

# 粒子群优化算法在桁架优化设计中的应用

李 峰<sup>1</sup>, 唐和生<sup>1</sup>, 薛松涛<sup>1,2</sup>, 王 勇<sup>1</sup>, 陈 蓉<sup>1</sup>

(1. 同济大学 结构工程与防灾研究所, 上海 200092; 2. 日本近畿大学 理工学部, 日本大阪 577-8502)

**摘 要:** 粒子群优化(PSO)算法是近年来发展起来的一种基于群智能的随机优化算法, 具有概念简单、易于实现、占用资源低等优点。为了解决有应力约束和位移约束的桁架的尺寸优化问题, 将 PSO 算法应用于桁架结构的尺寸优化设计。首先介绍了原始的 PSO 算法的基本原理, 然后引入压缩因子改进了 PSO 算法, 并提出合理的参数设置值。对几个经典问题进行了求解, 并与传统的优化算法和遗传算法进行了比较。数值结果表明, 改进的 PSO 算法具有良好的收敛性和稳定性, 可以有效地进行桁架结构的尺寸优化设计。

**关键词:** 粒子群优化算法; 优化; 桁架结构; 尺寸优化; 压缩因子

**中图分类号:** TU323.4; TU311 **文献标志码:** A **文章编号:** 1674-4764(2009)01-0007-06

## Application of a Particle Swarm Optimization Algorithm in Truss Structure Optimal Design

LI Feng<sup>1</sup>, TANG He-sheng<sup>1</sup>, XUE Song-tao<sup>1,2</sup>, WANG Yong<sup>1</sup>, CHEN Rong<sup>1</sup>

(1. Research Institute of Structural Engineering and Disaster Reduction, Tongji University, Shanghai 200092, P. R. China;  
2. Department of Architecture, Kinki University, Osaka 577-8502, Japan)

**Abstract:** The particle swarm optimization (PSO) algorithm developed in recent years is a stochastic optimization algorithm based on swarm intelligence. It possesses advantages such as being a simple concept, ease of implementation and low resource occupation. The PSO algorithm was adopted to solve the problem of size optimization of truss structures with stress and displacement constraints. We present the basic principle of the original PSO algorithm in detail, and then introduce a constriction coefficient to modify it. Moreover, reasonable values of the coefficients are proposed for the modified PSO algorithm. Several classical problems are solved using the modified PSO algorithm, and the results compared with those using traditional optimization algorithms and genetic algorithms. Numerical results show that the modified PSO algorithm has good convergence and stability, and can be applied to the size optimization of truss structures.

**Key words:** particle swarm optimization algorithm; optimization; truss structures; size optimization; constriction coefficient

自从 Schmit 将数学规划理论与有限元方法结合求解多种载荷情况下弹性结构的最小重量设计问题后, 结构优化设计的新思想很快受到了结构设计

工程师的关注。在过去的几十年里, 结构优化已成为结构工程中热点的研究方向之一。对于桁架结构, 在给定结构形式、材料、布局拓扑和形状的情况

收稿日期: 2008-10-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50708076)

作者简介: 李峰(1979-), 男, 同济大学博士研究生, 主要从事结构优化设计研究, (E-mail) adrianqiao@163.com。

下,优化各个杆件的截面尺寸使结构最轻或最经济,称为尺寸优化。在尺寸优化中的设计变量取杆件的横截面积。

对于离散变量结构的优化设计,算法的好坏通常会决定计算的效率和结果的优劣。在结构优化领域中,传统的优化算法如优化准则(OC)法<sup>[1]</sup>与数学规划(MP)法<sup>[2]</sup>已经在过去的几十年里得到了广泛的应用。OC法对单约束的优化问题比较有效,很容易得到迭代公式,并且收敛速度快。但对于多约束的优化问题,OC法很难确定约束是否有效。不同类型的约束、变量、目标函数等需导出不同的优化准则,因此通用性差。MP法可以求得凸优化和非凸优化问题的全局最优解,是一种精确求解方法,可以直接应用于连续变量结构优化。但采用MP进行大型结构系统的优化时,结构重分析的次数多,需要大量的储存空间、计算量大,并且算法的通用性差,任何参数的改变都可能引起算法的失效。因而它只适合于构件的优化,而不适合大型结构系统的优化。

