

时空守恒元和解元法在山区河流模拟中的应用*

张永祥¹, 陈景秋¹, 文岑^{1,2}, 王江¹

(1. 重庆大学 工程力学系, 重庆 400044; 2. 重庆交通大学 西南水运工程研究所, 重庆 400012)

摘要: 针对山区河流边界和地形复杂, 水位和流速变化剧烈, 主流和副流明显的特点, 建立了一种新的平面二维水动力数学模型: 采用一种新的数值方法——时空守恒元和解元方法(简称: CE/SE 方法)并用任意四边形网格来离散区域, 进行了水位和流速的数值模拟。模型利用嘉陵江草街—嘉陵江河口全长约 69km 的地形和实测资料进行了验证。模拟结果表明, 该数学模型能够较好地模拟复杂条件下山区河流的流场特征。

关键词: 山区河流; 时空守恒元和解元方法; 二维浅水方程组; 数学模型

中图分类号: TV 143 **文献标志码:** A **文章编号:** 1006-7329(2007)06-049-04

Numerical Simulation of 2-D Flow in the Mountain Rivers by Using Space-Time Conservation Element and Solution Element Scheme

ZHANG Yong-xiang¹, CHEN Jing-qi¹, WEN Cen^{1,2}, WANG Jiang¹

(1. Department of Engineering Mechanics, Chongqing University, Chongqing 400044, China; 2. Southwest Institute of Waterway Carriage, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400012, China)

Abstract: This paper presents a new horizontal two-dimensional hydraulics mathematic model. In this model, a new numerical scheme named the space-time Conservation Element/ Solution Element (CE/SE) is applied to solve 2-D shallow water equations in a quadrilateral grid. The proposed 2-D model was verified using field data from a 69km stretch of the Jialing River that runs from Caojie to an estuary section near Chongqing, P. R. China. It is proven that this new scheme simulates the hydraulics characteristics of mountain rivers with complex boundaries and topography very well.

Keywords: mountain river hydraulic characteristics; conservation element and solution element scheme; 2-D shallow water equations; fluvial numerical modeling

山区河流的水动力数值模拟可以预测各种条件下的河流水位和流速的变化情况, 为解决实际水利工程中诸如水资源开发、航道整治及水工建筑物优化设计等问题提供参考。由于山区河流特点, 对其进行数值模拟, 有特有的难度: 1) 山区河流边界和地形复杂, 内边界(如滩槽)多, 有限差分法简单地用一些直线边界来概化实际的曲线边界, 计算结果难以真实地复演实际流场; 而在平面上采用的边界拟合坐标又必须采用泊松方程生成网格, 致使计算繁琐。2) 山区河流水位坡降变化大, 流速变化剧烈, 若采用微分方程致使求解不易稳定^[1,2]。

时空守恒元和解元方法(简称: CE/SE 方法)是在

1995 年首先由 S. C. Chang 提出的一种全新的数值方法^[3], 该方法无论从概念上还是从构造方法上都与传统的数值方法(有限差分法, 有限元法, 有限体积法等)不同, 具有其独特的优点: 首先, 其构造思想简单, 物理意义清晰, 格式通用性好, 它不用求解黎曼问题, 也不用求解特征问题。其次, 它把时间与空间完全统一同等对待, 并从积分守恒型方程出发, 通过设立守恒元和解元, 使局部和全局都严格保证其物理意义上的守恒。第三, 该方法把流场变量和其对空间导数均作为变量同时求解, 这样与传统的差分格式相比, 更便于边界条件的精确实现^[4,5]。此方法在水动力方面的应用才刚起步, 作者曾经应用此方法在结构网格上数值模拟了

* 收稿日期: 2007-06-21

基金项目: 国家自然科学基金项目(编号: 10472136)

作者简介: 张永祥(1978-), 男, 讲师, 主要从事计算流体力学等方面的研究。

有关溃坝洪水波的问题^[6-8],取得了良好的结果。针对山区河流的特点,在以前的基础上采用基于任意四边形网格的 CE/SE 方法建立了一种全新的水动力数学模型,并引入了干湿点法来处理动边界的问题,取得了良好的结果。

1 平面二维数学模型的基本方程

二维非恒定浅水方程组的守恒格式为:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = S \quad (1)$$

