

# 预应力混凝土梁动力性能数值分析

李瑞鸽<sup>1,2</sup>, 杨国立<sup>2</sup>, 张耀庭<sup>1</sup>

(1. 华中科技大学 土木工程与力学学院, 武汉 430074; 2. 河南城建学院, 平顶山 467044)

**摘要:**为了解预应力混凝土(PSC)梁在不同预应力下的自振频率和振型的变化,采用 Clough 提出的轴力作用下混凝土梁的模型对 PSC 梁的频率进行了有限元分析,结果是随着预应力的增加,频率呈下降趋势,振型不随预应力的变化而改变。为验证有限元分析的准确性,同时进行了 1 根无粘结预应力梁的动力试验。试验结果表明:预应力梁的固有频率随着预应力的增加而增加,显然轴压模型不适于 PSC 梁的频率分析,通过分析影响频率变化的主要因素,并依据试验结果对 PSC 梁的动力有限元模型进行了修正。计算结果表明:该修正方法计算出梁的一阶频率的误差较小,2 阶频率的误差稍大,但也可以反映频率随预应力改变的变化趋势。

**关键词:**预应力混凝土;预应力;自振频率;振型;有限元;数值分析

**中图分类号:**TU378.1;TU317.1 **文献标志码:**A **文章编号:**1674-4764(2009)01-0001-06

## Numeric Analysis of the Dynamic Performance of a Prestressed Concrete Beam

LI Rui-ge<sup>1,2</sup>, YANG Guo-li<sup>2</sup>, ZHANG Yao-ting<sup>1</sup>

(1. School of Civil Engineering and Mechanics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, P. R. China; 2. Civil Engineering Department, Pingdingshan Institute of Technology, Pingdingshan 467001, P. R. China)

**Abstract:** The finite element of a prestressed concrete (PSC) beam is analyzed in a case of diverse prestressing forces. The mechanical model applied is that advanced by Clough for a concrete beam bearing axial force. The results indicate that the beam frequencies decrease with increasing prestressing force. A dynamic experiment of a non-bonded PSC beam was carried out to validate the veracity of the finite element analysis. Test beam frequencies increase with increasing prestressing force. The analysis model thus is unfit for frequency analysis of a PSC beam. The determinant factor of frequencies is analyzed, and the dynamic model is modified according to experimental results. The modified model analysis result shows that: the calculated frequencies of mode 1 agree with the test results well; the frequencies of mode 2 possess some errors; and, the modified model can reflect the direction of frequency change along with the change of prestressing force well.

**Key words:** prestressed concrete; prestressing force; natural frequency; mode; finite element; numeric analysis

梁式预应力混凝土结构是土木工程中广泛应用的预应力混凝土结构型式之一<sup>[1]</sup>。但是梁中有效预

应力对其动力性能的影响规律还没有明确<sup>[2-4]</sup>。PSC 梁是由受压的混凝土、受压的普通钢筋、受拉的

收稿日期:2008-07-15

基金项目:国家自然科学基金资助项目(50378041/E0807)

作者简介:李瑞鸽(1973-),女,华中科技大学副教授,博士研究生,(E-mail)liruige@eyou.com。

张耀庭(联系人),男,教授,华中科技大学博士生导师,(E-mail)zyt-1965@163.com。

预应力筋组成,混凝土本身其力学性质就比较复杂<sup>[5-6]</sup>,而且又加入了受压和受拉的钢筋。为此该文通过数值分析的方法研究全预应力梁的动力性能与力筋预应力之间的关系,并在数值计算结果与试验数据对比的基础上对有限元模型进行了修正。为进一步发展和完善预应力损失动力检测技术打下基础。

## 1 预应力混凝土简支梁有限元分析

### 1.1 有限元分析模型的建立

用具有分布质量的有限元法离散化预应力梁,对于只考虑弯曲变形的杆件体系,取单元广义坐标:

$$\{a\}^e = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix}, \text{其中 } v \text{ 代表节点位移,向}$$

