

边界单元法分析多层地基中的桩基础

艾智勇, 刘峰

(同济大学 地下建筑与工程系, 教育部岩土及地下工程重点实验室 上海 200092)

摘要:以层状弹性体内作用一竖向集中力时的广义 Mindlin 解作为边界单元法的基本解,应用间接边界单元法分析了层状弹性地基中的桩基础。编制了相应的计算程序,分别对弹性半无限体及分层地基中的桩基础进行了数值计算与分析,计算结果与已有结果吻合较好。将边界单元法与有限元软件 ABAQUS 的计算速度进行了对比,结果表明边界单元法的计算速度远快于有限单元法,便于在工程中推广。指出:各层土的弹性模量的准确确定是边界单元法在工程实际中推广应用的关键。

关键词:分层地基;广义 Mindlin 解;边界单元法;桩基础

中图分类号:TU473.1 文献标识码:A 文章编号:1006-7329(2008)04-0073-05

Pile Foundation Analysis Using a Boundary Element Method

AI Zhi-yong, LIU Feng

(Department of Geotechnical Engineering, Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, P. R. China)

Abstract: Taking the extended Mindlin solution of a vertical point load acting in the interior of a multi-layered elastic medium as the basic solution, an indirect boundary element method (BEM) was adopted to analyze pile foundations embedded in a multi-layered elastic soil. The numerical analysis was carried out by the compiled program for a pile foundation in an homogeneous soil and a pile foundation in a multi-layered soil. Reasonably good agreement is obtained between the present and existing solutions. Compared with the FEM software ABAQUS, the computational speed of BEM is much faster than that of FEM. Applying BEM in practice is convenient. It is pointed out that the exact measurement of elastic modulus is the key factor for applying BEM in geotechnical engineering.

Key words: multi-layered soil; extended Mindlin solution; boundary element method; pile foundation

桩基础能有效地提高地基承载力,控制地基沉降,应用日益广泛。目前,桩基础的分析方法主要有:荷载传递法、弹性理论法、有限单元法、边界单元法、混合法等。其中,荷载传递法由 Seed 和 Reese^[1]首先提出,随后许多学者对其进行了改进,荷载传递法简便直观,而且可以反应桩侧土的非线性,缺点是无法计算群桩效应,故不能直接用于群桩的分析;弹性理论法由 Poulos^[2-3]等人提出,可以用于群桩的分析,主要缺点是未考虑土的成层性、非线性;有限单元法可以考虑许多因素对桩基的影响,如土的非线性、固结时效性等,但其计算量大、对计算机要求较高,在群桩分析中采用较少;边界单元法仅需对桩土边界进行离散,计算量相

对较小,且可以考虑群桩效应,故用边界单元法进行桩基分析,有其特有的优越性。Butterfield 和 Banerjee^[4], Banerjee 和 Davis^[5-7]、Poulos 和 Davis^[8]、Mendonca 和 Pavia^[9]等先后采用边界单元法分析了桩土相互作用问题。

通常,边界单元法多以 Mindlin 解作为基本解,分析均匀各向同性弹性半无限体中的桩,对于多层地基中的桩,多采用近似方法。本文以层状弹性体内作用一竖向集中力时的广义 Mindlin 解^[10]作为边界单元法的基本解,用间接边界单元法分析多层弹性地基中的桩基础。

* 收稿日期:2008-01-05

基金项目:国家自然科学基金资助项目(50578121)

作者简介:艾智勇(1966-),男,同济大学副教授,博士,主要从事岩土及地下工程方面的研究。(E-mail)zhiyongai@mail.tongji.edu.cn

