

# 三维直角坐标系下分层地基的传递矩阵解

艾智勇, 吴超

(同济大学 地下建筑与工程系, 岩土及地下工程教育部重点实验室 上海 200092)

**摘要:**从直角坐标系下三维弹性力学问题的控制方程出发,构造出一组解耦变换,推导出非耦合的状态方程;利用二维 Fourier 变换以及 Cayley-Hamilton 定理得到了单层地基的传递矩阵;然后根据边界条件和层间结合条件利用矩阵传递技术,得出了多层地基在任意荷载作用下的传递矩阵解。编制了相应的程序,并将数值计算结果进行了比较和分析。计算结果表明:对弹性半无限体地基模型而言,结果与前人的结果是吻合的;而且土的分层性对土中位移有比较显著的影响。

**关键词:**解耦变换;状态方程;传递矩阵;多层地基;任意荷载

中图分类号:TU-443

文献标志码:A

文章编号:1006-7329(2008)02-0043-04

## Transfer Matrix Solutions for Multi-layered Soils in Rectangular Coordinate System

AI Zhi-yong, WU Chao

(Department of Geotechnical Engineering, Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092)

**Abstract:** Starting with the governing equations of three-dimensional elasticity problems in rectangular coordinate system, constructing a decoupled transform and getting the uncoupled state equations; the transfer matrix of a single soil layer is obtained by employing the double Fourier transform and Cayley-Hamilton theorem; after that, the transfer matrix method is applied to obtain the solutions of multi-layered elastic soils under arbitrary loads by use of the boundary conditions and the continuity conditions between layers. Numerical analysis is carried out by using the corresponding program based on the theory in this paper. The result shows that the results in this paper agree well with the existing solutions as for the elastic half-space mode; the characteristic of layered soil has a remarkable effect on displacement of the soil system.

**Key words:** decoupled transform; state equation; transfer matrix; multi-layered soils; arbitrary load

在外荷载作用下土中任意一点的应力和位移,一直是力学界及工程界所关心的课题。Boussinesq (1885)把土看成是均匀各向同性的弹性半无限体,并首次给出了土体在表面受竖向集中力时的应力和位移解,即 Boussinesq 解;这个解答自问世以来在近代土力学中得到了广泛的应用。Mindlin(1936)<sup>[1]</sup>推导出竖向和水平集中力作用在弹性半无限体内部某一深度处土中任一点的应力和位移解,该基本解广泛应用于桩的分析与计算中。袁聚云、赵锡宏(1995)<sup>[2]</sup>以 Mindlin 公式为依据,通过积分推导出竖向矩形均布

荷载作用在地基内部时土中应力分量的解析表达式。由于土是长期自然沉积形成的,因此一般是成层分布,而并非均匀的弹性体,这使得 Boussinesq 解和 Mindlin 解的使用有它的局限性。为此,许多学者<sup>[3~8]</sup>对分层土进行了研究。然而,就对分层土的计算而言,大多数的工作是在柱坐标系下完成的,而三维直角坐标系下的工作很少。实际工程中,有时采用三维直角坐标系来计算土中的应力及位移更为实用和方便,例如矩形区域作用矩形荷载作用下矩形中点及角点处土中应力及位移的计算等。为此,本文在直角坐标系下

\* 收稿日期:2007-12-28

基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 50578121)

作者简介:艾智勇(1966-),男,副教授,主要从事岩土及地下工程方面的研究工作,(Tel)021-65982201,(E-mail)zhiyongai@mail.tongji.edu.cn。

对分层地基进行分析和求解。

$$Y = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \tag{8}$$

1 单层地基的传递矩阵

$$Z = \sigma_z \tag{9}$$

所求问题的基本控制方程为：

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{1}$$

$$\sigma_{ij,i} = 0 \tag{2}$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{E}[(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij}] \tag{3}$$

