a_k}{\left[ \frac{k}{n_1} + \left( \frac{n_2}{n_1} + 4 \right) l - 2 \right]} \cdot \\
 & \frac{1}{\left[ \frac{k}{n_1} + \left( \frac{n_2}{n_1} + 4 \right) l - 3 \right]} \quad (6)
 \end{aligned}$$

式(6)建立了通解  $y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r$  中各项系数间的递推关系(式(5)是基础), 从而将通解的独立求解系数个数降至  $a_0, a_{n_1}, a_{2n_2}, a_{3n_1}$ , (如果可取到的话)这最多四个。

情况2: 当  $-4n_1 = n_2 (\Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = -4)$  时,

则由式(4)  $\Rightarrow$ :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{r=0}^n r(r-n_1)(r-2n_1)(r-3n_1)a_r z^{r-4n_1} \\
 & = -n_1^4 G \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^{r-4n_1}
 \end{aligned}$$

可知此时上式两边的共同项  $a_r z^{r-4n_1}$  的系数需满足一特定的关系, 即:

$$r(r-n_1)(r-2n_1)(r-3n_1) = -n_1^4 G \quad (r \in N)$$

等式的左边随  $r$  值变化是一个可变值, 而右边却是一个相对于  $r$  的定值, 故该式不可能成立。即, 此时

$(-4n_1 = n_2 (\Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = -4))$  方程式(4)无合理解。

情况3: 当  $-4n_1 > n_2 (\Rightarrow \frac{n_2}{n_1} < -4)$  时, 令  $-4n_1 = n_2$

$+t (\Rightarrow t = -4n_1 - n_2)$ , 有  $t \in N$ , 且  $t > 0$

则由式(4)  $\Rightarrow$ :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{r=0}^{\infty} r(r-n_1)(r-2n_1)(r-3n_1)a_r z^{r-4n_1} \\
 & = -n_1^4 G \sum_{r=-t}^{\infty} a_{r+t} z^{r-4n_1} \\
 & = -n_1^4 G \sum_{r=-t}^{-1} a_{r+t} z^{r-4n_1} - n_1^4 G \sum_{r=0}^{\infty} a_{r+t} z^{r-4n_1}
 \end{aligned}$$

从上式的右边可以看出, 当  $-t \leq r \leq -1 (\Rightarrow 0 \leq r + t \leq t-1)$  时, 必有  $a_{r+t} = 0$ . 即  $a_0 = \dots = a_{t-1} = 0$ .

从  $a_t$  以后(包括  $a_t$  在内)有

$$\begin{aligned}
 & r(r-n_1)(r-2n_1)(r-3n_1)a_r = -n_1^4 G a_{r+t} \\
 \Rightarrow a_{r+t} & = \frac{r(r-n_1)(r-2n_1)(r-3n_1)}{-n_1^4 G} a_r \quad (r \in N)
 \end{aligned}$$

由这个递推式可以得出  $a_t$  以后(包括  $a_t$  在内)的所有系数也都为零。即  $a_r = 0 (r \in N)$ , 方程式(4)无合理解。

至此, 由上面的讨论可知, 只有当  $-4n_1 < n_2 (\Rightarrow \frac{n_2}{n_1} > -4)$  时方程式(4)才有解。这实际上已经从理论上

明确了式(1)的幂次  $n (= \frac{n_2}{n_1})$  的取值范围。

下面的讨论将接着上文情况 1 的讨论结果继续,进一步讨论  $a_0, a_{n_1}, a_{2n_1}, a_{3n_1}$  这四个系数的取值情况(注意此时有  $-4n_1 + t = n_2 (\Rightarrow t = n_2 + 4n_1)$ ):

1) 当  $t - 1 < n_1 (\Rightarrow -4 < \frac{n_2}{n_1} < -3 + \frac{1}{n_1})$  时, 仅有  $a_0 \neq 0, a_1 = \dots = a_{n_1-1} = 0$ ; 从而由式(6)可知, 此时方程式(4)的通解的各项系数高度相关, 只需有  $a_0$  这一个系数就递推出全部其余系数。

2) 当  $n_1 \leq t - 1 < 2n_1 (\Rightarrow -3 + \frac{1}{n_1} \leq \frac{n_2}{n_1} < -2 + \frac{1}{n_1})$  时, 有  $a_0 \neq 0, a_{n_1} \neq 0, a_1 = \dots = a_{n_1-1} = a_{n_1+1} = a_{2n_1-1} = 0$ , 由式(6)可知, 此时方程式(4)须求出  $a_0, a_{n_1}$  这两个系数才有解。