近来,遗传算法(GA)和模拟退火算法(SA)等启发式算法在工程结构优化设计领域开始兴起。遗传算法对优化模型没有连续可微等性质的要求,且可以搜索到全局最优解或近似全局最优解,因而得到了广泛的应用<sup>[3-6]</sup>。但GA主要存在一些参数(如种群大小,交叉、变异率等)不易确定、计算量大、耗时长等缺点。SA模拟固体的退火过程,采用Metropolis接受准则,并用一组称为冷却进度表的参数控制算法进程,从而得到近似最优解。该法同样不要求函数的连续性和可微性,能处理连续-离散-整数设计变量的非线性规划问题,用于结构优化设计时,可以提供较好的解。但采用SA进行结构优化设计时,结构重分析的次数较多,计算量大、效率低,并且控制参数确定困难。

粒子群优化(PSO)算法是由Eberhart和Kennedy在鸟群和鱼群的社会行为的启发下提出的一种基于随机优化技术的群智能算法<sup>[7]</sup>。PSO与GA有很多相同的特点,如系统用随机分布的一个群体初始化,并通过演化代的更新来寻找最优解。与GA不同的是,PSO没有进化算子如交叉和变异;在PSO算法中,称为粒子的可能解追随当前的最优粒子在解空间中飞行,每个粒子有一个适应值和一个根据群体的最佳经验而得的速度,来调整自身在多维解空间中的飞行方向以寻找全局最优解。相对于传统的优化算法与其它演化算法,PSO具有一些独特的优点:第一,PSO具有记忆功能,每个粒子都保存着其经历过的最优解;第二,在PSO中,粒子间

有建设性算子,亦即粒子间的信息在群体中共享;第三,PSO原理简单,只有少数几个参数需要调整,在算法上易于实现。

作为一种新颖的演化算法,PSO以其概念简单、易于执行及收敛迅速等特点正逐渐得到人们的关注及应用<sup>[8-12]</sup>。在结构工程中,基于实际结构系统优化的PSO的文献很少。该文将PSO算法应用于桁架结构的尺寸优化,通过对典型算例的求解并与相关文献的结果进行对照,以评价利用PSO算法进行桁架尺寸优化的效果。

## 1 粒子群优化(PSO)算法

PSO中,种群的备选解,称作粒子,依靠与相邻的粒子共享信息来共存和同时进化。当种群飞跃问题的搜索空间时,每个粒子产生一个用速度向量表示的解。通过采用自己的飞行经验(如在以前的飞行中对最优位置的记忆)和它相邻位置的粒子的经验(如种群的最优解),每个粒子调整它的速度来寻找较好的解(位置)。 $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ 为粒子群*i*的当前位置; $V_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in})$ 为粒子群*i*的当前飞行速度; $P_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in})$ 为粒子*i*所经历的最好位置,即个体最好位置。速度更新方程和位置更新方程可以写成

$$v_{ij}(t+1) = v_{ij}(t) + c_1 r_{1j}(t)(p_{ij}(t) - x_{ij}(t)) + c_2 r_{2j}(t)(P_{gj}(t) - x_{ij}(t)) \quad (1)$$

$$x_{ij}(t+1) = x_{ij}(t) + v_{ij}(t+1) \quad (2)$$

式中:下标“*j*”表示粒子的第*j*维,“*i*”表示第*i*个粒子,*t*表示粒子进化代数, $c_1, c_2$ 为加速度常数, $r_1$ 和 $r_2$ 是服从 $[0, 1]$ 上相互独立均匀分布的随机数。式(1)中右端第1项为原始的速度项,第2、3项为速度的修正项,第2项为考虑粒子历史最好位置(认知部分)对当前位置的影响,第3项为考虑粒子群历史最好位置(社会部分)对当前位置的影响。

为了更好地控制PSO算法的探测和开发能力,Clerc建议采用压缩因子来保证PSO算法收敛<sup>[13]</sup>,速度更新方程为:

$$v_{ij}(t+1) = \chi[v_{ij}(t) + c_1 r_{1j}(t)(p_{ij}(t) - x_{ij}(t)) + c_2 r_{2j}(t)(P_{gj}(t) - x_{ij}(t))] \quad (3)$$

$$\text{其中压缩因子为: } \chi = \frac{2}{|2 - \varphi - \sqrt{\varphi^2 - 4\varphi}|},$$

