

Mises 屈服条件下简支环板的塑性极限荷载*

蒋朝志, 刘 东

(重庆大学 土木工程学院, 重庆 400045)

摘要:在 Mises 屈服条件下,求解了外边简支内边自由环板和内外边均简支环板在均布荷载作用下的塑性极限荷载。Mises 屈服条件是非线性的,文中采用加权残值法进行求解,得出了极限荷载下限解简洁的计算公式,并比较了 Mises 条件与最大极限弯矩条件的数值结果,结果是合理的。

关键词:简支环板; Mises 屈服条件; 加权残值法; 极限荷载

中图分类号:TU302 **文献标志码:**A **文章编号:**1006-7329(2007)04-0087-03

Plastic Limit Load of Simply-Supported Annular Plates Based on Mises Yield Condition

JIANG Chao-zhi, LIU Dong

(College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, China)

Abstract: In this paper, on basis of Mises yield condition, the plastic limit load of annular plate with simply support under uniformly distributing load is evaluated. Because of the nonlinearity of the Mises yield condition, the weighted residual method is employed to gain the results. A simple formula for calculating the plastic limit load has been worked out. Compared with the results based on maximum moment condition, the numerical results in this paper are reasonable.

Keywords: annular plate; Mises yield condition; weighted residual method; limit load

环板是一种常见的结构型式,在环板某一点进入屈服后,仍可以继续承受更大的荷载,直至达到塑性极限状态进而演变成机构。因此,对于环板来说,考虑塑性设计将比弹性设计节约材料,更能充分发挥材料的功能(对塑性性能较好的材料尤为显著)。为了确定塑性设计时实际的安全程度,找出环板的塑性极限承载能力是必要的。

对于环板的塑性极限分析,一般采用最大极限弯矩条件^[1],但对于一些金属材料,Mises 屈服条件更符合试验结果。实际上,Mises 屈服条件是双剪统一屈服准则^[4]中间剪应力系数 $b=0.5$ 的一个特例,因此可以求得双剪统一屈服准则下的极限荷载,普遍适用各种拉压强度相同的材料。但由于环板的极限内力分布复杂,将处于双剪统一屈服准则的好几条屈服线上,计算较繁杂^[6]。而采用 Mises 屈服条件,并结合加权残值法,使得得到一个简洁的极限荷载计算式成为可能。目前已经得到一些环板在 Mises 屈服条件下的结果^{[3][4]},但尚未见到 Mises 条件下外边简支内边自由以及内外均有支承环板的结果。本文对这两种情况进

行了分析。

在整个分析过程中,假定环板的材料是理性刚塑性的。Mises 屈服条件是非线性的,文中采用了加权残值法^[2]进行分析。

1 外边简支环板在均布荷载作用下的塑性极限荷载

环板的几何属性及荷载情况如图 1 所示。内外半径分别为 a, b , P 为均布荷载集度。

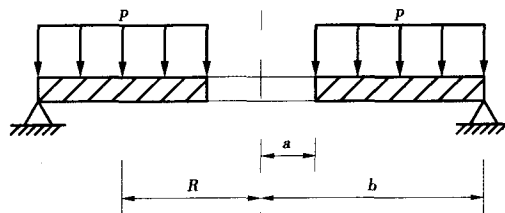


图 1 外边简支环板与荷载示意图

定义无量纲量; $m_r = \frac{M_R}{M_0}$, $m_\theta = \frac{M_\theta}{M_0}$, $r = \frac{R}{b}$, $p = \frac{Pb^2}{M_0}$, $\beta = \frac{a}{b}$, 其中 M_0 为塑性极限弯矩。

* 收稿日期:2007-02-01

作者简介:蒋朝志(1982-),男,四川人,硕士,主要从事结构塑性极限分析研究。

环板的无量纲化平衡方程为^[1]:

$$\frac{d(m_r)}{dr} - m_\theta = -\frac{r^2 - \beta^2}{2} p \quad (1)$$

无量纲化的 Mises 屈服条件为:

$$m_r^2 - m_r m_\theta + m_\theta^2 = 1 \quad (2)$$

该环板的边界条件为:

$$\begin{cases} m_r(\beta) = m_r(1) = 0 \\ m_\theta(\beta) = m_\theta(1) = 1 \end{cases} \quad (3)$$

选取如下形式的试函数:

$$\begin{cases} m_r = k_1(r - \beta)(r - 1) \\ m_\theta = k_2(r - \beta)(r - 1) + 1 \end{cases} \quad (4)$$

其中 k_1, k_2 为待定常数,显然,(4)式满足边界条件(3)。

将(4)分别代入(1)和(2)得余量:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{d(m_r)}{dr} - m_\theta + \frac{r^2 - \beta^2}{2} p \\ &= k_1[3r^2 - 2(1 + \beta)r + \beta] - \\ &\quad k_2[r^2 - (1 + \beta)r + \beta] + \frac{p}{2}(r^2 - \beta^2) - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2 &= m_r^2 - m_r m_\theta + m_\theta^2 - 1 \\ &= (k_1^2 - k_1 k_2 + k_2^2)(r - \beta)^2 (r - 1)^2 \end{aligned}$$