3) 当  $2n_1 \leq t - 1 < 3n_1 (\Rightarrow -2 + \frac{1}{n_1} \leq \frac{n_2}{n_1} < -1 + \frac{1}{n_1})$  时, 有  $a_0 \neq 0, a_{n_1} \neq 0, a_{2n_1} \neq 0, a_1 = \dots = a_{n_1-1} = a_{n_1+1} = \dots = a_{2n_1-1} = a_{2n_1+1} = \dots = a_{3n_1-1} = 0$ , 由式(6)可知, 此时方程式(4)须求出  $a_0, a_{n_1}, a_{2n_1}$  这三个系数才有解。

4) 当  $t - 1 \leq 3n_1 (\Rightarrow \frac{n_2}{n_1} \geq -1 + \frac{1}{n_1})$  时, 有  $a_0 \neq 0, a_{n_1} \neq 0, a_{2n_1} \neq 0, a_{3n_1} \neq 0$ , 由式(6)可知, 此时方程式(4)须求出  $a_0, a_{n_1}, a_{2n_1}, a_{3n_1}$  这四个系数才有解。

可见, 随幂次  $n (= \frac{n_2}{n_1})$  的取值范围不同, 求解所需确定的未知系数的个数也不同。但最多也就只需确定四个独立系数就可以求出通解。

下面将以幂次  $n (= \frac{n_2}{n_1} \geq -1 + \frac{1}{n_1})$  时的具有普遍意义的通解为例, 给出方程式(4)的形式解析解。而当幂次  $n (= \frac{n_2}{n_1})$  取值在其它区间时的形式解析解, 可通过消去普遍式中不应存在的式子获得。

首先, 为了简化式子的表述, 先约定

$$\prod_{l=1}^s \{ \} = \prod_{l=1}^s \left\{ \left[ \frac{k}{n_1} + \left( \frac{n_2}{n_1} + 4 \right) l \right] \right. \\ \left. \left[ \frac{k}{n_1} + \left( \frac{n_2}{n_1} + 4 \right) l - 1 \right] \right. \\ \left. \left[ \frac{k}{n_1} + \left( \frac{n_2}{n_1} + 4 \right) l - 2 \right] \right. \\ \left. \left[ \frac{k}{n_1} + \left( \frac{n_2}{n_1} + 4 \right) l - 3 \right] \right\}$$

将式(6)和  $z = \xi^{\frac{1}{n_1}}$  代入  $y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r$  中去, 同时引入

$G = \alpha^{\frac{n_2}{n_1} + 4} (\Rightarrow \alpha = G^{\frac{1}{4 + \frac{n_2}{n_1}}})$ , 则整理后可得

$$y = a_0 \left[ 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{\prod_{l=1}^s \{ \} \Big|_{k=0}} (\alpha \xi)^{s(\frac{n_2}{n_1} + 4)} \right] + \\ \frac{a_{n_1}}{\alpha} \left[ (\alpha \xi) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{\prod_{l=1}^s \{ \} \Big|_{k=n_1}} (\alpha \xi)^{s(\frac{n_2}{n_1} + 4) + 1} \right] + \\ \frac{a_{2n_1}}{\alpha^2} \left[ (\alpha \xi)^2 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{\prod_{l=1}^s \{ \} \Big|_{k=2n_1}} (\alpha \xi)^{s(\frac{n_2}{n_1} + 4) + 2} \right] + \\ \frac{a_{3n_1}}{\alpha^3} \left[ (\alpha \xi)^3 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{\prod_{l=1}^s \{ \} \Big|_{k=3n_1}} (\alpha \xi)^{s(\frac{n_2}{n_1} + 4) + 3} \right] \quad (7)$$

式(7)就是方程式(4)的幂级数形式通解。因为可以任意调整结果的精度, 所以也是推力桩三参数算法的解析解。且有  $\frac{1}{\alpha} \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d(\alpha \xi)}, \frac{1}{\alpha^2} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{d(\alpha \xi)^2}, \frac{1}{\alpha^3} \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d^3 y}{d(\alpha \xi)^3}$ 。

至于幂指数  $n$  取值在其它区间时, 可根据前文的讨论结果, 删去以  $a_{n_1}$  或  $a_{2n_1}$  或  $a_{3n_1}$  为首项建立的幂级数项就可以了。