式中： $E$  为土的弹性模量， $\nu$  为泊松比。

为推导方便，作如下变换：

$$U = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \tag{4}$$

$$V = \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \tag{5}$$

$$W = u_z \tag{6}$$

$$X = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \tag{7}$$

双重 Fourier 变换及逆变换定义为：

$$(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}) =$$

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (U, V, W, X, Y, Z) e^{-i(\xi_x x + \xi_y y)} dx dy \tag{10}$$

$$(U, V, W, X, Y, Z) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}) e^{i(\xi_x x + \xi_y y)} d\xi_x d\xi_y \tag{11}$$

从控制方程出发，并进行双重 Fourier 变换可得两个常微分方程组，写成矩阵形式如下：

$$\frac{d}{dz} [\bar{G}_1(\xi_x, \xi_y, z)] = A_1(\xi_x, \xi_y) \bar{G}_1(\xi_x, \xi_y, z) \tag{12}$$

$$\frac{d}{dz} [\bar{G}_2(\xi_x, \xi_y, z)] = A_2(\xi_x, \xi_y) \bar{G}_2(\xi_x, \xi_y, z) \tag{13}$$

式中：

$$\bar{G}_1(\xi_x, \xi_y, z) = [\bar{U}(z), \bar{Z}(z), \bar{X}(z), \bar{W}(z)]^T,$$

$$\bar{G}_2(\xi_x, \xi_y, z) = [\bar{V}(z), \bar{Y}(z)]^T,$$

$$A_1(\xi_x, \xi_y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \xi^2 & \xi^2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{E}{1-\nu^2} \xi^2 & \frac{\nu}{1-\nu} \xi^2 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{1-\nu} & \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2(\xi_x, \xi_y) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \\ \frac{E}{2(1+\nu)} \xi^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

其中： $\xi^2 = \xi_x^2 + \xi_y^2$ 。

由常微分方程理论，式(12)和(13)的解为：

$$\bar{G}_1(\xi_x, \xi_y, z) = \Phi(\xi_x, \xi_y, z) \bar{G}_1(\xi_x, \xi_y, 0) \tag{14}$$

$$\bar{G}_2(\xi_x, \xi_y, z) = \Psi(\xi_x, \xi_y, z) \bar{G}_2(\xi_x, \xi_y, 0) \tag{15}$$

$$\Phi(\xi_x, \xi_y, z) = e^{zA_1(\xi_x, \xi_y)},$$

$$\Psi(\xi_x, \xi_y, z) = e^{zA_2(\xi_x, \xi_y)}.$$

根据 Cayley-Hamilton 定理，可得到传递矩阵  $\Phi(\xi_x, \xi_y, z)$ ， $\Psi(\xi_x, \xi_y, z)$ 。

2 多层地基的传递矩阵解

如图 1 所示的  $n$  层土，荷载作用在多层地基内部，将力的作用面也看成一个分界面  $H_m$ 。边界条件(基底按固定边界处理)为：

$$z = 0 \text{ 时, } \bar{X} = \bar{Y} = \bar{Z} = 0 \tag{16}$$

$$z = H_n \text{ 时, } \bar{U} = \bar{V} = \bar{W} = 0 \tag{17}$$

多层地基的层间接触条件为：

$$\bar{G}_1(\xi_x, \xi_y, H_i^-) = \bar{G}_1(\xi_x, \xi_y, H_i^+) \tag{18}$$

$$\bar{G}_2(\xi_x, \xi_y, H_i^-) = \bar{G}_2(\xi_x, \xi_y, H_i^+) \tag{19}$$

式中： $\bar{G}_1(\xi_x, \xi_y, H_i^-)$  表示第  $i$  层上表面的量， $\bar{G}_1(\xi_x, \xi_y, H_i^+)$  表示第  $i$  层下表面的量，其余类同。

在力作用平面  $H_m$  上，作用荷载在  $x, y, z$  方向的分量为  $p(x, y, H_m)$ ， $r(x, y, H_m)$ ， $q(x, y, H_m)$ ，于