下为正; $\theta$ 代表节点转角位移,顺时针为正。

由于预应力混凝土梁的长度远比其截面尺寸大,所以可以将此梁看作一个一维体系,只考虑梁在  $xoy$  平面内的振动。将预应力混凝土梁沿纵向离散成 20 个单元,每个单元有 2 个转动自由度和 2 个垂直于轴线的位移自由度。

由于预应力混凝土简支梁属于小阻尼系统,在研究其自由振动特性时可以看作保守系统<sup>[7]</sup>。结构的振动特性方程可以表示为:

$$\mathbf{M}\dot{q}(t) + \mathbf{K}q(t) = 0 \quad (1)$$

$\mathbf{M}$  为协调质量矩阵,  $\mathbf{K}$  是总刚度矩阵。  $\mathbf{M}$  和  $\mathbf{K}$  都是  $n$  阶实对称矩阵,而且  $\mathbf{M}$  是正定的。

设式(1)具有指数形式的解:

$$q(t) = e^{st}\boldsymbol{\varphi} \quad (2)$$

将(2)式代入(1)得:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi} = \lambda\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi} \quad (3)$$

其中  $\lambda = -s^2$

式(3)即为系统的特征方程或频率方程。该方程对应  $n$  个不同的根  $\lambda_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) 即特征值,每个特征值对应一个特征向量  $\boldsymbol{\varphi}_r$ 。可表示为:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}_r - \lambda_r\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_r = 0 \quad (4)$$

### 1.2 求刚度矩阵

首先用势能驻值原理推导预应力作用下的单元刚度矩阵  $\mathbf{K}^e$ 。

混凝土梁的振动是几何非线性问题。由于预应力的存在,梁单元中不但有偏心预应力引起的弯矩,而且还有预应力引起的二阶效应<sup>[8-9]</sup>。

忽略轴向变形,每个单位有两个自由度,即  $y$  方向的位移和转动自由度。端点力和端点位移分别

为<sup>[10]</sup>:

$$\{a\} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix}, \bar{F}^e = \begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \\ \bar{F}_3 \\ \bar{F}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{y1} \\ \bar{M}_1 \\ \bar{F}_{y2} \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

设位移是  $x$  的三次函数:

$$y(x) = b_1 + b_2x + b_3x^2 + b_4x^3 = \begin{Bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{Bmatrix} = \{x\}^T \{b\} \quad (6)$$

带入端点位移条件解得:

$$\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/l^2 & -2/l & 3/l^2 & -1/l \\ 2/l^3 & 1/l^2 & -2/l^3 & 1/l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{G}\{a\} \quad (7)$$

将式(7)代入式(6)并整理得:

$$y(x) = \sum_{i=1}^4 a_i \varphi_i(x) \quad (8)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(x) &= 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ \varphi_2(x) &= l\left[1 - 2\frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^2\right]\frac{x}{l} \\ \varphi_3(x) &= 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ \varphi_4(x) &= -l\left(\frac{x}{l}\right)^2\left(1 - \frac{x}{l}\right) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

体系的总势能为:  $\Pi = U + U_{F1} + U_{F2}$ , 其中  $U$  是应变能,  $U_{F1}$  是预压应力  $F$  的势能,  $U_{F2}$  是杆端力的势能。

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^l EI [y''(x)]^2 dx = \\ & \frac{1}{2} \int_0^l EI \left[ \sum_{i=1}^4 a_i \varphi_i''(x) \right]^2 dx \\ U_{F1} &= \frac{1}{2} \int_0^l F [y'(x)]^2 dx = \\ & -\frac{F}{2} \int_0^l EI \left[ \sum_{i=1}^4 a_i \varphi_i'(x) \right]^2 dx \\ U_{F2} &= -\sum_{i=1}^4 \bar{F}_i a_i \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

由势能驻值原理<sup>[8]</sup>:

$$\frac{\partial U}{\partial a_i} + \frac{\partial U_{F1}}{\partial a_i} + \frac{\partial U_{F2}}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (11)$$