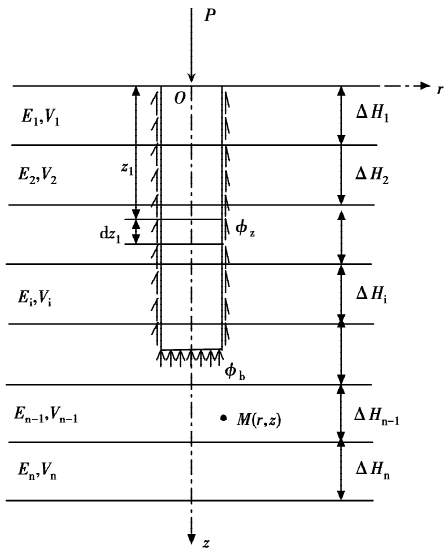


图 1 层状弹性地基中的轴向受荷单桩

1 单桩分析

首先考虑单桩情况。层状地基中的轴向受荷单桩如图 1 所示,假定桩长为 L ,半径为 a ,第 i 层土的弹性模量、泊松比、厚度分别为 $E_i, \nu_i, \Delta H_i$ 。本文采用间接边界单元法对桩土系统进行分析。由文献[4]知,当桩顶位移一定时,桩土径向位移协调对桩承载特性的影响可以忽略,故本文分析时忽略桩土径向位移协调。先假定一个虚应力系统(桩侧、桩端圆形线虚应力分别记为 ϕ_z, ϕ_b)作用于桩土界面,则在 ϕ_z, ϕ_b 作用下,引起土中任意点 $M(r, z)$ 的竖向位移为:

$$U_z(r, z) = \int_0^L \phi_z U_{zz}(a, z_1, r, z) dz_1 + \int_0^a \phi_b U_{bz}(r_1, L, r, z) dr_1 \quad (1)$$

式中: $U_{zi}(r, z)$ 为点 $M(r, z)$ 的竖向位移, $U_{zz}(a, z_1, r, z)$ 表示在 z_1 处作用半径为 a 的单位竖向圆形线荷载时,引起点 $M(r, z)$ 的竖向位移,可由层状弹性体内作用一竖向集中力时的广义 Mindlin 解积分求得,其具体表达式参见文献[11], $U_{bz}(r_1, L, r, z)$ 表示在 L 处作用半径为 r_1 的单位竖向圆形线荷载时,引起点 $M(r, z)$ 的竖向位移。

考虑桩土位移协调条件:

$$U_z(a, z) = f_z(a, z), U_z(r, L) = f_z(r, L) \quad (2)$$

式中: $f_z(a, z)$ 为预先假定的桩侧竖向位移, $f_z(r, L)$ 为桩端位移,其中 $r \leq a$ 。对刚性桩有: $f_z(a, z) = f_z(r, L) = \text{常数}$ 。将桩土位移协调条件代入(1)可得:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^L \phi_z U_{zz}(a, z_1, a, z) dz_1 + \int_0^a \phi_b U_{bz}(r_1, L, a, z) dr_1 &= f_z(a, z) \\ \int_0^L \phi_z U_{zz}(a, z_1, r, L) dz_1 + \int_0^a \phi_b U_{bz}(r_1, L, r, L) dr_1 &= f_z(r, L) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

方程(3)为关于 ϕ_z, ϕ_b 的积分方程,可以用数值方法求解。首先,把桩杆等分为 n 个单元,桩端划分为 m 个单元(即 m 个圆环),则桩杆第 i 个单元的竖向位移 $(U_z)_i$ 为:

$$(U_z)_i = \sum_{j=1}^n (\phi_z)_j (K_{zz})_{ij} + \sum_{j=1}^m (\phi_b)_j (K_{bz})_{ij} \quad (4)$$

式中: $i=1, 2, 3, \dots, n$, $(K_{zz})_{ij}$ 表示在桩杆 j 单元作用竖向虚应力时,引起桩杆 i 单元的竖向位移, $(K_{bz})_{ij}$ 类似。

同理,桩端第 i 个单元的竖向位移 $(U_b)_i$ 为:

$$(U_b)_i = \sum_{j=1}^n (\phi_z)_j (K_{zb})_{ij} + \sum_{j=1}^m (\phi_b)_j (K_{bb})_{ij} \quad (5)$$