式中 q, F, G, S 分别为:

$$q = [Z, hu, hv]^T \quad (2)$$

$$F = f^I + f^X \quad G = g^I + g^X \quad (3)$$

$$f^I = [hu, hu^2, huv]^T, g^I = [hv, huv, hv^2]^T \quad (4)$$

$$f^X = \left[0, -\nu_t \frac{\partial hu}{\partial x}, -\nu_t \frac{\partial hv}{\partial x} \right]^T, g^X = \left[0, -\nu_t \frac{\partial hu}{\partial y}, -\nu_t \frac{\partial hv}{\partial y} \right]^T \quad (5)$$

$$S = \left[0, -gh \frac{\partial Z}{\partial x} - ghS_{fx}, -gh \frac{\partial Z}{\partial x} - ghS_{fy} \right]^T \quad (6)$$

式中 Z 为水位; h 为水深, $h = Z - Z_0$; Z_0 为河床高程; u, v 分别为流速向量在 x 和 y 方向的分量(垂线平均值); g 为重力加速度; ν_t 为紊流粘性系数, 取为 αhu_* , $\alpha = 3 \sim 5$; u_* 为摩阻流速; S_{fx}, S_{fy} 为河床摩阻坡降在 x 和 y 方向的分量, 可由 Manning 公式计算, 即为:

$$S_{fx} = n^2 u \sqrt{u^2 + v^2} / h^{4/3}, S_{fy} = n^2 v \sqrt{u^2 + v^2} / h^{4/3} \quad (7)$$

其中 n 为 Manning 糙率系数, 由实测资料率定。方程组(1)中未加入风应力和 Coriolis 力。

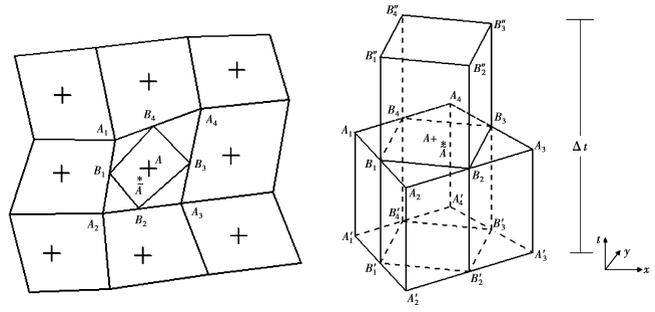
2 利用 CE/SE 方法离散基本方程组

令 $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = t$ 代表 Euclidean 空间 E3 中的三个坐标。利用 Gauss 散度定理可知, 微分方程组(1)可写成如下积分守恒型方程式:

$$\oint_{S(V)} H ds = \oint_V S dV \quad (8)$$

式中 $S(V)$ 是 E3 中任一区域的边界, $H = [q, F, G]^T$

CE/SE 方法的关键是设计守恒元(CE)和解元(SE), 不同的划分方法可得到不同的计算格式。所谓守恒元(CE)就是在时空中的某一小区域内要求积分方程式(8)成立, 则可把整个计算区域按一定要求划分成若干个相互不重叠的守恒元, 并要求积分方程(8)在每个守恒元内满足, 这样便可保证积分方程(8)在局部和全局均得到满足。所谓解元(SE)就是在每一网格点附近的一个微小区域内认为流场变量可以用简单函数(如泰勒级数)来近似。



(a) x-y 平面上的网格点布局 (b) 网格点 A 的解元和守恒元的设计

图 1 网格构造

在 CE/SE 方法中各个网点位置设计很自由, 它可以根据不同问题的具体要求来合理地进行网格布置。本文对以前建立的守恒元和解元进行了改进, 网格采用交错网格布置, 其中网格点为计算层的网格点, 相邻四点形成的四边形的质心作为半层网格, 作为过渡计算, 计算网格点为任意布置满足边界条件, 这样布置网格点使得计算网格点与周围九点信息有关。详细设计守恒元和解元如图一: 对于每一个网格点都有一个解元和一个守恒元与之对应, 其中对于 A 点的解元取图中的六面体 $B_1'B_2'B_3'B_4'B_1''B_2''B_3''B_4''$ 再加上四边形 $A_1A_2A_3A_4$, 而 A 点的守恒元则取为图中的六面体 $A_1'A_2'A_3'A_4'A_3A_2A_1$ 。由四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 形成的质心 \tilde{A} 作为 A 点的解点(注: \tilde{A} 一般与 A 不为同一点), 计算变量的信息都保存在解点上。在论文设计的网格中, 保证计算网格点与解点重合, 半层网格点和解点一般不重合。