将式(10)代入式(11)求偏导:

$$\bar{F}_i = \sum_{j=1}^4 \bar{k}_{ij} a_j - \sum_{j=1}^4 \bar{s}_{ij} a_j \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (12)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} \bar{k}_{ij} &= \int_0^l EI \varphi''_i \varphi''_j dx \\ \bar{s}_{ij} &= \int_0^l \varphi'_i \varphi'_j dx \end{aligned} \right\} \begin{matrix} (i = 1, 2, 3, 4) \\ (j = 1, 2, 3, 4) \end{matrix} \quad (13)$$

其中  $\bar{s}_{ij}$  是受到纵向力影响时的附加刚度,所以刚度方程为:

$$\bar{k} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{11} - \bar{s}_{11} & \bar{k}_{12} - \bar{s}_{12} & \bar{k}_{13} - \bar{s}_{13} & \bar{k}_{14} - \bar{s}_{14} \\ \bar{k}_{21} - \bar{s}_{21} & \bar{k}_{22} - \bar{s}_{22} & \bar{k}_{23} - \bar{s}_{23} & \bar{k}_{24} - \bar{s}_{24} \\ \bar{k}_{31} - \bar{s}_{31} & \bar{k}_{32} - \bar{s}_{32} & \bar{k}_{33} - \bar{s}_{33} & \bar{k}_{34} - \bar{s}_{34} \\ \bar{k}_{41} - \bar{s}_{41} & \bar{k}_{42} - \bar{s}_{42} & \bar{k}_{43} - \bar{s}_{43} & \bar{k}_{44} - \bar{s}_{44} \end{bmatrix} \quad (14)$$

接下来用 matlab 编写程序将单元刚度矩阵组合成整体刚度矩阵<sup>[11]</sup>。

### 1.3 求协调质量矩阵

协调质量矩阵的推导与刚度矩阵的推导方法相似。按照相同的假定位移场,用能量原理进行推导。

协调质量矩阵:

$$m = \frac{\rho A}{420} \begin{bmatrix} 156l & 22l^2 & 54l & -13l^2 \\ 22l^2 & 4l^3 & 13l^2 & -3l^3 \\ 54l & 13l^2 & 156l & -22l^2 \\ -13l^2 & -3l^3 & -22l^2 & 4l^3 \end{bmatrix} \quad (15)$$

将单元协调质量矩阵  $m$  组合成整体协调质量矩阵  $M$ ,组合方法与整体刚度矩阵相似。

### 1.4 计算结构的固有频率和振型

求结构的固有频率和振型就是求动力方程(3)的特征值和特征向量。编写程序,计算出预应力梁的频率和对  $M$  矩阵归一化的振型<sup>[11]</sup>。

其中各参数如表 1。

表 1 预应力混凝土梁参数

$b/m$	$h/m$	$A/m^2$	$\rho/(kg \cdot m^3)$	$E_c/(N \cdot m^2)$	$I/m^4$	$l/m$
0.122	0.241	0.029 402	2 577	$3.25 \times 10^{10}$	$1.426 \times 10^{-4}$	0.185

程序计算出的各级张拉力对应的 1、2 阶频率值如图 2 所示。

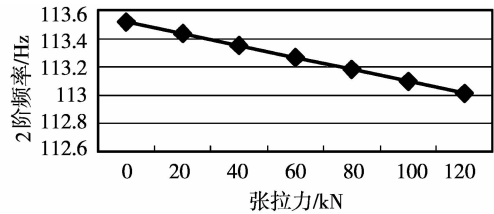
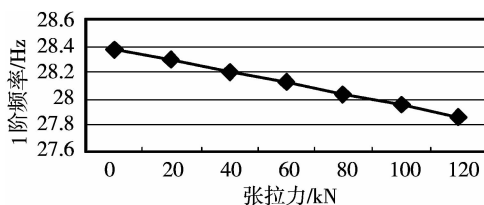