式中: $i=1, 2, 3, \dots, m$, $(K_{zb})_{ij}$ 表示在桩杆 j 单元作用竖向虚应力时,引起桩端 i 单元的竖向位移, $(K_{bb})_{ij}$ 类似。

式(4)、(5)中 $(K_{zz})_{ij}, (K_{bz})_{ij}, (K_{zb})_{ij}, (K_{bb})_{ij}$ 的具体表达式如下:

$$(K_{zz})_{ij} = \int_{(j-1)A_1}^{jA_1} U_{zz}(a, z_1, a, z) dz_1 \quad (6a)$$

$$(K_{bz})_{ij} = \int_{(j-1)A_2}^{jA_2} U_{bz}(r_1, L, a, z) dr_1 \quad (6b)$$

$$(K_{zb})_{ij} = \int_{(j-1)A_1}^{jA_1} U_{zz}(a, z_1, r, L) dz_1 \quad (6c)$$

$$(K_{bb})_{ij} = \int_{(j-1)A_2}^{jA_2} U_{bz}(r_1, L, r, L) dr_1 \quad (6d)$$

式中: $A_1 = L/n, A_2 = a/m, z = \frac{iA_1 + (i-1)A_1}{2}$,

$$r = \frac{iA_2 + (i-1)A_2}{2}。$$

由式(4)、(5)可得:

$$U = K\Phi \quad (7)$$

式中: $U = [U_z, U_b]^T, \Phi = [\phi_z, \phi_b]^T, K = \begin{bmatrix} K_{zz} & K_{bz} \\ K_{zb} & K_{bb} \end{bmatrix}$ 。

所以,虚应力的表达式为:

$$\Phi = K^{-1}U \quad (8)$$

求得虚应力 ϕ_z, ϕ_b 后,用其即可求得任意点的实际应力、位移。例如,桩顶荷载 P 可用下式计算:

$$P = \sum_{i=1}^n (\phi_z)_i L/n + \sum_{j=1}^m (\phi_b)_j a/m \quad (9)$$

以上方法仅可求解刚性桩。对可压缩性桩,桩中的竖向正应力远大于其他应力,可近似认为:

$$\frac{\partial U_z}{\partial z} = -\frac{P_z}{A_p E_p} \quad (10)$$

式中: $A_p = \pi a^2, E_p$ 为桩的弹性模量, P_z 为深度为 z 处的桩的轴力。

假定桩顶位移已给出(如 $U_{z0} = 1$),由(10)可得如下差分方程:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{z1} \\ U_{z2} \\ U_{z3} \\ \vdots \\ U_{z(n-2)} \\ U_{z(n-1)} \\ U_{zn} \end{bmatrix} = \frac{-2L}{nE_p A_p} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_{n-2} \\ P_{n-1} \\ P_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中: U_{zi} 表示第 i 个单元底部的竖向位移, P_i 表示第 i 个单元底部的轴力。

从式(11)中解出 U_{zi} ,则第 i 个单元的竖向位移可近似表示为:

$$(U_z)_i = \frac{U_{z(i-1)} + U_{zi}}{2} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (12)$$

桩端的位移为:

$$(U_b)_i = U_{zn} \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (13)$$

通过多次迭代,即可获得式(8)的解。

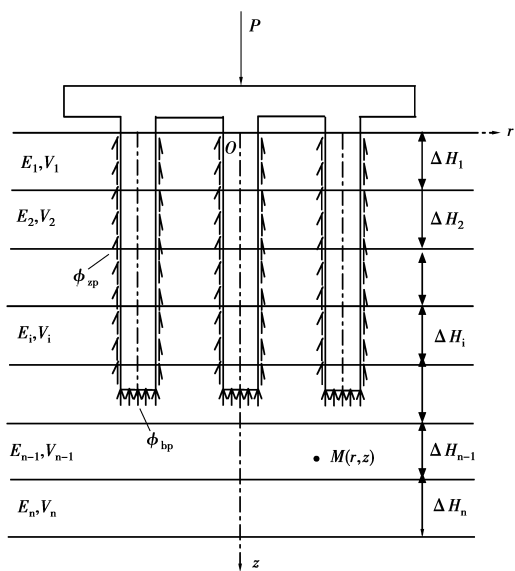


图 2 层状弹性地基中的轴向受荷群桩

2 群桩分析

对于单桩的分析可以直接推广到群桩,层状弹性地基中的轴向受荷群桩如图 2 所示,在分析中假定承台与土不接触。假设共有 N 根桩,并在群桩-土界面上作用一虚应力系统(记第 p 根桩上作用的圆形线虚应力为 ϕ_{zp}, ϕ_{bp}),则在这个虚应力系统作用下,土中任意点 $M(r, z)$ 的竖向位移为:

$$U_z(r, z) = \sum_{p=1}^N \left\{ \int_0^L \phi_{zp} U_{zzp}(a, z_1, r, z) dz_1 + \int_0^a \phi_{bp} U_{bzp}(r_1, L, r, z) dr_1 \right\} \quad (14)$$

式中: $U_{zqp}(a, z_1, r, z)$ 表示在第 p 根桩纵坐标为 z_1 处作用半径为 a 的单位竖向圆形线荷载时,引起点 $M(r, z)$ 的竖向位移; $U_{bzqp}(r_1, L, r, z)$ 表示在第 p 根桩 L 处作用半径为 r_1 的单位竖向圆形线荷载时,引起点 $M(r, z)$ 的竖向位移。

考虑桩土位移协调条件可得:

$$\left. \begin{aligned} f_{zq}(a, z) &= \sum_{p=1}^N \left\{ \int_0^L \phi_{zp} U_{zzqp}(a, z_1, r_{pq}, z) dz_1 + \int_0^a \phi_{bp} U_{bzqp}(r_1, L, r_{pq}, z) dr_1 \right\} \\ f_{zq}(r, L) &= \sum_{p=1}^N \left\{ \int_0^L \phi_{zp} U_{zbpq}(a, z_1, r_{pq}, L) dz_1 + \int_0^a \phi_{bp} U_{bbqp}(r_1, L, r_{pq}, L) dr_1 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中: r_{pq} 表示第 p 根桩与第 q 根桩轴线之间的距离; $U_{zzqp}(a, z_1, r_{pq}, z)$ 表示第 p 根桩纵坐标 z_1 处作用半径为 a 的单位竖向圆形线荷载所引起的第 q 根桩纵坐标 z 处点的竖向位移; $U_{bzqp}(r_1, L, r_{pq}, z)$ 表示第 p 根桩桩端作用半径为 r_1 的单位竖向圆形线荷载所引起的第 q 根桩纵坐标为 z 处点的竖向位移;其余类似。 $f_{zq}(r, z), f_{zq}(r, L)$ 分别为预先假定的第 q 根桩的桩侧与桩端竖向位移,对于刚性桩有: $f_{zq}(r, z) = f_{zq}(r, L) =$ 常数。

式(15)的离散形式为:

$$(U_{zq})_i = \sum_{p=1}^N \left\{ \sum_{j=1}^n (\phi_{zp})_j (K_{zzqp})_{ij} + \sum_{j=1}^m (\phi_{bp})_j (K_{bzqp})_{ij} \right\} \quad (16)$$

$$(U_{bq})_i = \sum_{p=1}^N \left\{ \sum_{j=1}^n (\phi_{zp})_j (K_{zbqp})_{ij} + \sum_{j=1}^m (\phi_{bp})_j (K_{bbqp})_{ij} \right\} \quad (17)$$