$\varphi = c_1 + c_2, \varphi > 4$ 。在 $\varphi > 4$ 情况下,Clerc证明了压缩因子法能控制系统行为最终收敛。实验表明,在选取合适的参数时,压缩因子法比引入线性递减策略的PSO收敛速度快。该文采用引入压缩因子改

进的 PSO 进行结构优化设计。

## 2 空间桁架结构优化

### 2.1 桁架结构截面优化的数学模型

桁架结构优化设计的目的是设计出最优的结构,即在满足所有约束条件的前提下使结构的重量最轻。用于评价结构设计方案优劣的函数,称为目标函数。以  $n$  一杆桁架结构系统为研究对象,基本参数(包括弹性模量、材料密度、最大允许应力、最大允许位移等)已知,优化目标是在给定的荷载条件下,找出  $n$  一杆桁架的最优截面面积,使结构重量最轻。因此,其数学模型可表示为:

$$\text{求 } A = [A_1, A_2, \dots, A_n]^T$$

$$\min W = \sum_{i=1}^n \rho_i A_i L_i + \lambda M \quad (4)$$

$$\text{s. t. } g_i^{\sigma}(A) = [\sigma_i] - \sigma_i \geq 0 \quad (5)$$

$$(i = 1, 2, \dots, K)$$

$$g_{jl}^u(A) = [u_{jl}] - u_{jl} \geq 0 \quad (6)$$

$$(j = 1, 2, \dots, m; l = 1, 2, \dots, ND)$$

$$A_{\min} \leq A \leq A_{\max} \quad (7)$$

$$\lambda = 0 \text{ or } 1 \quad (8)$$

式中:  $A = [A_1, A_2, \dots, A_n]^T$  为界面设计变量,  $n$  为截面设计变量连接后杆件的组数,  $W$  为结构的重量,  $L_i, A_i, \rho_i$  分别为第  $i$  组杆件的长度、截面面积及密度,  $g_i^{\sigma}(A, X), g_{jl}^u(A, X)$  分别为应力约束和位移约束,  $[\sigma_i], \sigma_i$  分别为第  $i$  组杆件的应力允许值和各种工况下的最不利应力值,  $[u_{jl}], u_{jl}$  分别为特定节点  $j$  给定方向  $l$  上的位移允许值和各工况下最不利位移值,  $K$  为总的杆件数目,  $m$  为节点总数,  $ND$  为节点位移约束维数,  $A_{\min}, A_{\max}$  为杆件截面尺寸约束;  $M$  为预先定义的一个大数;  $\lambda$  为罚函数因子,当结构设计变量满足约束条件时则  $\lambda = 0$ , 否则  $\lambda = 1$ 。

### 2.2 基于 PSO 算法的桁架尺寸优化程序

基于 PSO 算法的桁架尺寸优化步骤如下:

- 1) 设置程序参数,初始化设计变量和粒子速度;
- 2) 判断设计变量是否满足界限约束,以及粒子速度是否满足速度界限,将设计变量限制在设计空间内;
- 3) 进行结构分析,求出不同粒子所代表的设计变量对应的结构的性能变量值,如各杆件应力及节点位移;
- 4) 计算每个粒子的适应度,对于不满足约束条件的粒子加上一个非常大的常数罚值  $M$ ;
- 5) 对于每个粒子,将其适应度与所经历的最好

位置  $P_i$  的适应度进行比较,若较好,则将其作为当前的最好位置;

6) 对每个粒子,将其适应度与全局所经历的最好位置  $P_g$  的适应度进行比较,若较好,则将其作为当前的全局最好位置;

7) 根据速度更新方程和位置更新方程对粒子的速度和位置进行更新;