图 2 按轴压模型计算出的预应力与频率关系图

$F=0, F=60 \text{ kN}, F=100 \text{ kN}$  和  $F=120 \text{ kN}$  时振型向量图形完全相同,(仅绘制  $y$  方向的位移),如图 3、4、5 所示。这个结果说明振型不随预应力的改变而变化,究其原因预应力的变化是结构整体特性的改变,而不是改变结构局部特性,振型则可以反映结构的局部特性的变化,而对结构整体性质的改变不敏感。

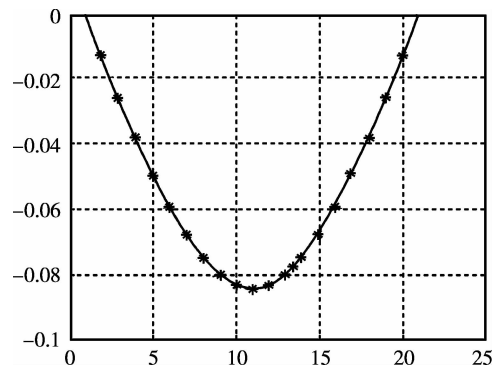


图 3 1 阶振型曲线

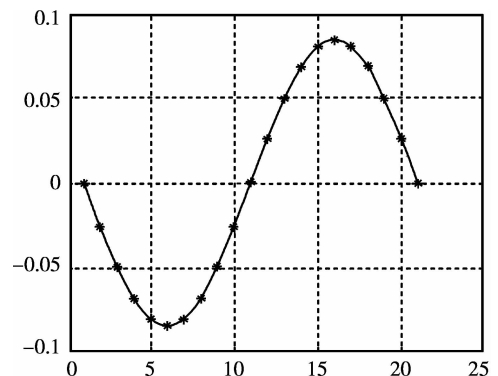


图 4 2 阶振型曲线

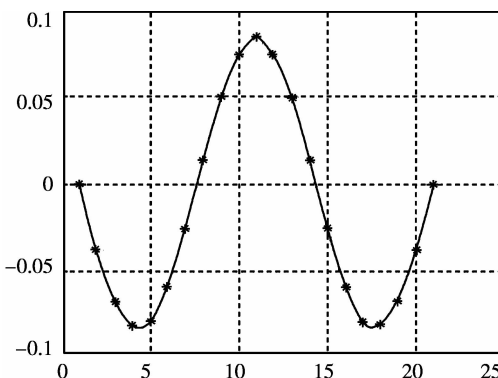


图 5 3 阶振型曲线

## 2 预应力损失的动力试验

### 2.1 试验过程

试验地点:华中科技大学结构试验室,试验模型设计,试验过程及试验结果见文献<sup>[12]</sup>

### 2.2 计算值与试验值的对比分析

理论分析结果表明:随着预应力的增加,预应力梁的各阶自振频率都呈下降趋势,这与文献<sup>[13]</sup>中采用摄动方法计算得出的结论相似,文献<sup>[14]</sup>也得出类似结论。但是试验结果却表明,预应力增加将导致梁的各阶自振频率上升。由此可知,通常所采用的轴向压杆的力学模型不能够作为预应力混凝土动力性能的分析模型。所以该文要对有限元计算模型进行修正,寻求一种合理的力学模型来分析预应力混凝土动力性能。

## 3 有限元计算模型的修正

现有的预应力梁动力计算模型与实际情况是不相符合的,即预应力的存在除了象以往人们通常认为的那样改变了梁几何刚度,造成刚度软化现象以外,还一定有其它的变化。

预应力的存在导致频率上升的根本原因是:1)预应力钢绞线受拉后其刚度会增加,导致整个预应力梁的刚度的增加;2)在一定范围内,预应力的存在增加了梁的刚度,从而引起梁的频率的上升。

该文拟通过两方面对模型进行修正:1)在压杆动力模型的基础上考虑预应力钢绞线受拉后的刚度;2)考虑混凝土受压后刚度的提高(其提高的幅度与混凝土梁中的应力值有关)。

### 3.1 预应力钢绞线受拉后的刚度

将钢绞线的刚度加入到模型中:在压杆动力模型的基础上考虑预应力钢绞线受拉后的刚度,即根据受拉力的线弹性杆件的频率计算公式,反推出其刚度  $E_r I_r$ ,然后将此刚度值加入到预应力梁中<sup>[15]</sup>。