利用加权残值法的子域法消除余量。

由 $\int_{\beta}^1 R_1 dr = 0$, 可得:

$$k_2(1 - \beta)^2 - p(2\beta^2 - \beta - 1) - 6 = 0 \quad (5)$$

由 $\int_{\beta}^1 R_2 dr = 0$, 可得:

$$(k_1^2 - k_1 k_2 + k_2^2)(1 - \beta)^2 - 5(2k_2 - k_1) = 0 \quad (6)$$

联立(5)、(6)消去 k_2 , 有:

$$\begin{aligned} &(1 - \beta)^2 k_1^2 - k_1(2p\beta^2 - p\beta - p + 1) + \\ &\frac{(2p\beta^2 - p\beta - p + 6)(2p\beta^2 - p\beta - p - 4)}{(1 - \beta)^2} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

在这个式子中,要使 p 取得极值,则要求 $\frac{dp}{dk_1} = 0$, 解得:

$$k_1 = \frac{2p\beta^2 - p\beta - p + 1}{2(1 - \beta)^2} \quad (8)$$

将(8)式代入(7)式,可得到如下方程:

$$3(1 - \beta)^2(2\beta + 1)^2 p^2 - 6(1 - \beta)(2\beta + 1) - 97 = 0 \quad (9)$$

解这个一元二次方程,并取较大的一个解即得到塑性极限荷载下限解:

$$p = \frac{3 + 10\sqrt{3}}{3(1 - \beta)(2\beta + 1)} \quad (10)$$

2 内外边简支环板在均布荷载作用下的塑性极限荷载

设有如图 2 所示作用了均布荷载的内外边简支环

板。

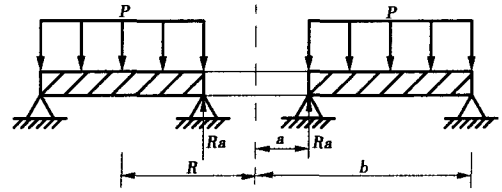


图 2 内外边简支环板及荷载示意图

无量纲化的平衡方程为:

$$\frac{d(m_r)}{dr} - m_\theta = R_0 - \frac{r^2 - \beta^2}{2} p \quad (11)$$

其中: $R_0 = \frac{aR_a}{M_0}$ 。

无量纲化的 Mises 屈服条件仍为式(2)。

此时,环板的边界条件为:

$$\begin{cases} m_r(\beta) = m_r(1) = 0 \\ m_\theta(\beta) = -1, m_\theta(1) = 1 \end{cases} \quad (12)$$

不妨设如下试函数:

$$\begin{cases} m_r = k_1(r - \beta)(r - 1) \\ m_\theta = k_2(r - \beta)(r - 1) - \cos \frac{\pi(r - \beta)}{1 - \beta} \end{cases} \quad (13)$$

其中: k_1, k_2 为待定常数,显然,此试函数满足边界条件(12)。

将式(13)代入(11)式得:

$$\begin{aligned} &k_1[3r^2 - 2(1 + \beta)r + \beta] - k_2(r - \beta)(r - 1) + \\ &\cos \frac{\pi(r - \beta)}{1 - \beta} = R_0 - \frac{r^2 - \beta^2}{2} p \end{aligned} \quad (14)$$

对于式(14),当 $r = \beta$ 时,可以得到:

$$k_1\beta(\beta - 1) + 1 = R_0 \quad (15)$$

当 $r = 1$ 时,可以得到:

$$k_1(1 - \beta) - 1 = R_0 - \frac{1 - \beta^2}{2} p \quad (16)$$

由(15)、(16)消去 k_1 , 得到:

$$R_0 = \frac{2(1 - \beta) + (1 - \beta^2)\beta p}{2(1 + \beta)} \quad (17)$$

将式(13)分别代入平衡方程(11)和 Mises 屈服条件(2)得余量:

$$\begin{aligned} R_3 &= \frac{d(m_r)}{dr} - m_\theta - R_0 + \frac{r^2 - \beta^2}{2} p \\ &= k_1[3r^2 - 2(1 + \beta)r + \beta] - k_2(r - \beta)(r - 1) + \\ &\quad \cos \frac{\pi(r - \beta)}{1 - \beta} - R_0 + \frac{r^2 - \beta^2}{2} p \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} R_4 &= m_r^2 - m_r m_\theta + m_\theta^2 - 1 \\ &= (k_1^2 - k_1 k_2 + k_2^2)(r - \beta)^2 (r - 1)^2 + \\ &\quad (k_1 - 2k_2)(r - \beta)(r - 1) \cos \frac{\pi(r - \beta)}{1 - \beta} + \\ &\quad \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi(r - \beta)}{1 - \beta} - \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (19)$$