8) 判断是否达到预设的条件,如果达到则结束,否则返回 2)。

基于 PSO 算法的桁架结构优化的流程图(图 1)。

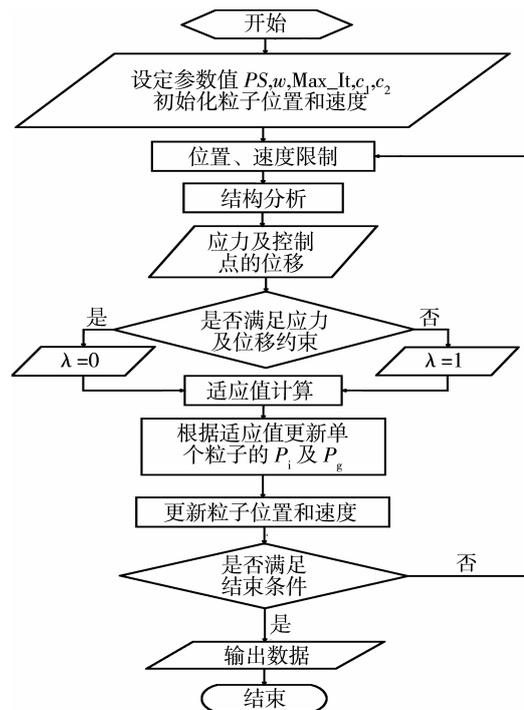


图 1 基于 PSO 算法的桁架尺寸优化流程图

## 3 数值模拟

以下算例,PSO 的计算参数选择如下:  $PS=40, \chi=0.729, Max\_It=1\ 000, c_1=c_2=2.05$ 。

### 算例 1 10-杆平面桁架

图 2 所示为 10-杆桁架结构,各杆的材料相同,密度为  $\rho=2\ 768\ \text{Kg/m}^3$ ,弹性模量  $E=68\ 950\ \text{Mpa}$ ,允许应力  $\sigma=172.3\ \text{MPa}$ ,载荷  $P=444.5\ \text{kN}, L=9.144\ \text{m}$ 。设计变量下限为  $64.5 \times 10^{-5}\ \text{m}^2$ ,上限为  $0.025\ 8\ \text{m}^2$ ,各节点的位移约束为  $50.8\ \text{mm}$ 。

在相同的约束条件下,随机对结构优化 20 次,取最好与最差结果,与其它文献结果进行对比(见表 1)。

### 算例 2 25-杆空间桁架(单工况)

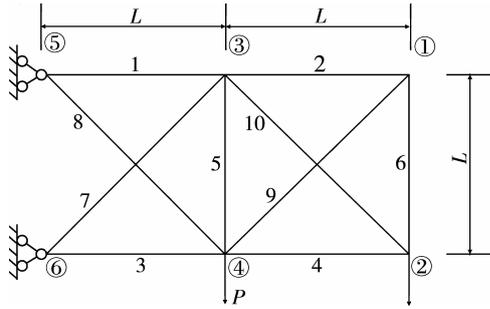


图 2 10-杆平面桁架

图 3 所示为 25-杆空间桁架, 应力约束为  $[-275.8, 275.8]$  MPa,  $E = 68\ 950$  MPa,  $\rho = 2\ 678$  kg/m<sup>3</sup>, 1、2 节点的最大竖向位移不能超过  $d_{\max} = 8.889$  mm,  $L = 635$  mm。节点荷载见表 2, 杆件分组见表 3。