在每一个解元中, 可以用不同函数 q_m^*, f_m^*, g_m^* 来逼近方程中相应的 q, F, G , 论文采用一阶泰勒级数展开式来进行逼近, 即在解元 $SE(A, n)$ 中, 取:

$$q_m^*(x, y, t; i, j, n) = (q_m)_{i,j}^n + (q_{mx})_{i,j}^n (x - x_i) + (q_{my})_{i,j}^n (y - y_j) + (q_m)_{i,j}^n (t - t^n) \quad (9)$$

$$f_m^*(x, y, t; i, j, n) = (f_m)_{i,j}^n + (f_{mx})_{i,j}^n (x - x_i) + (f_{my})_{i,j}^n (y - y_j) + (f_m)_{i,j}^n (t - t^n) \quad (10)$$

$$g_m^*(x, y, t; i, j, n) = (g_m)_{i,j}^n + (g_{mx})_{i,j}^n (x - x_i) + (g_{my})_{i,j}^n (y - y_j) + (g_m)_{i,j}^n (t - t^n) \quad (11)$$

$$S_m^*(x, y, t; i, j, n) = (S_m)_{i,j}^n \quad (12)$$

$$h_m^*(x, y, t; i, j, n) = (q_m^*(x, y, t; i, j, n), f_m^*(x, y, t; i, j, n), g_m^*(x, y, t; i, j, n)) \quad (13)$$

于是式(8)可以用下式来进行逼近:

$$\oint_{S(CE(V))} h_m^* ds = \oint_{CE(V)} S_m^* dV; \forall (i, j, n) \in \Omega \quad (14)$$

分别将 $q_m = q_m(x, y, t; i, j, n), f_m = f_m(x, y, t; i, j, n), g_m = g_m(x, y, t; i, j, n), S_m = S_m(x, y, t; i, j, n)$ 代入式(1)中得到:

$$(q_m)_{i,j}^n = -(f_{mx})_{i,j}^n - (g_{my})_{i,j}^n + (S_m)_{i,j}^n \quad (15)$$

由式(9)和(15)可知最终要求解的独立变量只有 q_m, q_{mx} 和 q_{my} 。

将式(9)、(10)、(11)、(12)代入式(13)然后一并代入式(14),经过适当整理便可以得到:

$$(q_m)_A^n - \frac{S_A}{\sum_{K=1}^4 S_k} S_A (S_m)_A^n = \left\{ \sum_{k=1}^4 \left[S_k (q_m + q_{mx}(x_{Dk} - x_{\bar{A}k}) + q_{my}(y_{Dk} - y_{\bar{A}k})) - (F(A_k; B_k) - F(A_k; B_{k+1}) - G(A_k; B_k) + G(A_k; B_{k+1})) \Delta t / 2 \right]^{n-1/2} \right\} / \sum_{K=1}^4 S_k \quad (16)$$

其中:

$$F(A, B)_D = (y_A - y_B) \{ f_m^I - \nu_t f_{mx}^X + f_{mx}^I [(x_A + x_B) / 2 - x_D] - f_{my}^I [(y_A + y_B) / 2 - y_D] + f_{mD}^I \Delta t / 4 \} \quad (17)$$

$$G(A, B)_D = (x_A - x_B) \{ g_m^I - \nu_t g_{my}^X + g_{mx}^I [(x_A + x_B) / 2 - x_D] + g_{my}^I [(y_A + y_B) / 2 - y_D] + g_{mD}^I \Delta t / 4 \} \quad (18)$$

式中: S_k 和 D_k ($k=1, 2, 3, 4$) 分别为四边形 $AB_1A_1B_1, AB_1A_2B_2, AB_2A_3B_3, AB_3A_3B_4$ 的面积和几何重心点。

由于基本变量 q_m 的空间梯度 q_{mx}, q_{my} 也作为基本变量,令 q_m 在两个不同时间半层的解元交接点 A_1, A_2, A_3, A_4 连续,则可以得到:

$$(q_{mx})_A^n = [(q_{mx})_A^n + (q_{mx})_A^n] / 2; (q_{my})_A^n = [(q_{my})_A^n + (q_{my})_A^n] / 2 \quad (19)$$