### 1.3 对递推公式(5)的讨论

求解的关键性递推公式(5)为

$$a_{k+n_2+4n_1} = \frac{-G}{\left( \frac{k}{n_1} + \frac{n_2}{n_1} + 4 \right) \left( \frac{k}{n_1} + \frac{n_2}{n_1} + 3 \right)} \cdot \\ \frac{1}{\left( \frac{k}{n_1} + \frac{n_2}{n_1} + 2 \right) \left( \frac{k}{n_1} + \frac{n_2}{n_1} + 1 \right)} a_k \quad (5)$$

式中:  $k \in N, n_2 \in Z, n_1 \in N$ , 且  $n_1 \neq 0$ 。而且从前面的讨论可知, 只有当  $\frac{n_2}{n_1} > -4$  时, 方程式(4)才有解。而且由于只有  $a_0, a_{n_1}, a_{2n_1}, a_{3n_1}$  才可能有独立的非零解(如果可以取到的话), 所以  $k$  的值也只在取到  $0 + t(n_2 + 4n_1), n_1 + t(n_2 + 4n_1), 2n_1 + t(n_2 + 4n_1), 3n_1 + t(n_2 + 4n_1)$  的时候才有意义(式中  $t \in N$ ), 此时有

$$\frac{k}{n_1} = 0 + t \left( \frac{n_2}{n_1} + 4 \right), 1 + t \left( \frac{n_2}{n_1} + 4 \right), \\ 2 + t \left( \frac{n_2}{n_1} + 4 \right), 3 + t \left( \frac{n_2}{n_1} + 4 \right)$$

将之代入式(5)右边分母的各项因子中可知, 除去第一个因子  $\left( \frac{k}{n_1} + \frac{n_2}{n_1} + 4 \right)$  外, 其余三个因子都是有可能取到零值的。即, 当  $\frac{k}{n_1}$  与  $\frac{n_2}{n_1}$  满足某一特定关系时,

这后面三个因子中的一个会等于零。显然,在这种特定的可能的情况下,由于分母为零,式(5)是不能用做递推公式的。故可将它恢复到最初的等式状态,则有

$$\left(\frac{k}{n_1} + \frac{n_2}{n_1} + 4\right)\left(\frac{k}{n_1} + \frac{n_2}{n_1} + 3\right) \left(\frac{k}{n_1} + \frac{n_2}{n_1} + 2\right)\left(\frac{k}{n_1} + \frac{n_2}{n_1} + 1\right)a_{k+n_2+4n_1} = -Ga_k \quad (8)$$

可见,当式(8)的左边等于零的时候,由于它的右边的  $G = \frac{mb}{EI}$ , 是一个非零的正数,所以就只可能是  $a_k = 0$ , 而左边的  $a_{k+n_2+4n_1}$  是可以取非零值的,随着  $k$  值的增加,式(8)的左边必然会有非零值出现,此后就可以转化成递推公式(5),而此前的各项系数则均为零。

换而言之,就是在  $s\left(\frac{n_2}{n_1} + 4\right) = 1, 2, 3 (s \in N, \text{且 } s \neq 0)$  的特定情况下,依  $a_0, a_{n_1}, a_{2n_2}, a_{3n_3}$  (如果能取到的话)为首项建立的系数序列是依然存在的,只是前面的某几项在特定的  $\frac{k}{n_1}$  和  $\frac{n_2}{n_1}$  的情况下会取零值,然后才有某个非零系数出现,并可依次递推出其后的各项非零系数。这样以来,由于级数非零首项的变化,最终的解会与形式通解式(7)中的表述稍有不同,但仅限于个别级数项具体的书写形式而已,其规律性的本质是不变的。从而,不会影响到其求解方法和解的收敛性。在遇到这种情况时须特别注意。

### 2 三参数算法形式通解的收敛性

根据达朗贝尔(D'Alembert)判别法(即,比值审敛法)<sup>[7]</sup>,取式(7)的第一个级数式,有

$$\rho = \left| \frac{\text{第 } s \text{ 项}}{\text{第 } (s-1) \text{ 项}} \right| = \left| \frac{(-1)^s (\alpha\xi)^{s\left(\frac{n_2}{n_1}+4\right)} \prod_{l=1}^{s-1} \{\}}_{\prod_{l=1}^s \{\}} \cdot \frac{(-1)^{s-1} (\alpha\xi)^{(s-1)\left(\frac{n_2}{n_1}+4\right)}}{\prod_{l=1}^s \{\}} \right| = \left| \frac{(-1)}{\left[ \left\{ \frac{k}{n_1} + \left(\frac{n_2}{n_1} + 4\right)s \right\} \left[ \frac{k}{n_1} + \left(\frac{n_2}{n_1} + 4\right)s - 1 \right] \right]} \cdot \frac{(\alpha\xi)^{\left(\frac{n_2}{n_1}+4\right)}}{\left[ \frac{k}{n_1} + \left(\frac{n_2}{n_1} + 4\right)s - 2 \right] \left[ \frac{k}{n_1} + \left(\frac{n_2}{n_1} + 4\right)s - 3 \right]} \right|_{k=0}$$