式中: $(U_{zq})_i$ 表示第 q 根桩上第 i 个单元的竖向位移, $(U_{bq})_i$ 表示第 q 根桩桩端第 i 个单元的竖向位移; $(K_{zzqp})_{ij}$ 表示在第 p 根桩的 j 单元作用竖向虚应力时,引起第 q 根桩的 i 单元的竖向位移, $(K_{bzqp})_{ij}, (K_{zbqp})_{ij}, (K_{bbqp})_{ij}$ 类似,其具体表达式如下:

$$(K_{zzqp})_{ij} = \int_{(j-1)A_1}^{jA_1} U_{zzqp}(a, z_1, r_{pq}, z) dz_1 \quad (18a)$$

$$(K_{bzqp})_{ij} = \int_{(j-1)A_2}^{jA_2} U_{bzqp}(r_1, L, r_{pq}, z) dr_1 \quad (18b)$$

$$(K_{z_{bq}})_{ij} = \int_{(j-1)A_1}^{jA_1} U_{z_{bq}}(a, z_1, r_{pq}, L) dz_1 \quad (18c)$$

$$(K_{b_{bq}})_{ij} = \int_{(j-1)A_2}^{jA_2} U_{b_{bq}}(r_1, L, r_{pq}, L) dr_1 \quad (18d)$$

式中： $A_1=L/n, A_2=a/m, z=\frac{iA_1+(i-1)A_1}{2}$,

当 $p=q$ 时, $r_{pq}=\frac{iA_2+(i-1)A_2}{2}$ 。

将(16)、(17)写成矩阵形式：

$$U = K\Phi \quad (19)$$

其余分析与单桩类似。

3 算例与分析

根据上述分析方法,用 C++ 语言编写了相应的计算程序。利用该程序,分别对弹性半无限体及分层地基中的桩基础进行了计算。

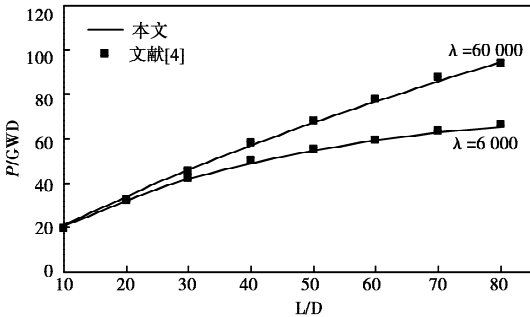


图 3 可压缩单桩特性图

3.1 弹性半无限体中的桩

弹性半无限体中的单桩计算结果见图 3。其中 $\lambda=E_p/G, G$ 为土的剪切模量, W 为桩顶位移, D 为桩的直径, P 为桩顶荷载。图 4(a)为两根桩、三根桩、四根桩对称布置时的计算结果;图 4(b)为九根桩成正方形布置时的计算结果。其中 $S/D=2.5, S$ 为桩间距, P 为群桩中每根桩的桩顶荷载。

由图 3 可知:对于刚度较大(即 λ 较大)的桩,当桩顶位移一定时,增加桩长对桩承载力的提高较明显;对压缩性较大(即 λ 较小)的桩,当 L/D 较大,且桩顶位移一定时,增加桩长对桩的承载力提高较少;而对 $L/D < 20$ 的短桩,当桩顶位移一定时, λ 的变化对桩的承载力影响不大。由图 4(a)可知,当桩顶位移一定时,随着桩数的增多,群桩中每根桩的承载力下降;由图 4(b)可知,群桩中角桩的受力最大,边桩次之,中心桩最小;另外, λ 的变化对角桩、边桩、中心桩的荷载分配影响较大。这些结果均与文献[4]的结果吻合较好,从而验证了本文分析方法与程序的正确性。