其中:

$$(q_{mx})_A^n = \{ [(q'_m)_{A1}^n - (q_m)_A^n] (y_{A3} - y_{\bar{A}}) - [(q'_m)_{A3}^n - (q_m)_A^n] (y_{A1} - y_{\bar{A}}) \} / L_1$$

$$(q_{mx})_A^n = \{ [(q'_m)_{A2}^n - (q_m)_A^n] (y_{A4} - y_{\bar{A}}) - [(q'_m)_{A4}^n - (q_m)_A^n] (y_{A2} - y_{\bar{A}}) \} / L_2$$

$$(q_{my})_A^n = \{ [(q'_m)_{A3}^n - (q_m)_A^n] (x_{A1} - x_{\bar{A}}) - [(q'_m)_{A1}^n - (q_m)_A^n] (x_{A3} - x_{\bar{A}}) \} / L_1$$

$$(q_{my})_A^n = \{ [(q'_m)_{A4}^n - (q_m)_A^n] (x_{A2} - x_{\bar{A}}) - [(q'_m)_{A2}^n - (q_m)_A^n] (x_{A4} - x_{\bar{A}}) \} / L_2$$

$$L_1 = (x_{A1} - x_{\bar{A}})(y_{A3} - y_{\bar{A}}) - (x_{A3} - x_{\bar{A}})(y_{A1} - y_{\bar{A}})$$

$$L_2 = (x_{A2} - x_{\bar{A}})(y_{A4} - y_{\bar{A}}) - (x_{A4} - x_{\bar{A}})(y_{A2} - y_{\bar{A}})$$

$$(q'_m)_{Ai}^n = \{ q_m + q_{mx}(x_{Ai} - x_{\bar{A}i}) + q_{my}(y_{Ai} - y_{\bar{A}i}) + q_{mD} \Delta t / 2 \}^{n-1/2}, i=1, 2, 3, 4$$

对于像山区河流水位坡降大,流速变化剧烈的情况,式(19)中的 $(q_{mx})_A^n$ 和 $(q_{my})_A^n$ 的计算式可以采用简单的加权平均来得到,即为:

$$(q_{mx})_A^n = W((q_{mx})_A^n, (q_{mx})_A^n, \alpha); (q_{my})_A^n = W((q_{my})_A^n, (q_{my})_A^n, \alpha) \quad (20)$$

其中 α 为一个可调指数,一般计算时取 $\alpha=1$ 或 $\alpha=2, W$ 为一个加权平均限制器,如下:

$$W(0, 0, \alpha) = 0$$

$$W(x^+, x^-, \alpha) = \frac{|x^+|^{\alpha} |x^-| + |x^-|^{\alpha} |x^+|}{|x^+|^{\alpha} + |x^-|^{\alpha}}$$

$$|x^-|^{\alpha} \neq 0$$

3 边界处理

实际计算中主要处理 3 类边界,分别为进出口边界,固体边界,动边界。

1) 进出口边界为上游给定流量过程边界,下游给定水位过程边界。

2) 固体边界则令其流速的法向流速梯度为零。

3) 动边界的处理,则令当计算网格点的水深 $h \leq 0$ 时,引入一个标准水深(如 $h=0.005$ m),令流速始终为零。

4 算例及模型验证

嘉陵江草街—嘉陵江河口段全长 68.2 km,有各类滩险 27 处,其中 12 个特危险滩群,边界地形复杂,水位比降大,河段流态变化大,论文利用以上数学模型对 2005 年 5 月 26 号和 7 月 8 号实测的水位作为验证数据,验证对比图见图 2。其中图 2(a)为上游进口流量为 $780 \text{ m}^3/\text{s}$,下游水位为 167.276 m,图 2(b)为上游进口流量为 $14250 \text{ m}^3/\text{s}$,下游水位为 177.747 m。

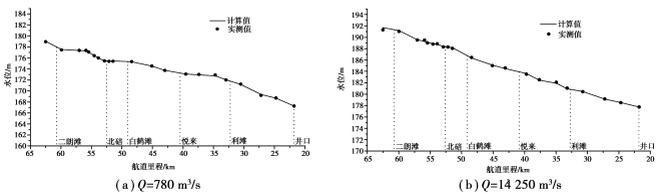


图 2 在两级流量下计算水位与实测值的对比图



图 3 二郎滩在两级流量下的流场图

图(3)一图(5)为嘉陵江计算河段 3 个主要的险滩在不同流量下的流场情况,从流场图可以看出,用本文建立的数学模型能较好的解决动边界的问题,与实际流场情况比较符合。