在上式中,由于  $\alpha, \xi, \frac{n_2}{n_1}, k$  均为有限值,而  $s$  又在分母上,  $\therefore \lim_{s \rightarrow \infty} \rho = 0 < 1$ 。即,该级数不仅收敛而且是绝对收敛。同理,也可证明其余三个级数也是绝对收敛。从

而保证了通解式(7)良好的收敛性。

### 3 实例

三参数算法须结合桩底边界条件,以实测资料为拟合对象,引入桩顶挠度、转角、弯矩、剪力和桩身极大弯矩值及其所在的位置为拟合目标,进行各待定参数的计算。

算例选自莫汉(Mohan)和施赖佛斯特伐(Shrivastava)1971年所做的试桩实验资料<sup>[11]</sup>。基本资料如下:土壤数据见图3。钢管桩外径  $D = 10 \text{ cm}$ , 内径  $d = 9.1 \text{ cm}$ , 埋入深度  $L = 525 \text{ cm}$ , 刚度为  $3.2 \times 10^8 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2 \approx 3.136 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^2$ 。

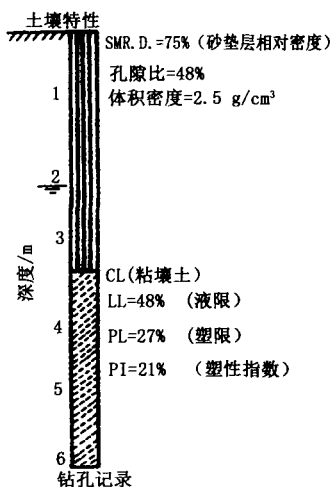


图3 莫汉试桩的土壤数据图

桩在地面处的载荷  $Q_0 = 4.90 \text{ kN}$ , 弯矩  $M_0 = 0$ 。

桩的挠度、转角(为了图示方便,图示转角值均乘了系数)、弯矩随着深度的变化分别见图4,5,6所示。图中标明了实测值和文献<sup>[12]</sup>的计算值(有限元法)。

按图示实测值取拟合边界条件和几何尺寸(均采用国际标准单位制)如下: $b = D = 0.1 \text{ m}$ ,  $L = 5.25 \text{ m}$ ;  $y_0 = 9 \times 10^{-3} \text{ m}$ ,  $\varphi_0 = -12 \times 10^{-3} \text{ rad}$ ,  $M_0 = 0$ ,  $Q_0 = 4.9 \times 10^3 \text{ N}$ ;  $x = 0.7 \text{ m}$  处;  $M_{\max} = 2.4 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$  桩底为非嵌岩。

经过试算有拟合结果如下: $n = 2.08$ ,  $x_0 = 0$ ,  $m = 1.2884 \times 10^8$ ,  $EI = 1.9458 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^2$ , ( $\frac{\text{计算刚度}}{\text{实际刚度}} \approx 62\%$ );

计算弯矩极大值在  $x = 0.7175 \text{ m}$  处  $M_{\max} = 2.4007 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$ , 桩顶挠度、转角、弯矩、剪力完全吻合(图4,5,6)。

从图6可以看出,三参数算法准确地拟合了桩身极大弯矩值及其所在的位置。弯矩极大值的误差非常微小,其所在坐标的误差也不到  $2 \text{ cm}$ 。而且,三参数算法的计算弯矩图与整个弯矩图的吻合效果也很好,