3.2 分层地基中的桩

假设地基分为三层,土厚自上而下分别为: $L, t,$

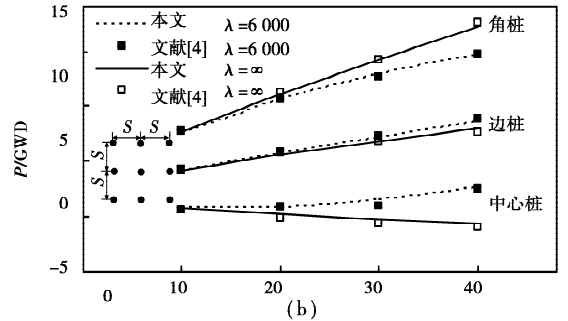
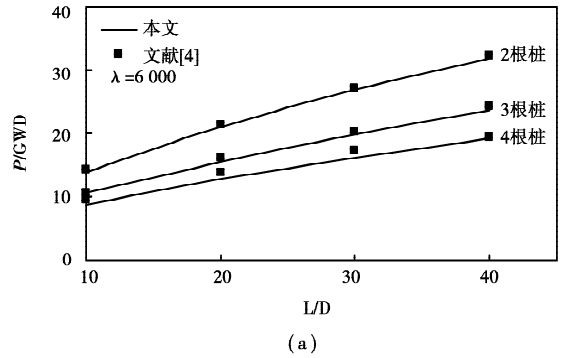


图 4 群桩特性图

($L-t$), 弹性模量分别为 E_v, E_{vt}, E_v , 泊松比均取 0.499。单桩计算结果见图 5。由图 5 可知,当 $E_{vt} < E_v$ 时, $WE_v L/P$ 随 t/D 增加而增加,当 $E_{vt} > E_v$ 时, $WE_v L/P$ 随 t/D 增加而减小。

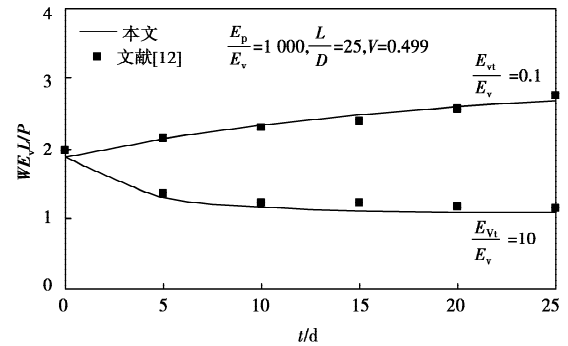


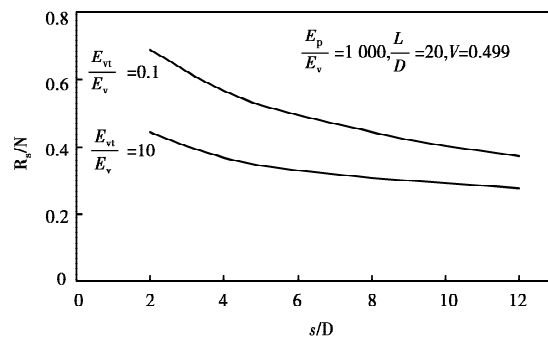
图 5 三层地基中的单桩特性图

群桩计算结果见图 6。其中 R_s 为群桩沉降比, N 为桩数, R_s 定义为:群桩在荷载 NP 作用下的沉降量与单桩在荷载 P 作用下的沉降量之比。本算例中取 $t=0.5L$ 。由图 6 可知, R_s/N 随着 S/D 的增大而减小;当 S/D 一定时, E_{vt}/E_v 较大, R_s/N 较小,即土的刚度越大,群桩效应越显著。