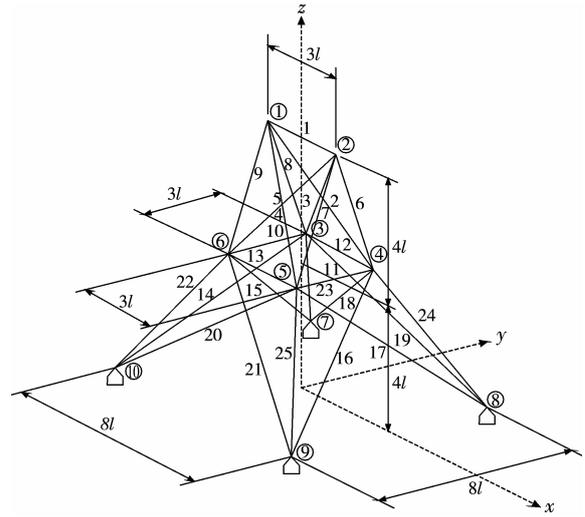


图 3 25-杆空间桁架

表 1 10-杆平面桁架优化结果的比较

杆件号	PSO best	PSO worst	文献[2]	文献[1]	文献[3]	文献[14]	文献[4]
1	19 833.21	20 403.65	16 599.966	21 568.989	20 180.604	19 936.73	17 870.48
2	64.516	64.516	70.322	64.516	64.516	64.516	86.516
3	14 906.12	15 170.68	16 032.226	15 651.581	15 903.194	15 190.29	14 899.13
4	9 840.824	9 867.087	10 548.366	9 199.981	9 929.012	9 651.594	10 012.95
5	64.516	64.516	68.386	64.516	64.516	64.516	64.516
6	351.162	348.845	70.322	64.516	64.516	191.613	944.901
7	4 810.161	4 756.416	5 612.892	5 411.602	5 096.764	4 910.313	4 994.7
8	13 492.24	13 064.31	13 812.875	13 380.618	13 890.294	13 725.78	14 855.13
9	64.516	64.516	78.709	64.516	64.516	64.516	64.516
10	13 856.43	13 770.38	14 387.068	12 703.200	12 303.2	13 649	13 798.68
重量	2 293.925	2 295.344	2 311.386	2 308.370	2 291.587	2 299.48	2 317.37

注:重量栏的单位为 kg,其余项单位为 mm<sup>2</sup>。

表 2 荷载表

节点号	FX/kN	FY/kN	FZ/kN
1	4.448	44.482	-22.241
2	0	44.482	-22.241
3	22.241	0	0
6	22.241	0	0

在相同的约束条件下,随机对结构优化 3 次,收敛曲线见图 4,优化结果与其它文献的结果进行比较,见表 4。

表 3 25 杆件分组表

组别号	杆件号
A1	1
A2	2,3,4,5
A3	6,7,8,9
A4	10,11

组别号	杆件号
A5	12,13
A6	14,15,16,17
A7	18,19,20,21
A8	22,23,24,25

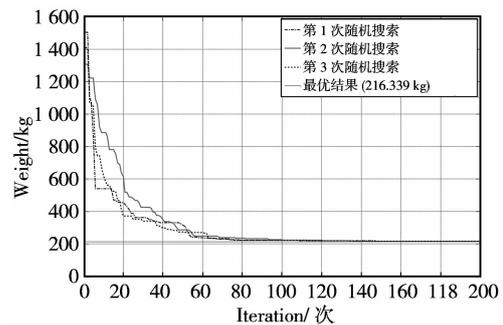


图 4 PSO 算法对单工况 25-杆空间桁架优化设计的收敛曲线

算例 3 72-杆空间桁架(多工况)

图 5 是 4 层的 72-杆空间桁架结构,杆件分为 16 组,约束条件为:1-16 节点沿  $x,y$  的最大位移不

能超过 6.35 mm,最大允许应力  $[-172.375, 172.375]$  MPa。两种不同工况的荷载作用位置及大小见表 5,截面分组见表 6。

表 4 25-杆空间桁架优化结果的比较

杆件号	PSO best	PSO worst	文献[1]	文献[5]	文献[15]	文献[6]
1	64.516	65.7	6.451 6	64.516	64.516	64.516
2	228.5	242.9	1 281.933	774.192	1 225.804	322.58
3	2 237.6	2 278.4	1 931.609	2 064.512	1 677.416	2 193.544
4	64.516	65.2	6.451 6	64.516	64.516	64.516
5	1 227.9	1 245.5	6.451 6	709.676	64.516	967.74
6	506.9	501.5	441.289 4	580.644	516.128	580.644
7	83.9	91.2	1 081.933	258.064	1 354.836	387.096
8	2 575.7	2 524.3	1 717.416	2 193.544	1 677.416	2 193.544
重量	216.339	216.463	247.284	223.987	255.345	220.581

注:重量栏的单位为 kg,其余项单位为 mm<sup>2</sup>。

表 5 荷载工况及节点荷载表

荷载工况	节点号	FX/kN	FY/kN	FZ/kN
1	1	22 250	22 250	-22 250
2	1	0	0	-22 250
2	2	0	0	-22 250
2	3	0	0	-22 250
2	4	0	0	-22 250