预应力筋在均匀拉力作用下的运动微分方程为:

$$N \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (16)$$

则由式(16)可解出在拉力作用下预应力筋的第  $n$  阶振动频率:

$$\omega_n^2 = \left( \frac{n\pi}{L_r} \right)^2 \frac{N}{\rho_s A_s} \quad (17)$$

假设存在一种梁等效于在拉力作用下预应力筋的模态性能,等效梁的自振频率为:

$$\omega_n^2 = \left( \frac{n\pi}{L_r} \right)^4 \frac{E_s I_s}{\rho_s A_s} \quad (18)$$

由此得到其等效弯曲刚度:

$$E_r I_r = \left( \frac{L_r}{n\pi} \right)^2 N \quad (19)$$

所以预应力梁的总的弯曲刚度为:

$$E_l I_l = E_c I_c + \left( \frac{L_r}{n\pi} \right)^2 N \quad (20)$$

其中:  $E_c I_c$  是混凝土梁和普通钢筋的弯曲刚度之和,  $L_r$  是考虑预应力筋施加给混凝土梁压力,混凝土梁被压缩后的长度。

将预应力钢绞线的等效弯曲刚度加到预应力混凝土梁的压杆模型中,计算其预应力与频率变化的关系,如表2所示:

表2 考虑受拉钢绞线的等效刚度后梁频率值

F/kN	计算值 $f_1$ /Hz	试验值 $f_1$ /Hz	误差/ %	计算值 $f_2$ /Hz	试验值 $f_2$ /Hz	误差/ %
0	28.363	28.36	0.011	113.521	100.71	12.721
20	28.448	28.36	0.310	113.440	102.67	10.490
40	28.532	28.83	-1.032	113.359	103.09	9.961
60	28.617	29.32	-2.398	113.278	104.07	8.848
80	28.701	29.48	-2.643	113.197	105.05	7.755
100	28.785	29.69	-3.049	113.116	105.50	7.219
120	28.868	29.80	-3.126	113.034	105.53	7.111

注:计算一阶频率时采用  $E_r I_r = \left( \frac{L_r}{\pi} \right)^2 N$ , 计算二阶频率时采用  $E_r I_r = \left( \frac{L_r}{2\pi} \right)^2 N$ 。

由表2可以看出,考虑受拉钢绞线的等效刚度后频率计算值仍然小于试验值,由此可知,混凝土受压后其刚度也有所增加,从而导致预应力梁频率的增加。

### 3.2 由于混凝土上施加压应力而增加的刚度

考虑了受拉钢绞线的等效刚度后频率试验值与计算值的差别是由于混凝土受压后刚度的增加引起的,预应力梁的截面尺寸在施加预应力前后并没有变化,所以刚度的增加是由于混凝土受压后弹性模量增加了,由于混凝土上施加预应力而导致的刚度增加与截面上混凝土中的压应力有关,所以不能单纯的考虑张拉力  $F$  对混凝土刚度的影响,应根据截面中的压应力与抗压强度标准值的比值对混凝土的

弹性模量进行修正。另外,梁截面中拉应力的存在也影响着混凝土的弯曲刚度,由于截面中并没有出现裂缝,其截面惯性矩  $I$  不发生变化,所以拉应力也改变着预应力混凝土梁的弹性模量。因此预应力混凝土梁的弹性模量与其截面上的拉、压应力有关。

$$\text{令 } x_1 = \frac{\sigma_c}{f_{ck}}, x_2 = \frac{\sigma_{tmax}}{f_{tk}}, \text{ 则} \quad E_q = E_c f(x_1, x_2) \quad (21)$$

其中:  $\sigma_c = \frac{F}{A}$  为预应力梁截面的平均压应力

$$\sigma_{tmax} = \frac{Feh}{2I} - \frac{Mh}{2I} - \frac{F}{A} \text{ 为预应力梁跨中截面上}$$