利用加权残值法中的子域法消除余量。

由 $\int_{\beta}^1 R_3 dr = 0$, 有:

$$k_2(1-\beta)^2 - 6R_0 + p(1+\beta+\beta^2) - 3\beta^2 p = 0 \quad (20)$$

由 $\int_{\beta}^1 R_4 dr = 0$, 有:

$$(k_1^2 - k_1 k_2 + k_2^2)(1-\beta)^4 - 15 = 0 \quad (21)$$

联立(20)、(21)消去 k_2 , 得到:

$$(1-\beta)^4 k_1^2 - k_1(1-\beta)^2(2\beta^2 p - \beta p - p + 6R_0) + (2\beta^2 p - \beta p - p + 6R_0)^2 - 15 = 0 \quad (22)$$

由 $\frac{dp}{dk_1} = 0$ 可得:

$$k_1 = \frac{2\beta^2 p - \beta p - p + 6R_0}{2(1-\beta)^2} \quad (23)$$

将(17)、(23)式代入(22), 得到如下方程式:

$$(1+\beta)^2(1-\beta)^4 p^2 - 12(2-\beta)(1+\beta)(1-\beta)^2 p + 16\beta^2 - 184\beta + 124 = 0 \quad (24)$$

求解二次方程(24), 并取较大的一个根, 得到塑性极限荷载的下限解:

$$p = \frac{6(2-\beta) + 2\sqrt{5}(1+\beta)}{(1+\beta)(1-\beta)^2} \quad (25)$$

3 结果的分析比较

通过 Mises 屈服条件分析了两种支承情况的环板, 求出了其塑性极限荷载。

1) 对于均布荷载作用下外边简支环板(图 1), 本文所得极限荷载为式(10), 若采用最大弯矩极限条件, 其极限荷载为^[1]:

$$p = \frac{6}{(1+2\beta)(1-\beta)} \quad (26)$$

由(26)式和(10)式分别计算出随 β 变化的无量纲化的极限荷载 p , 示于表 1。

表 1 外边简支环板的极限荷载 p

β	0.2	0.4	0.6	0.8
最大弯矩条件的解	5.357	5.556	6.818	11.539
基于 Mises 的解	6.048	6.272	7.697	13.026

2) 对于均布荷载作用下内外边简支环板(图 2), 本文所得极限荷载为式(25), 该结果与最大弯矩极限条件的解^[1]在表 2 进行了比较。

表 2 内外边简支环板的极限荷载 p

β	0.2	0.4	0.6	0.8
最大弯矩条件的解	19.478	30.660	61.579	221.416
基于 Mises 的解	21.050	31.470	60.763	211.803

从前面的结果中可以看出: 对于外边简支环板, 本文所得 Mises 屈服条件的解稍大于最大弯矩极限条件, 其计算结果趋于合理; 对于内外边简支的环板, 本文给出了一个很简洁的计算极限荷载的公式, 避免了最大弯矩极限条件解答中解高次方程的不便^[1], 更符合工程应用, 且其结果也是合理的。

参考文献:

[1] 徐秉业, 刘信声. 结构塑性极限分析[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1985.
 [2] 徐次达. 固体力学加权残值法[M]. 上海: 同济大学出版社, 1987.
 [3] 刘福林. 用 Mises 条件求内边固支环板的极限荷载[J]. 工程力学, 2003, 20(1): 162-165.
 [4] 刘福林, 赵颖. 用 Mises 屈服条件求内边界简支环板在线性荷载作用下的极限荷载[J]. 计算力学学报, 2003, 20(4): 504-507.
 [5] 俞茂宏. 双剪理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1998.
 [6] 魏学英, 俞茂宏. 环形板的塑性极限统一解[J]. 机械强度, 2002, 24(1): 140-143.

(编辑 王秀玲)

(上接第 82 页)

参考文献:

[1] 孙立军. 沥青路面结构行为理论[M]. 北京: 人民交通出版社, 2005.
 [2] 沙庆林. 高速公路沥青路面早期破坏现象及预防[M]. 北京: 人民交通出版社, 2001.
 [3] 胡小弟. 轮胎接地压力分布实测及沥青路面力学响应分析[D]. 上海: 同济大学, 2003.
 [4] 杨阳. 高速公路沥青路面结构剪应力三维有限元分析

[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2005.
 [5] 董泽蛟. 多孔介质理论下饱水沥青路面动力响应分析[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2006.
 [6] PINTO PAULO. Coupled Finite Element Formulations for Dynamic Soil-Structure Interaction[D]. Ph. D. Dissertation, University of Florida, Gainesville, 1998.
 [7] ADINA R & D, Inc. Theory and Modeling Guide - Volume III: ADINA-FRCR. Report ARD03-9, 2003.

(编辑 胡玲)