表 6 杆件分组表

组别号	杆件号
A1	1,2,3,4
A2	5,6,7,8,9,10,11,12
A3	13,14,15,16
A4	17,18
A5	19,20,21,22
A6	23,24,25,26,27,28,29,30
A7	31,32,33,34
A8	35,36
A9	37,38,39,40
A10	41,42,43,44,45,46,47,48
A11	49,50,51,52
A12	53,54
A13	55,56,57,58
A14	59,60,61,62,63,64,65,66
A15	67,68,69,70
A16	71,72

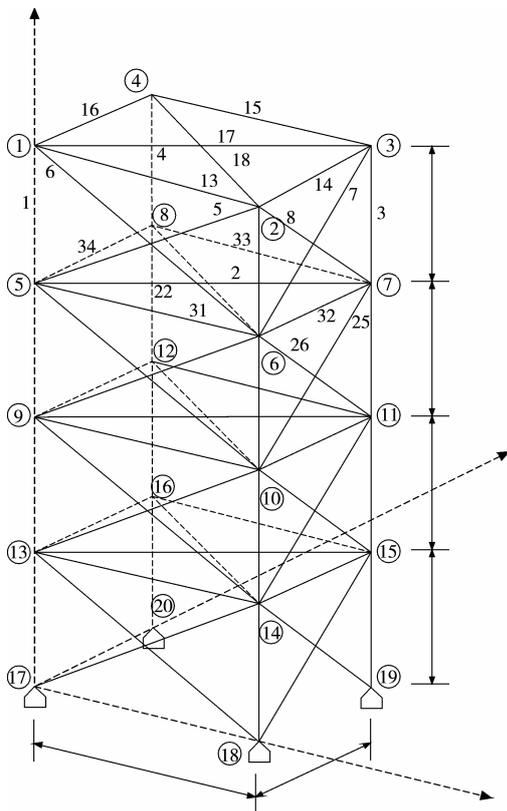


图 5 72-杆空间桁架

在相同的约束条件下,随机对结构进行 6 次优化,优化过程的收敛曲线见图 6,优化结果与其它文献的结果对比见表 7。

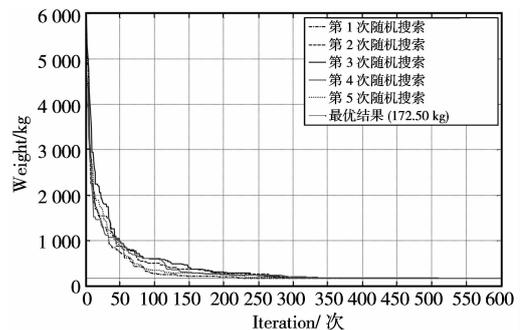


图 6 PSO 算法对多工况 72-杆空间桁架优化设计的收敛曲线

表 7 72-杆空间桁架优化结果的比较

杆件号	PSO best	PSO worst	文献 [16]	文献 [5]	文献 [2]	文献 [1]
1	100.74	101.9	103.871	100.000	102.258	101.355
2	360.28	342.29	359.354	345.161	382.967	345.548
3	269.20	271.92	243.225	309.677	220.258	264.258
4	367.69	361.63	326.451	335.483	391.999	367.290
5	342.92	326.06	394.193	296.774	170.516	326.903
6	336.70	340.12	343.225	341.935	353.548	335.483
7	64.516	64.516	64.516	77.419	64.516	64.516
8	64.516	70.659	64.516	106.451	97.355	64.516
9	870.23	811.16	803.869	745.160	713.999	825.869
10	318.26	326.04	338.064	377.419	373.741	332.128
11	64.516	64.516	64.516	64.516	64.516	64.516
12	64.516	64.516	64.516	64.516	64.516	64.516
13	1 188.0	1 235.3	1 172.90	1 132.2561	340.901	1 224.062
14	325.44	337.48	338.06	325.806	324.774	332.774
15	64.516	64.933	64.516	67.741	64.516	64.516
16	64.516	64.471	64.516	100.000	64.516	64.516
重量	172.44	172.48	172.91	174.98	176.28	172.21