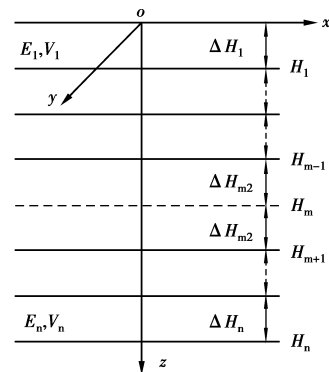


图 1 多层地基

是有：

$$\bar{G}_1(\xi_x, \xi_y, H_m) = \bar{G}_1(\xi_x, \xi_y, H_m^+) - \{P\}_{4 \times 1} \tag{20}$$

$$\bar{G}_2(\xi_x, \xi_y, H_m) = \bar{G}_2(\xi_x, \xi_y, H_m^+) - \{Q\}_{2 \times 1} \tag{21}$$

式中： $\{P\}_{4 \times 1} = [0, \bar{q}, \bar{p}_x + \bar{r}_y, 0]^T$ ， $\bar{q}$  为  $q(x, y, H_m)$  傅立叶变换后的量， $\bar{r}_x$  为  $r(x, y, H_m)$  对  $x$  求偏导再进行傅立叶变换后的量， $\{Q\}_{2 \times 1} = [0, \bar{p}_y - \bar{r}_x]^T$ ，其余类同。

从底面开始，按照层间接触条件逐层递推得到：

$$\bar{G}_1(\xi_x, \xi_y, H_n^-) = [f_{1ij}]_{4 \times 4} \bar{G}_1(\xi_x, \xi_y, 0) - [s_{1ij}]_{4 \times 4} \{P\}_{4 \times 1} \tag{22}$$

$$\bar{G}_2(\xi_x, \xi_y, H_n^-) = [f_{2ij}]_{2 \times 2} \bar{G}_2(\xi_x, \xi_y, 0) - [s_{2ij}]_{2 \times 2} \{Q\}_{2 \times 1} \tag{23}$$

式中：

$$\begin{aligned}
[f_{1ij}]_{4 \times 4} &= \Phi(\xi_x, \xi_y, \Delta H_n) \dots \Phi(\xi_x, \xi_y, \Delta H_1), \\
[s_{1ij}]_{4 \times 4} &= \Phi(\xi_x, \xi_y, \Delta H_n) \dots \Phi(\xi_x, \xi_y, \Delta H_{m2}), \\
[f_{2ij}]_{2 \times 2} &= \Psi(\xi_x, \xi_y, \Delta H_n) \dots \Psi(\xi_x, \xi_y, \Delta H_1), \\
[s_{2ij}]_{2 \times 2} &= \Psi(\xi_x, \xi_y, \Delta H_n) \dots \Psi(\xi_x, \xi_y, \Delta H_{m2}).
\end{aligned}$$

其中,  $\Delta H_i = H_i - H_{i-1}$ ,  $\Delta H_{m2} = H_{m+1} - H_m$ 。

结合边界条件和式 (22) 和 (23) 可求得  $\bar{G}_1(\xi_x, \xi_y, 0)$ ,  $\bar{G}_2(\xi_x, \xi_y, 0)$ ,  $\bar{G}_1(\xi_x, \xi_y, H_n)$ ,  $\bar{G}_2(\xi_x, \xi_y, H_n)$ 。因此, 对于力作用面  $H_m$  以上的第  $i$  层内深度  $z$  处的点, 从深度  $z$  处向上递推得到:

$$\bar{G}_1(\xi_x, \xi_y, z) = [a_{1ij}]_{4 \times 4} \bar{G}_1(\xi_x, \xi_y, 0) \quad (24)$$

$$\bar{G}_2(\xi_x, \xi_y, z) = [a_{2ij}]_{2 \times 2} \bar{G}_2(\xi_x, \xi_y, 0) \quad (25)$$

式中:

$$[a_{1ij}]_{4 \times 4} = \Phi(\xi_x, \xi_y, z - H_{i-1}) \dots \Phi(\xi_x, \xi_y, \Delta H_1),$$

$$[a_{2ij}]_{2 \times 2} = \Psi(\xi_x, \xi_y, z - H_{i-1}) \dots \Psi(\xi_x, \xi_y, \Delta H_1).$$