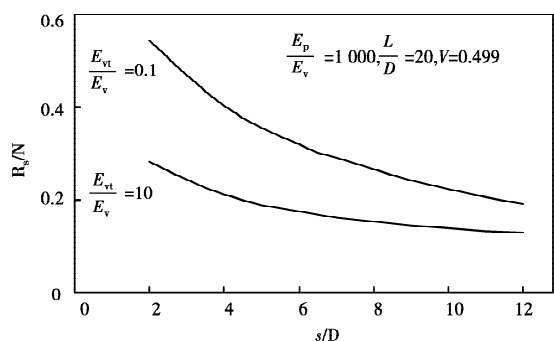
3.3 与有限单元法计算速度的比较

计算条件为:四根桩对称布置, $S/D=2, L/D=20$, 泊松比 0.15;土分为三层,厚度分别为 $L, 0.5L, 0.5L$, 泊松比均为 0.499;桩的弹性模量与第一、二、三层土的弹性模量之比为:

$$E_p : E_{v1} : E_{v2} : E_{v3} = 1000 : 1 : 10 : 1$$



(a) 四根桩



(b) 九根桩

图 6 三层地基中的群桩特性图

用有限元软件 ABAQUS 计算时,桩土系统水平向截取 $2L$ 的计算范围,总共 12 800 个单元,用时 33 min26 s。本文方法用时 1 min52 s。由此可见,本文方法的计算速度远快于有限单元法的计算速度。

4 结 论

以层状弹性体内作用一竖向集中力时的广义 Mindlin 解作为边界单元法的基本解,分析了多层弹性地基中的桩基础。本文计算结果与已有结果吻合较好,验证了本文分析方法与程序的正确性。边界单元法只需对求解域边界进行离散,计算速度相对较快,适于在工程界推广。由于本文分析时假定每层土都是各向同性的弹性介质,计算时需用到土的弹性模量与泊松比;然而一般的勘察报告只提供土的压缩模量,因此较准确地确定每层土的弹性模量是本文方法在工程实际中推广应用的关键。

参考文献:

- [1] SEED H B, REESE L C. The action of soft clay along friction piles[J]. Transactions, ASCE, 1957, 122:731-754.
- [2] POULOS H G, DAVIS E H. The settlement behavior of single axially loaded incompressible piles and piers[J]. Geotechnique, 1968, 18(3): 351-371.
- [3] POULOS H G. Analysis of the settlement of pile groups [J]. Geotechnique, 1968, 18(4): 449-471.
- [4] BUTTERFIELD R, BANERJEE P K. The elastic analysis of compressible piles and pile groups [J]. Geotechnique, 1971, 21(1): 43-60.
- [5] BANERJEE P K, DAVIES T G. The behavior of axially and laterally loaded single piles embedded in non-homogeneous soils[J]. Geotechnique, 1978, 28(3): 309-326.
- [6] BUTTERFIELD R, BANERJEE P K. The problem of pile group-pile ca pinteraction[J]. Geotechnique, 1971, 21(2): 135-142.
- [7] BANERJEE PK, DAVIES T G. Analysis of pile groups embedded in Gibson soil[C]. Proc., 9th Int. Conf. on SMFE, Tokyo, 1977, 381 - 386.
- [8] POULOS H G, DAVIS E H. Pile foundation analysis and design [M]. New York: John Wiley & Sons Inc., 1980.
- [9] MENDONCA A V, DE PAVIA J B. A boundary element method for the static analysis of raft foundations on piles [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2000, 24(3): 237-247.
- [10] 艾智勇. 弹性层状理论及其在桩筏基础中的应用研究 [D]. 上海:同济大学,1999.
- [11] 艾智勇, 杨敏. 广义 Mindlin 解在多层地基单桩分析中的应用[J]. 土木工程学报, 2001, 34(2): 89-95. AI Zhi-yong, YANG Min, Application extended Mindlin solution to analyze a vertically loaded pile in multi-layered soil[J], China Civil Engineering Journal, 2001, 34(2): 89-95.
- [12] LEE, C Y, and SMALL, J C. Finite-layer analysis of axially loaded piles [J]. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 1991, 117(11): 1 706 - 1 722.

(编辑 陈 蓉)