由偏心矩引起的最大拉应力 ( $\sigma_{tmax}$  为负值时不考虑其对预应力混凝土梁刚度的影响,即将其值取为 0)。

根据试验值与计算值的等效弹性模量  $E_q$  与  $x_1, x_2$  之间的关系进行回归分析,同时考虑到剪切变形及阻尼对高阶频率影响较大的因素,在混凝土的等效弹性模量项中加入模态阶数的影响,得出其中的函数关系式。

$$E_q = \frac{E_c}{n^{0.3}} f(x_1, x_2) = \frac{E_c}{n^{0.3}} (1 + 0.317x_1 + 0.115x_2 - 0.115x_2^2) \quad (22)$$

当  $x_1 < 0.0243, E_q = E_c$

其中:  $n$  为模态的阶数。

回归分析的拟合度水平如表 3 所示:

表 3 方差分析

方差来源	自由度	平方和	均方和	F 值	显著性水平 $\alpha$
回归系数	2	5.76E+18	2.88E+18	29.825 66	0.003 95
残差	4	3.86E+17	9.65E+16	—	—
总和	6	6.15E+18	—	—	—

从上表可以看出,回归分析结果的拟合度达到了较高的标准,可以接受。

将(20)式代入到有限元的模型中,且用式(22)中的等效弹性模量  $E_q$  代替  $E_c$ ,得到:

$$\bar{k}_{ij} = \int_0^l EI \varphi''_i \varphi''_j dx = \int_0^l \left( \frac{E_c}{n^{0.3}} (1 + 0.317x_1 + 0.115x_2 - 0.115x_2^2) I_c + \left( \frac{L_r}{n\pi} \right)^2 N \right) \varphi''_i \varphi''_j dx \quad (24)$$

将(24)式带入(14)式对单元刚度矩阵进行修改。利用修正后的模型计算试验梁的频率,并将其与试验值进行比较,如表 4 所示。

表 4 修正后的 1、2 阶与试验值的比较

F/kN	计算值 $f_1$ /Hz	试验值 $f_1$ /Hz	误差/%	计算值 $f_2$ /Hz	试验值 $f_2$ /Hz	误差/%
0	28.36	28.36	0.01	102.25	100.71	1.53
20	28.56	28.36	0.69	102.74	102.67	0.06
40	28.75	28.83	-0.28	103.22	103.09	0.13
60	29.18	29.32	-0.49	104.56	104.07	0.47
80	29.51	29.48	0.09	105.55	105.05	0.48
100	29.70	29.69	0.02	106.03	105.50	0.51
120	29.75	29.80	-0.18	106.02	105.53	0.46

1 阶频率计算值与试验值相比误差较小,最大值为 0.69%,2 阶频率的计算值与试验值的误差稍大,最大差值有 1.53%,而且是在预应力为 0 的时候,这说明并不主要是预应力的影响造成了 2 阶频率计算值的误差。而且 2 阶频率计算值随预应力增加的变化趋势与试验值相同,表明本文中的修正方法对 2 阶频率也是可行的。修正后的模型的振型计算结果与图 3、4、5 所示的结果相同,表明对混凝土弹性模量的修正与模态振型的计算结果无关。

#### 4 结束语

通过有限元分析可知:传统的轴压模型计算出的自振频率随预应力的变化趋势与试验结果得出的频率变化趋势相反,因此该模型不能作为预应力梁的动力计算模型。该文考虑了预应力筋受拉后刚度的增加和混凝土受压后刚度的变化,通过与试验结果的对比,对有限元模型的刚度矩阵进行了修正,修正后的有限元模型计算预应力混凝土梁的自振频率与试验值符合较好。

#### 参考文献:

[1] 吕志涛. 新世纪我国土木工程活动与预应力技术的展望[J]. 东南大学学报(自然科学版), 2002, 32(3): 457-459.  
 LÜ ZHI-TAO. Prospects of civil engineering construction and prestressing technique in China in the 21th century [J]. Journal of Southeast University (Natural Science Edition), 2002, 32(3): 457-459.  
 [2] SAIIDI M, DOUGLAS B, FENG S. Prestress force effect on vibration frequency of concrete bridges [J]. Journal of Structural Engineering, 1994, 120(7): 2233-2241.