同理, 对于力作用面以下的第  $i$  层内深度  $z$  处的点, 从深度  $z$  处向下递推得到:

$$\bar{G}_1(\xi_x, \xi_y, z) = [b_{1ij}]_{4 \times 4} \bar{G}_1(\xi_x, \xi_y, H_n) \quad (26)$$

$$\bar{G}_2(\xi_x, \xi_y, z) = [b_{2ij}]_{2 \times 2} \bar{G}_2(\xi_x, \xi_y, H_n) \quad (27)$$

式中:

$$[b_{1ij}]_{4 \times 4} = \Phi(\xi_x, \xi_y, z - H_i) \dots \Phi(\xi_x, \xi_y, -\Delta H_n),$$

$$[b_{2ij}]_{2 \times 2} = \Psi(\xi_x, \xi_y, z - H_i) \dots \Psi(\xi_x, \xi_y, -\Delta H_n).$$

对  $\bar{G}_1(\xi_x, \xi_y, z)$  和  $\bar{G}_2(\xi_x, \xi_y, z)$  进行双重 Fourier 逆变换, 即可求得  $z$  点所有应力和位移分量。

### 3 数值计算与算例

本文利用 10 点复合二维 Gauss 积分处理 Fourier 逆变换。当荷载为点荷载时, 在 Fourier 逆变换中有  $e^{i(\xi_x x + \xi_y y)}$  项, 这是一个振荡函数, 积分区间取的不当会导致结果不稳定。比较简单的处理方法是在函数的零点之间积分, 即步长取为  $\pi$  除以计算点  $x$  和  $y$  中的较大者; 当段数取到 20 时, 计算结果基本稳定。而当荷载为均布荷载或线荷载时, 逆变换中除了有  $e^{i(\xi_x x + \xi_y y)}$  项外, 还有  $\sin(\epsilon_x a)$ ,  $\sin(\epsilon_y b)$ ,  $\cos(\epsilon_x a)$  和  $\cos(\epsilon_y b)$ ; 此时, 步长的选取除了要考虑  $x$  和  $y$  外, 还需考虑荷载作用区域  $a$  和  $b$  的影响。有关含指数函数乘积项计算时的溢出问题的处理, 本文的处理方法与文献[8]的方法相同。

为了验证本文理论推导和数值方法的正确性, 本文分别计算了土体在竖向集中荷载和竖向矩形均布荷载作用下, 土中任意一点的竖向应力和位移, 并与已有解进行比较。以下  $x, y, z$  表示计算点的坐标,  $E, \nu$  分别为土的弹性模量和泊松比 ( $\nu=0.3$ ),  $F_z$  表示竖向集中力,  $q_z$  表示竖向矩形均布荷载,  $\sigma_z, u_z$  分别表示计算点的竖向应力和竖向位移。