注:重量栏的单位为 kg,其余项单位为 mm<sup>2</sup>。

以上 3 个算例,在 PSO 参数选择不变的前提下,在相同的约束条件下,分别随机对结构进行多次优化,取优化结果中的最优值与最差值列于表 1、表 4 和表 7 中,并在表中给出了相关文献的优化结果。由上述表中数据对照可以看出,采用本文提出的 PSO 算法优化的结果均优于文献的结果。图 4 与图 6 分别给出了算例 2 和算例 3 的收敛历程,算例 2 在经过约 150 次迭代后基本上已经收敛,算例 3 经历约 500 次迭代后接近最优解。因此,PSO 算法可以成功地进行桁架结构尺寸优化设计,算法是有效的。

## 4 结 论

PSO 算法是一种新颖的基于随机优化技术的群智能算法,和其它的进化算法比较,PSO 算法不易陷入局部最优解或搜索空间的平坦区,具有算法简单、易于实现、占用资源低等优点。桁架结构尺寸优化算例的结果表明,引入压缩因子改进的 PSO 算法收敛速度快,且具有良好的稳定性,可以成功地进行桁架结构尺寸优化。

### 参考文献:

[1] ZHOU M, ROZVANY G I N. DCOC: an optimality criteria method for large systems, Part II: Algorithm [J]. Structural Optimization, 1993, 6(4): 250-262.  
 [2] SCHIMIT JR L A, FARSHIT B. Some approximation concepts for structural synthesis[J]. AIAA Journal,

1974, 12(5): 692-699.

- [3] ADELI H, KAMAL O. Efficient optimization of plane trusses [J]. Advances in Engineering Software and Workstations, 1991, 13(3): 116-122.  
 [4] 武金瑛,王希诚.一种粗粒度并行遗传算法及其应用[J].计算力学学报,2002,19(2):148-153.  
 WU JIN-YING, WANG XI-CHENG. A parallel genetic design method with coarse grain[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2002, 19(2): 148-153.  
 [5] ERBATUR F, HASANTEBI O, TNTUNCN I, et al. Optimal design of planar and space structures with genetic algorithms[J]. Computers & Structures, 2000, 75: 209-224.  
 [6] WU SHYUE-JIAN, CHOW PEI-TSE. Steady-state genetic algorithms for discrete optimization of trusses [J]. Computers & Structures, 1995, 56(6): 979-991.  
 [7] KENNEDY J, EBERHART R. Proceedings of the 1995 IEEE International Conference on Neural Networks, Perth, November 27-December 1, 1995 [C]. Piscataway: IEEE, c1995.  
 [8] S SURESH, P B SUJIT, A K RAO. Particle swarm optimization approach for multi-objective composite box-beam design[J]. Composite Structures, 2007, 81: 598-605.  
 [9] D Y SHA, CHENG-YU HSU. A new particle swarm optimization for the open shop scheduling problem[J]. Computers & Operations Research, 2008, 35: 3243-3261.  
 [10] OMKAR S N, MUDIGERE D, NAIK G N, et al. Vector evaluated particle swarm optimization (VEPSO) for multi-objective design optimization of composite structures[J]. Computers & Structures, 2008, 86: 1-14.  
 [11] PEREZ R E, BEHDINAN K. Particle swarm approach for structural design optimization [J]. Computers Structures, 2007, 85: 1579-1588.  
 [12] TANG HE-SHENG, FUKUDA M, XUE SONG-TAO. Proceedings of the 6th International Workshop on Structural Health Monitoring, Stanford University, September 11-13, 2007 [C]. California: Stanford, 2007.  
 [13] CLERC M, KENNEDY J. The particle swarm-explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2002, 6(1): 58-73.  
 [14] 钱令希.工程结构优化设计[M].北京:水利电力出版社,1983.  
 [15] ZHU D. An improved templeman's algorithm for optimum design of trusses with discrete member sizes [J]. Engineering Optimization, 1986, 9: 303-312.  
 [16] VENKAYYA V. Design of optimum structures [J]. Computers & Structures, 1971, 1(12): 265-309.

(编辑 胡 玲)