- [3] ZHANG YAO-TING, LI RUI-GE. Natural frequency of full-Prestressed concrete beam[J]. Transactions of Tianjin University, 2007, 13(5): 354-359.
- [4] 张耀庭, 汪霞利, 李瑞鸽. 预应力梁固有频率的试验研究[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2007, 35(2): 12-15.  
ZHANG YAO-TING, WANG XIA-LI, LI RUI-GE. Experimental research on nature frequency of prestressed concrete beams[J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology (Nature Science Edition), 2007, 35(2): 12-15.
- [5] 张耀庭, 蔡利建. 基于摄动法的体外预应力梁基频分析[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2006, 34(6): 128-131.  
ZHANG YAO-TING, CAI LI-JIAN. Study on the basic frequency analysis of external prestressed concrete beams based on perturbation [J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology (Nature Science Edition), 2006, 34(6): 128-131.
- [6] 宁建国, 商霖, 孙远翔. 混凝土材料动态性能的经验公式、强度理论与唯象本构模型[J]. 力学进展, 2006, 36(3): 389-405.  
NING JIAN-GUO, SHANG LIN, SUN YUAN-XIANG. The developments of dynamic constitutive behavior of concrete[J]. Advances in Mechanics, 2006, 36(3): 389-405.
- [7] 李辉, 丁桦. 结构动力模型修正方法研究进展[J]. 力学进展, 2005, 35(2): 170-180.  
LI HUI, DING HUA. Prestress in model updating for structural dynamic[J]. Advances in Mechanics, 2005, 35(2): 170-180.
- [8] BELYSCHKO T, LIU W K, MORAN B. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures[M]. John Wiley & Sons Ltd. USA, 2000: chapter 6.
- [9] CLOUGH R W, PENZIEN J. Dynamic of Structures (2nd Edition) [M]. Berkeley, California, USA, Computers and Structures, Inc, 1995.
- [10] 于开平, 邹经湘. 结构动力响应数值算法耗散和超调特性设计[J]. 力学学报, 2005, 37(4): 467-476.  
YU KAI-PING, ZOU JING-XIANG. Two time integral algorithms with numerical dissipation and without overshoot for structural dynamic[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2005, 37(4): 467-476.
- [11] KATTAN P I (德). MATLAB 有限元分析与应用[M]. 韩来彬, 译. 北京: 清华大学出版社, 2004: 186-235.
- [12] 李瑞鸽, 张耀庭. 预应力混凝土梁自振频率试验研究[J]. 桥梁建设, 2008(1): 33-36.  
LI RUI-GE, ZHANG YAO-TING. Experimental on natural vibration frequency of prestressed concrete beam [J]. Bridge Construction, 2008(1): 33-36.
- [13] 楼梦麟, 洪婷婷. 预应力梁横向振动分析的模态摄动方法[J]. 工程力学, 2006, 23(1): 107-111.  
LOU MENG-LIN, HONG TING-TING. Mode perturbation method for lateral vibration analysis of prestressed beams[J]. Engineering Mechanics, 2006, 23(1): 107-111.
- [14] 夏樟华, 宗周红. 预应力对混凝土梁动力特性的影响分析[J]. 振动与冲击, 2007, 26(7): 129-134.  
XIA ZHANG-HUA, ZONG ZHOU-HONG. Analysis of influence of prestressing on dynamic characteristics of a concrete beam[J]. Journal of Vibration and Shock, 2007, 26(7): 129-134.
- [15] KIM T T, RYU Y S, YUN C B. Vibration-based method to detect prestress-loss in beam-type bridges [C]//Proceedings of the SPIE-The International Society for Optical Engineering, 2003, 5057: 559-568.

(编辑 王秀玲)