#### 3.1 弹性半无限体内部深度 $h$ 处作用竖向集中荷载 $F_z$ 时的 Mindlin 课题

土中竖向应力和位移 (计算点取  $x=1, y=0$ ) 的

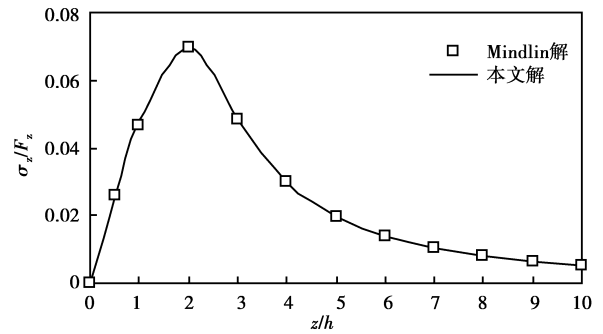


图 2 弹性半无限体内部作用竖向集中力时的竖向应力

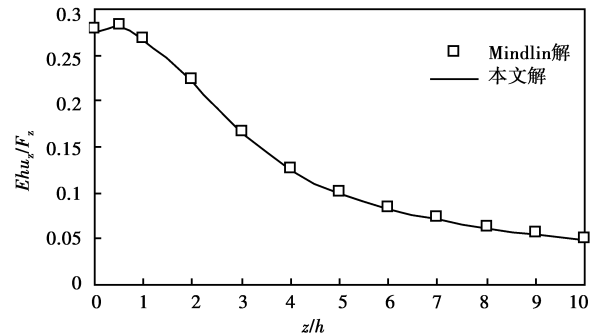


图 3 弹性半无限体内部作用竖向集中力时的竖向位移

计算结果见图 2 和图 3, 为了便于比较还给出了 Mindlin 解的计算结果。由图可见, 本文计算结果与 Mindlin 解的计算结果是十分吻合的, 这说明本文的理论与数值方法是正确的。

#### 3.2 弹性半无限体内部深度 $h$ 处作用竖向矩形均布荷载 $q_z$

土中竖向应力 (文献[2]仅给出了土中竖向应力的解, 本例中计算点取  $x=1, y=1$ ) 的计算结果见图 4。由图 4 可见, 本文计算结果与基于文献[2]的计算结果是十分吻合的, 这进一步说明了本文理论与数值方法的正确性。

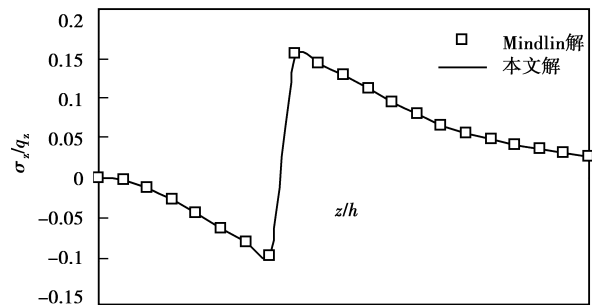


图 4 弹性半无限体内部作用竖向矩形均布荷载时的竖向应力

#### 3.3 4 层地基内部深度处 $h$ ( $h$ 取 1 m) 作用竖向矩形均布荷载 $q_z$

4 层地基的弹性模量、泊松比和厚度见表 1。图 5 为不同情况下 4 层地基土中的竖向位移 (计算点取  $x=1, y=1$ ), 其中情况 4、5 和 6 为均匀土层, 且其弹性模量分别是情况

1、2和3的加权平均值 ( $E = (\sum_{i=1}^4 E_i h_i) / \sum_{i=1}^4 h_i$ )。从图5可以看出:对情况1、2和3而言,虽然土的泊松比和厚度均相同,仅仅是弹性模量的分配不一样,但土中的竖向位移差别还是很大的,这说明了土的分层性对土中位移有比较显著的影响。

表1 四层地基的弹性模量、泊松比和厚度

土层编号	1	2	3	4
情况1的弹性模量	$E$	$2E$	$4E$	$8E$
情况2的弹性模量	$4E$	$2E$	$E$	$8E$
情况3的弹性模量	$2E$	$E$	$4E$	$8E$
泊松比	0.3	0.3	0.3	0.3
土层厚度	$7.5h$	$15h$	$30h$	$60h$

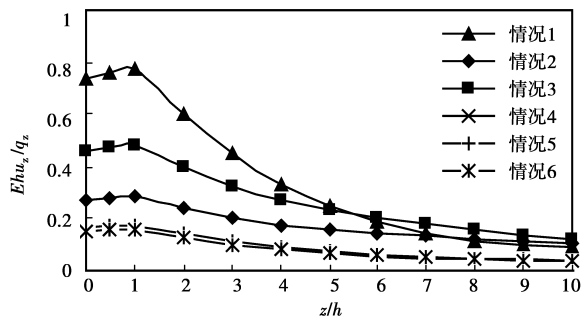


图5 不同情况下四层土内部作用  
竖向矩形均布荷载时的竖向位移

对分层地基的计算,传统的方法是将其看作均匀地基,并将弹性模量取加权平均值。为此,图5中也将本文方法与传统方法的计算结果进行了对比。由图5可见,情况4、5和6的竖向位移值比较接近,这是因为这3种情况下各自加权平均弹性模量值比较接近的缘故;另外,情况5的位移与相对应情况2的位移相比有较大的差别,而情况4、6的位移与相对应情况1、3的位移的差别就更加明显;这说明传统的用加权平均法计算分层土的弹性模量,并将其视为均匀地基来计算分层地基的方法是不合理的。