5 结论

基于时空守恒元和解元方法(CE/SE 方法)自行

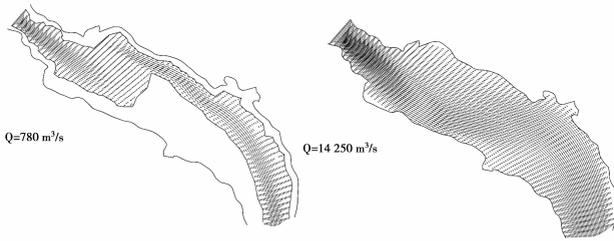


图4 桌王滩在两级流量下的流场图

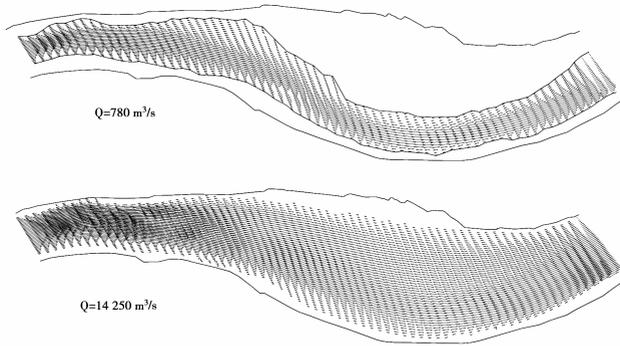


图5 金沙滩在两级流量下的流场图

编程,开发了一种新的平面二维水动力数学模型,通过对嘉陵江草街—嘉陵江河口的水动力数值模拟,模拟的计算结果与实测资料的对比表明,得到以下几点结论:

1)基于任意四边形建立的网格布局以及设立的守恒元和解元,能够适合在水动力方面的数值模拟的要求。

2)在计算中引入干湿点法能够很好的解决像嘉陵江这样地形复杂的动边界情况,并且计算结果稳定,收敛效果好。

3)基于时空守恒元和解元方法建立的新的平面二维水动力数学模型,第一次成功应用于山区河流的流场模拟,为这种方法开拓了一个新的应用领域,也给水动力学的研究和应用增加了一种新的数值模拟的方法。根据CE/SE方法的思想 and 原理,这种方法在水动力方面将有很大的应用前景。

参考文献:

[1] 王兴奎,邵学军,等.河流动力学[M].北京:科学出版社,2004:242—244.

WANG Xing-kui, SHAO Xue-jun, et al. river dynamics [M]. Beijing: Science Press, 2004: 242—244.

[2] 李艳红,周华君,时钟.山区河流平面二维流场的数值模拟[J].水科学进展,2003,14(7):424—429.

LI Yan-hong, ZHOU Hua-jun, SHI Zhong. 2-D Horizontal Numerical Modeling of Flow in the Mountain River[J]. Advances in water science, 2003, 14 (7): 424—429.

[3] S. C. Chang. The Method of Space-time Conservation Element and Solution Element—a New Approach for Solving the Navier-Stokes and Euler Equations [J]. Computational Physics, 1995, 119: 295—324.

[4] 张增产,沈孟育.改进的时空守恒元和解元方法[J].清华大学学报,1997,37(8):65—68.

ZHANG Zeng-chan, SHEN Meng-yu. Improved Scheme of Space-time Conservation Element and Solution Element [J]. Journal of Tsinghua University, 1997, 37(8): 65—68.

[5] 张增产,沈孟育.求解二维 Euler 方程的时—空守恒格式[J].力学学报,1999,31(2):152—157.

ZHANG Zeng-chan, SHEN Meng-yu. New space-time Conservation Schemes for Solving 2-D Euler Equation [J]. Acta mechanica sinica, 1999, 31(2): 152—157.

[6] 张永祥,陈景秋.用守恒元和解元法数值模拟二维溃坝洪水波[J].水利学报,2005,36(10):1 224—1 229.

ZHANG Yong-xiang, CHEN Jing-qiu. Numerical Simulation of 2-D Dam-break Wave by Using Conservation Element and Solution Element Method [J]. Chinese Journal of Hydraulic Engineering, 2005, 36 (10): 1 224—1 229.

[7] 陈景秋,张永祥,韦春霞.二维溃坝洪水波的演进绕流和反射的数值模拟[J].水利学报,2005, 36(5): 569—574.

CHEN Jing-qiu, ZHANG Yong-xiang, WEI Chun-xia. Numerical Simulation of Propagation Diffraction and Reflection of 2-D Dam-break Wave [J]. Chinese Journal of Hydraulic Engineering, 2005, 36(5): 569—574.

[8] 张永祥,陈景秋,韦春霞.一维溃坝洪水波的数值模拟—时空守恒法[J].重庆大学学报,2005,28(5):136—138.

ZHANG Yong-xiang, CHEN Jing-qiu, WEI Chun-xia. Simulation of One Dimension Dam-break Flow—Space-time Conservation Scheme [J]. Journal of Chongqing University.

(编辑 王秀玲)