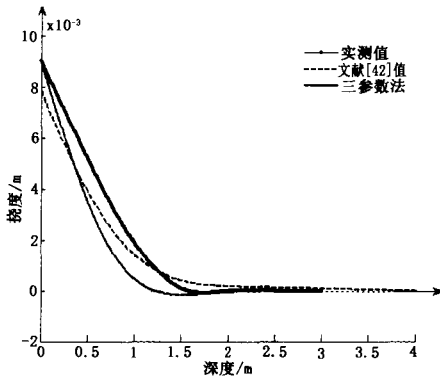


图4 莫汉试桩挠度

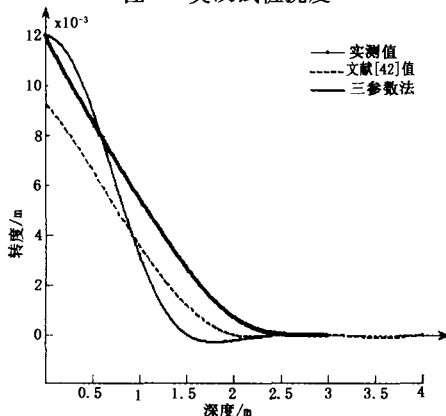


图5 莫汉试桩转角图

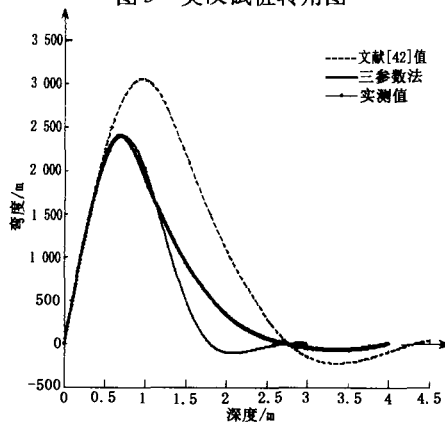


图6 莫汉试桩弯矩图

只是到了深度约 以后误差才逐渐加大,计算值要比实测值衰减的快一些。这表明三参数算法在此处的地基土抗力模数偏大,还有可以改进的地方,但这已经是远远地超过了前人的拟合效果。

图4、5则显示了三参数算法对挠度和转角的拟合效果,这些是前人理论算法所没有拟合过的。从图示可以看出,三参数算法对挠度和转角的拟合效果要优于文献[12]的拟合效果,但不如其对弯矩的拟合效果好。除了地面处以外,在其它坐标位置均有偏差。尤其是在曲线的尾部(靠近推力桩底端的部分),计算值的衰减明显快于实测值,表现出与弯矩图相一致的规律性,但曲线的趋势却与实测值比较一致。

## 4 结论

通过前文的推导,得出了推力桩三参数算法基本微分方程式(1)的幂级数形式通解式(7),给出了幂指数  $n$  的理论取值范围,并完成了对通解式(7)收敛性的判别。最后,作者给出了一个实测试桩的拟合实例。

三参数理论算法在总结吸收前人思想成果的基础上,不仅可以真正从形式上统一迄今为止前人所有的线弹性地基反力法,而且物理表达式更具一般性,理论推导过程也比前人更加严密,通解的收敛性也极好。

此外,由于采用了变参数的思想,取参数  $m$ 、 $x_0$ 、 $n$  和计算刚度  $EI$  都是随着工程地质差异和受荷状态的不同而变化的可变参数,都是通过实测资料的反演计算确定,从而突破了基本微分方程式(1)的线弹性地基反力法的形式上的束缚,在本质上有别于竹下淳<sup>[8]</sup>、王伯惠<sup>[9]</sup>的式子。而且,变参数的思想也使得三参数算法可以达到了很高的拟合精度,可以准确地拟合包括桩顶挠度、转角、弯矩、剪力和桩身极大弯矩值及其所在的位置在内的所有拟合目标,明显优于现有推力桩算法。

## 参考文献:

- [1] JTJ 254-98,港口工程桩基规范[S].
- [2] 韩理安.水平承载桩的计算[M].长沙:中南大学出版社,2004.
- [3] 王金海,许锡宾.推力桩的算法现状[J].土工基础,2006,(6):
- [4] 孙训方,方孝淑.材料力学(第三版)[M].北京:高等教育出版社,1994.
- [5] 河海大学等四校合编.水工钢筋混凝土结构学(第三版)[M].北京:中国水利水电出版社,1996.
- [6] 龙驭球,包世华.结构力学(上册)[M].北京:人民教育出版社,1980.
- [7] 同济大学数学教研室.高等数学(第四版)(下册)[M].北京:高等教育出版社,2001.
- [8] 竹下淳.横荷重を受け有限長クイの数値解法[J].土木技术,1969,24(5):32-46.
- [9] 王伯惠,上官兴.中国钻孔灌注桩新发展[M].北京:人民交通出版社,2001.
- [10] Winkler, E.. Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit [M]. Prag, 1867.
- [11] Mohan D., Shrivastava S. P. Nonlinear Behaviours of Single Vertical Pile Under Lateral Loads 3rd Annual Offshore Teh [J]. Conf, Houston Vol. 2 Paper OTC 1485: 677 - 684, 1971.
- [12] Poulos H. G., Davis E. H. Pile Foundation Analysis and Design[J]. Jone wiley and Sons. 1980,225 - 228.