#### 4 结 论

从直角坐标系下三维弹性力学问题的控制方程出发,利用Fourier变换以及Cayley-Hamilton定理得到了单层地基的传递矩阵,然后根据边界条件和层间结合条件得出了多层地基在任意荷载作用下的传递矩阵解。由于不必引入应力函数而直接从弹性力学的控制方程出发,所以本方法概念清晰,推导过程易懂。此外,本文还编制了相应的程序,并将数值计算结果进行了分析和比较。对弹性半无限体地基模型而言,本文结果与前人的结果是吻合的,这就验证了本文理论与

数值计算方法的正确性。本文方法的突出优点是能够计算分层地基任意点的应力和位移;相应的计算结果表明土的分层性对土中位移有比较显著的影响,而传统的用加权平均法计算分层土的弹性模量,并将其视为均匀地基来计算分层地基的方法是不合理的。本文解答具有解析解的性质,易于编程,并具有较高的计算精度和速度,便于工程应用。

#### 参考文献:

- [1] Mindlin R D. Force at a point in the interior of a semi-infinite solid[J]. Physics, 1936, 7: 195.
- [2] 袁聚云, 赵锡宏. 竖向均布荷载作用在地基内部时的土中应力公式[J]. 上海力学, 1995, 16(3): 213-222.  
YUAN Ju-yun, ZHAO Xi-hong. Formulas for the calculation of stresses in soil subjected to distributed loading beneath the surface of the ground[J]. Shanghai Journal of Mechanics, 1995, 16(3): 213-222.
- [3] 王凯. N层弹性连续体系在圆形均布垂直荷载作用下的力学计算[J]. 土木工程学报, 1982, 15(2): 65-76.  
WANG Kai. stress and displacement analysis of a n-layer elastic-continuous system under vertical load uniformly distributed on a circular area[J]. China Civil Engineering Journal, 1982, 15(2): 65-76.
- [4] 王林生. 多层弹性体空间一般问题的解析解[J]. 河海大学学报, 1989, 17(5): 80-86.  
WANG Lin-sheng. Theoretical analysis of three dimensional layered elastic bodies[J]. Journal of Hohai University, 1989, 17(5): 80-86.
- [5] 钟阳, 王哲人, 郭大智. 求解多层弹性半空间轴对称问题的传递矩阵法[J]. 土木工程学报, 1992, 25(6): 37-42.  
ZHONG Yang, WANG Zhe-ren, GUO Da-zhi. The transfermatrix method for solving axisymmetrical problems in multilayered elastic half space[J]. China Civil Engineering Journal, 1992, 25(6): 37-42.
- [6] 钟阳, 王哲人, 郭大智, 等. 求解多层弹性半空间非轴对称问题的传递矩阵法[J]. 土木工程学报, 1995, 28(1): 66-72.  
ZHONG Yang, WANG Zhe-ren, GUO Da-zhi, et al. Transfer matrix method for solving non-axisymmetrical problems in multilayered elastic half space[J]. China Civil Engineering Journal, 1995, 28(1): 66-72.
- [7] 杨敏, 艾智勇. 多层地基内部作用竖向集中力时的广义Mindlin课题解[C]. 中国土木工程学会第八届土力学与基础工程学术讨论会, 南京, 1999.
- [8] Ai Z Y, Yue Z Q, Tham L G, et al. Extended sneddon and muki solutions for multilayered elastic materials[J]. International Journal of Engineering Science, 2002, 40: 1 453-1 483.

(编辑 王秀玲)